УДК 519.8

А.В. КУНЦЕВИЧ, В.М. КУНЦЕВИЧ

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

Ключевые слова: *управление, возмущения, нелинейные функции, инвариантные множества.*

ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения инвариантных множеств динамических систем, подверженных воздействию ограниченных аддитивных возмущений, т.е. определения того множества в фазовом пространстве систем, которое не покидает вектор состояния при всех возможных значениях возмущений, имеет междисциплинарный характер, так как к этой проблеме сводятся многие задачи теории управления, радиотехники, механики, робототехники и ряда других областей науки и техники. Изучение этой проблемы для линейных непрерывных систем началось с работы Б.В. Булгакова [1], опубликованной еще в середине прошлого столетия. В последнее время в связи с осознанием как теоретиками, так и конструкторами систем управления реальными объектами, подверженными воздействию возмущений, того обстоятельства, что для параметров этих объектов в большинстве случаев известны лишь их некоторые оценки, возрос интерес к обобщениям задачи Б.В. Булгакова на семейства линейных и нелинейных непрерывных и дискретных систем (см., например, [2–6]).

До последнего времени ставились и решались задачи определения инвариантных множеств и синтеза управления их параметрами для семейств линейных непрерывных и дискретных систем. В [6] решена задача определения инвариантных множеств семейств дискретных линейных и некоторого класса нелинейных систем. В настоящей работе на основании полученных в [7] результатов решается задача синтеза управления, минимизирующего радиусы этих множеств — аналог величины дисперсии при вероятностной природе действующих на объект управления возмущений.

1. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Класс систем со скалярным управлением. Рассмотрим семейство линейных в общем случае нестационарных дискретных управляемых систем

$$X_{n+1} = A(n)X_n + u_n B(n) + Z_n, \quad Z_n = z_n P, \tag{1}$$

где $X_n \in \mathbb{R}^m$, $P = (0, 0, \ldots, 1)$, B_n — m-мерный вектор, u_n — скалярное управление, $A(n)$ — матрица Фробениуса $(m \times m)$,

$$A(n) = \left\| \begin{array}{c:c} 0 & \\ \vdots & \boldsymbol{I} \\ 0 & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{A_m^{\mathrm{T}}(n)} \end{array} \right\|, \tag{2}$$

для m-й строки $A_m^{\mathrm{T}}(n)$ которой задана ее оценка

$$A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m = \operatorname*{conv}_{k=\overline{1;\, K}} \{ A_m^k \}, \tag{3}$$

[1] Работа выполнена в рамках Российско-украинского проекта (проект № 09-01-90431-Укр_Ф_а) при финансовой поддержке Национальной академии наук Украины (проект 20-01-10).

A_m^k — k-я вершина множества $\mathbf{A}_m$, $K \geq m$ — число его вершин,

$$B^{\mathrm{T}}(n) = (0, \ldots, 0, b(n)), \text{ где } b(n) \in \mathbf{b} = \{b : \underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}, \tag{4}$$

u_n — скалярное управление, z_n — возмущение, для которого задана его оценка,

$$z_n \in \mathbf{z} = \{z : |z| \leq \Delta\}. \tag{5}$$

В [7] показано, что ограниченное инвариантное множество для семейства неуправляемых систем

$$X_{n+1} = A(n) X_n + Z_n \tag{6}$$

существует тогда, когда семейство невозмущенных систем

$$X_{n+1} = A(n) X_n \tag{7}$$

робастно устойчиво. Здесь, как и выше, для m-й строки $A_m^{\mathrm{T}}(n)$ матрицы $A(n)$ задана ее оценка (3), а $Z_n = z_n P$ — возмущение, для которого задана его оценка (5). Поэтому прежде всего определим условия, при которых существует управление

$$u_n = C^{\mathrm{T}} X_n, \tag{8}$$

обеспечивающее робастную устойчивость семейству невозмущенных систем,

$$X_{n+1} = \boldsymbol{H}(A(n), C) X_n, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{H}(\cdot) = A(n) + BC^{\mathrm{T}}$, C^{T} — вектор.

В силу (2)–(4), (8) семейство матриц $\boldsymbol{H}(\cdot)$ — семейство матриц Фробениуса, m-я строка которых равна

$$H_m^{\mathrm{T}}(\cdot) = A_m^{\mathrm{T}}(n) + b(n) C^{\mathrm{T}}.$$

Далее рассмотрим только такой частный случай, когда множество $\mathbf{b}$ одноточечное, содержащее лишь одну точку $b \neq 0$, так как при этом существенно упрощается «техническая сторона» решения задачи синтеза управления. Рассмотрение неодноточечного множества $\mathbf{b}$, не меняя сути дела, только усложняет второстепенные детали решения задачи.

Робастная стабилизируемость семейства систем (2), (3), (9) не имеет места при произвольном множестве $\mathbf{A}_m$, поэтому приведем здесь условие робастной стабилизируемости этого семейства систем. Представим множество $\mathbf{A}_m$ в центрированном виде

$$\mathbf{A}_m = \mathring{A}_m + \delta \boldsymbol{A}, \ \delta \boldsymbol{A} = \underset{k=1;\, K}{\underline{\mathrm{conv}}} \{\delta A_m^k = A_m^k - \mathring{A}_m\}, \tag{10}$$

где $\mathring{A}_m$ — центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг множества $\mathbf{A}_m$.

В [8] показано, что выбор вектора C^{T} в (8) в виде

$$\mathring{C} = -b^{-1} \mathring{A}_m \tag{11}$$

обеспечивает семейству систем

$$X_{n+1} = \left\| \begin{array}{c:c} 0 & \\ \vdots & \boldsymbol{I} \\ 0 & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{\delta A_m^{\mathrm{T}}(n)} \end{array} \right\| X_n, \ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta \mathbf{A}_m, \tag{12}$$

выполнение достаточного условия робастной устойчивости семейству управляемых систем (9) [9]:

$$\delta \mathbf{A}_m = \left\{ \delta A_m(n) : \| \delta A_m(n) \|_1 = \sum_{i=1}^{m} |\delta a_{mi}(n)| \leq q < 1 \right\} \tag{13}$$

при наибольшем радиусе множества $\delta \mathbf{A}_m$.

Ниже примем, что условие (13) выполняется и, следовательно, семейство систем (3), (8), (9), (11) имеет ограниченное инвариантное множество. Наряду с семейством систем (1)–(4) рассмотрим неуправляемое семейство систем (6).

Будем считать, что вектор состояния

$$X_n \in \mathbf{X}_n = \underset{s=1;\, 2^m}{\mathrm{conv}} \{X_n^s\}, \tag{14}$$

где X_n^s — s-я вершина m-мерного куба со сторонами, равными 2ρ, с центром в начале координат.

Следуя [7], эволюцию этого семейства систем запишем в терминах разностных включений

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n) + \mathbf{Z}, \tag{15}$$

где

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \left(A(n) = \left\| \begin{array}{c} \underline{A} \\ \hline A_m^{\mathrm{T}}(n) \end{array} \right\| \right) X_n \,. \tag{16}$$

Можно показать, что преобразование (16) для интервального множества $\mathbf{X}_n$ определяет интервальное множество $\mathbf{X}_{n+1} = \boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n)$, имеющее вид

$$\mathbf{X}_{n+1} = \underline{\mathbf{X}}_{n+1} \times \mathbf{x}_{m,n+1}, \tag{17}$$

где

$$\underline{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{x}_{1,n+1} \times \ldots \times \mathbf{x}_{m-1,n+1}, \quad \mathbf{x}_{m,n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n \,. \tag{18}$$

Введем обозначения

$$\min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \{\phi(\cdot) = A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n\} = \underline{x}_{m,n+1}, \qquad \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \phi(A_m^{\mathrm{T}}, X_n) = \bar{x}_{m,n+1}. \tag{19}$$

Из (17), (18) получаем, что

$$\mathbf{x}_{m,n+1} = \{x_{m,n+1} \colon \underline{x}_{m,n+1} \le x_{m,n+1} \le \bar{x}_{m,n+1}\}. \tag{20}$$

Выражение (15) запишем в виде

$$\mathbf{X}_{n+1} = (\underline{\mathbf{X}}_{n+1} \times \underline{\mathbf{x}}_{m,n+1}) + \mathbf{Z}. \tag{21}$$

Поскольку функция $\phi(\cdot)$ билинейная, то ее экстремумы принадлежат вершинам многогранников $\mathbf{A}_m$ и $\mathbf{X}_n$. Поэтому задачи (19) сводятся к комбинаторным задачам, решения которых, принимая во внимание их малую размерность, находим прямым перебором.

Поскольку множество $\mathbf{X}_n$ центрально-симметрическое, то справедливо равенство

$$\underline{x}_{m,n+1} = -\bar{x}_{m,n+1}, \tag{22}$$

из которого следует, что множество $\mathbf{X}_{n+1}$ также центрально-симметрическое.

В [7] показано, что при выполнении неравенства (13) преобразование $\boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n)$ осуществляет сжатое отображение множества $\mathbf{X}_n$ во множество $\mathbf{X}_{n+1}$, т.е. имеет место включение

$$\mathbf{X}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n, \tag{23}$$

которое выполняется, если справедливо неравенство

$$r(\mathbf{X}_{n+1}) < r(\mathbf{X}_n), \tag{24}$$

где $r(\mathbf{X}_n)$ — радиус множества $\mathbf{X}_n$, определяемый как

$$r(\mathbf{X}_n) = \max_{X \in \mathbf{X}_n} \| X \|_1, \qquad \| X \|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|. \tag{25}$$

Из (19), (20) и (25) получаем, что

$$r(\mathbf{X}_{n+1}) = 0{,}5 \sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_{i,n+1} - \underline{x}_{i,n+1}|. \qquad (26)$$

При выполнении условия (23), равносильного условию (13), система (15) имеет ограниченно инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Приняв в (15), что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим уравнение, определяющее инвариантное множество

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \boldsymbol{H}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}. \qquad (27)$$

В [6] приведен метод определения инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ из уравнения (27). Радиус этого множества в соответствии с (26) равен

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}}) = 0{,}5 \sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i^* - \underline{x}_i^*|. \qquad (28)$$

Радиус инвариантного множества служит естественной мерой качества функционирования системы управления семейством объектов (1)–(4), подверженных воздействию ограниченного возмущения. Тогда цель управления — минимизация радиуса инвариантного множества управляемого семейства объектов.

Из (1) и (4) следует, что управление u_n влияет только на координату $x_{m,n+1}$, поэтому задача синтеза управления сводится к задаче

$$\min_{u_n} \left\{ \left| \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} [A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n + b u_n] - \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} [(A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n) + b u_n] \right| \right\}. \qquad (29)$$

В силу равенства (22) задача (29) эквивалентна задаче

$$\min_{u_n} \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} [A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n + b u_n]. \qquad (30)$$

Представив множество $\mathbf{A}_m$ в центрированной форме (10) и приняв во внимание (19), перепишем (30) в виде

$$\min_{u_n} \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta\mathbf{A}_m}} \left\{ [\overset{\circ}{A}_m + \delta A_m(n)]^{\mathrm{T}} X_n + b u_n \right\}. \qquad (31)$$

В [8] решение задачи (31) получено в виде

$$\overset{*}{u}_n = -b^{-1} X_n^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{A}_m. \qquad (32)$$

Таким образом, из (8), (11) и (32) следует, что задача минимизации радиуса инвариантного множества в конечном счете сведена к задаче минимизации нормы матрицы $\boldsymbol{H}(C) = A(n) + BC^{\mathrm{T}}$, как это предложено в [8] при другой постановке задачи синтеза управления.

Ниже примем, что вектор X_n измеряется полностью и без помех. Тогда из (1)–(4), (20), (30), (32) получим, что множество $\widetilde{\mathbf{x}}_{m,n+1}(\overset{*}{u}_n)$ управляемой системы имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{m,n+1}(\overset{*}{u}_n) = \mathbf{x}_{m,n+1} + b\overset{*}{u}_n,$$

где

$$\mathbf{x}_{m,n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta\mathbf{A}_m}} \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n, \qquad (33)$$

и соответственно имеем

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{m,n+1} = \{x_{m,n+1} \colon \underline{\widetilde{x}}_{m,n+1} \le x_{m,n+1} \le \bar{\widetilde{x}}_{m,n+1}\}, \qquad (34)$$

где

$$\tilde{\tilde{x}}_{m,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta \mathbf{A}_m}} \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n, \; \underset{\sim}{x}_{m,n+1} = -\tilde{\tilde{x}}_{m,n+1}. \tag{35}$$

При этом множество $\mathbf{X}_{m,n+1}(\overset{*}{u}_n)$, как это следует из (15) и (33), имеет вид

$$\mathbf{X}_{n+1}(\overset{*}{u}_n) = \boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, \overset{*}{u}_n) + \mathbf{Z}. \tag{36}$$

где

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, \overset{*}{u}_n) = \underline{\mathbf{X}}_{n+1} \times \tilde{\mathbf{x}}_{m,n+1}(\overset{*}{u}_n). \tag{37}$$

В силу принятого выше предположения о том, что условие (13) выполняется, отпадает необходимость в проверке достаточного условия робастной устойчивости синтезированной невозмущенной системы

$$\mathbf{X}_{n+1}(\overset{*}{u}_n) = \boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, \overset{*}{u}_n).$$

Приняв в (36), что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим уравнение

$$\mathbf{X}_{n+1}(\overset{*}{u}_n) = \boldsymbol{H}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \overset{*}{u}_n) + \mathbf{Z}, \tag{38}$$

определяющее искомое инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Метод определения множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ из уравнения (38) подробно изложен в [6].

Рассмотрим теперь более общий случай, когда вектор X_n измеряется полностью, но с ограниченной помехой Y_n, и результат измерения имеет вид

$$Y_n = X_n + V_n, \text{ где } V_n \in \mathbf{V}. \tag{39}$$

В (39) $\mathbf{V}$ — интервальное множество, элементы которого $\mathbf{v}_i$, $i = \overline{1; m}$, удовлетворяют условию

$$v_{i,n} \in \mathbf{v}_i = \{ v_i : | v_i | \le \Delta \}. \tag{40}$$

Нетрудно показать, что при наличии аддитивной помехи измерения V_n задача синтеза управления (31) трансформируется в задачу

$$\min_{u_n} \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ V_n \in \mathbf{V} \\ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta \mathbf{A}_m}} \left\{ [\overset{\circ}{A}_m + \delta A_m(n)]^{\mathrm{T}} (X_n + V_n) + b u_n \right\}, \tag{41}$$

решение которой аналогично решению (32) задачи (31) и имеет вид

$$\overset{*}{u}_n = -b^{-1} (X_n^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{A}_m - V_n^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{A}_m). \tag{42}$$

После подстановки (42) в (1) запишем

$$X_{n+1} = \delta A_m^{\mathrm{T}} X_n + V_n^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{A}_m B + Z_n. \tag{43}$$

Из (1)–(3), (36), (37) и (43) следует, что это семейство систем описывается разностным включением

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{H}}(\mathbf{X}_n) + \hat{\mathbf{Z}}, \tag{44}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta \mathbf{A}_m}} \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n, \; \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} + \mathbf{v} B.$$

Приняв в (44), что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим уравнение, определяющее искомое инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ этого семейства систем:

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \hat{\boldsymbol{H}}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \hat{\mathbf{Z}}. \tag{45}$$

Класс систем с векторным управлением. Рассмотрим задачу управления радиусом инвариантного множества семейства линейных систем с векторным управлением, описанным уравнением

$$X_{n+1} = \boldsymbol{A}(n) X_n + BU_n + Z_n, \tag{46}$$

где для каждой i-й строки $A_i^{\mathrm{T}}(n)$ матрицы $A(n)$ задана ее априорная оценка

$$A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i = \operatorname*{conv}_{k=\overline{1;K_i}} \{A_i^k\}, \; i = \overline{1;m}, \tag{47}$$

A_i^k — k-я вершина множества $\mathbf{A}_i$; $K_i \geq m$ — число его вершин; $U \in \mathbb{R}^l$ — вектор управления; $l \geq m$; B — числовая матрица $(l \times m)$.

В (46) $Z_n \in \mathbb{R}^m$ — неконтролируемое возмущение, для которого задана оценка

$$Z_n \in \mathbf{Z} = \{Z : \| Z \|_{\infty} = \max_{i=\overline{1;m}} | z_i | \leq \Delta\}. \tag{48}$$

Такая оценка ограничивает только «амплитуду» возмущения Z_n и выделяет целый класс множеств $\mathbf{Z}$ при условии, чтобы ни один из элементов $z_{i,n}$ вектора Z_n по модулю не превышал величины Δ и не более того. Ниже ограничимся рассмотрением такого интервального множества $\mathbf{Z} = \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 \times \ldots \times \mathbf{z}_m$, для которого только на i-ю компоненту $z_{i,n}$ налагается ограничение

$$-\underline{z}_{i,n} = \bar{z}_{i,n} \leq \Delta, \; i = \overline{1;m}. \tag{49}$$

Динамику рассматриваемого семейства систем, как и выше, опишем разностным включением

$$X_{n+1} \in \widetilde{\mathbf{X}}_{n+1}(U_n) = \boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, U_n) + \mathbf{Z}, \tag{50}$$

где $\boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, U_n) = \bigcup\limits_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ \boldsymbol{A}(n) \in \mathbf{A}}} (A(n) X_n + BU_n).$

Преобразование $\boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, U_n)$ в общем случае определяет невыпуклое множество $\widetilde{\mathbf{X}}_{n+1}(U_n) = \boldsymbol{H}(\mathbf{X}_n, U_n)$, что существенно усложняет решение задачи синтеза управления U_n. Поэтому введем оценку сверху множества $\widetilde{\mathbf{X}}_{n+1}(U_n)$ в виде интервального множества

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1}(U_n) = \overline{\boldsymbol{H}}(\mathbf{X}_n, U_n) = \bar{h}_1(\mathbf{X}_n, U_n) \times \ldots \times \bar{h}_m(\mathbf{X}_n, U_n), \tag{51}$$

где

$$\bar{h}_i(\mathbf{X}_n, U_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} [A_i^{\mathrm{T}}(n) X_n + B_i^{\mathrm{T}} U_n], \; i = \overline{1;m}. \tag{52}$$

Примем обозначения

$$\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}(U_n) = \bar{h}_i(\mathbf{X}_n, U_n) + \mathbf{z}_i, \; i = \overline{1;m}. \tag{53}$$

Тогда вместо множества $\widetilde{\mathbf{X}}_{n+1}$, определяемого соотношением (50), используем его оценку сверху (51) и вместо системы (50) рассмотрим систему

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1}(U_n) = \overline{\boldsymbol{H}}(\mathbf{X}_n, U_n) + \mathbf{Z}. \tag{54}$$

Необходимо установить, существует ли управление $U_n = U(X_n)$, при котором при заданных оценках (47) строк $A_i^{\mathrm{T}}(n)$ матрицы $A(n)$ семейство невозмущенных управляемых систем

$$X_{n+1} = A(n) X_n + BU_n \tag{55}$$

асимптотически устойчиво. Для этого рассмотрим семейство невозмущенных систем (55) при управлении

$$U_n = CX_n, \tag{56}$$

где C — матрица варьируемых коэффициентов.

Подставив (56) в (55), получим

$$X_{n+1} = \boldsymbol{H}(n, C) X_n, \ \boldsymbol{H}(\cdot) = \boldsymbol{A}(n) + BC. \tag{57}$$

Представим множества $\mathbf{A}_i$, $i = \overline{1; m}$, в центрированной форме, аналогичной (10), т.е.

$$\mathbf{A}_i = \overset{\circ}{A}_i + \delta\mathbf{A}_i, \ \delta\mathbf{A}_i = \underset{k=\overline{1;\, K_i}}{\operatorname{conv}} \{\delta A_i^k = A_i^k - \overset{\circ}{A}_i\}. \tag{58}$$

Матрицу C выберем как решение задачи

$$\min_{C} \max_{\delta A \in \delta\mathbf{A}} \| \overset{\circ}{A} + \delta \boldsymbol{A} + BC \|. \tag{59}$$

Для случая квадратной матрицы B при $\det B \neq 0$ в [7] решение задачи (59) получено в виде

$$C = -B^{-1} \overset{\circ}{A}, \tag{60}$$

что с учетом (56) дает

$$\overset{\circ}{U}_n = -B^{-1} \overset{\circ}{A} X_n. \tag{61}$$

Подставив (61) в (57), будем иметь

$$X_{n+1} = \delta \boldsymbol{A}(n) X_n. \tag{62}$$

В [7, 9] достаточное условие робастной устойчивости семейства систем (62), (58) получено в виде

$$\max_{\delta A(n) \in \delta\mathbf{A}} \| \delta A(n) \|_1 = \max_{\substack{i=\overline{1;\, m} \\ \delta A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \delta\mathbf{A}_i}} \| \delta A_i^{\mathrm{T}}(n) \|_1 \leq q < 1. \tag{63}$$

Ниже примем, что условие (63) выполняется и, следовательно, при управлении, обеспечивающем асимптотическую устойчивость системы (55), система (46) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Если матрица B прямоугольная, то искомую матрицу C определим с помощью псевдообратной матрицы B^{-1}:

$$C = -(B^{\mathrm{T}} B)^{-1} B^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{A}.$$

Цель управления семейством систем (46)–(48) — минимизация радиуса $r(\overset{*}{\mathbf{X}}(U_n))$ инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Нетрудно показать, что уменьшение величины $r(\overset{*}{\mathbf{X}}(U_n))$ выбором управления U_n может быть достигнуто лишь за счет уменьшения величины интервальных множеств

$$\bar{\mathbf{x}}_{i,\, n+1}(U_n) = \bar{h}_i(\mathbf{X}_n) + B_i^{\mathrm{T}} U_n, \ i = \overline{1; m}.$$

Введем обозначения

$$W_n = BU_n, \ w_{i,n} = B_i^{\mathrm{T}} U_n, \ i = \overline{1; m}, \tag{64}$$

и перепишем (53) в виде

$$\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}(w_{i,n}) = \bar{h}_i(\mathbf{X}_n, w_{i,n}) + w_{i,n}, \ i = \overline{1; m}, \tag{65}$$

или

$$\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}(w_{i,n}) = \{x_{i,n+1} : \underline{x}_{i,n+1} + w_{i,n} \leq x_{i,n+1} \leq \bar{x}_{i,n+1} + w_{i,n}\},$$

где

$$\underline{x}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} \{\phi_i(\cdot) = A_i^{\mathrm{T}}(n) X\}; \ \bar{x}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} \phi_i(\cdot); \ i = \overline{1; m}. \tag{66}$$

Как отмечалось выше, поскольку функции $\phi_i(\cdot)$ билинейные, то их экстремумы принадлежат вершинам многогранников $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{X}_n$, и поэтому решения задач (66) сводятся к перебору вершин.

Множество $\overline{\boldsymbol{H}}(\mathbf{X}_n, W_n)$ интервальное, поэтому решение задачи

$$\min_{W_n} r(\overline{\boldsymbol{H}}(\mathbf{X}_n, W_n)) \tag{67}$$

сводится к решению совокупности задач

$$\min_{w_{i,n}} r(\overline{h}_i(\mathbf{X}_n, W_n)), \ i = \overline{1; m}. \tag{68}$$

Поскольку множество $\mathbf{X}_n$ центрально-симметрическое, то справедливо равенство

$$\min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^{\mathrm{T}}(n) X_n\} = - \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^{\mathrm{T}}(n) X_n\}, \ i = \overline{1; m},$$

и поэтому задачи (68) сводятся к задачам

$$\min_{w_{i,n}} \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^{\mathrm{T}}(n) X_n + w_{i,n}\}, \ i = \overline{1; m}. \tag{69}$$

С точностью до обозначений задачи (69) совпадают с решенной выше задачами (30), (39) и по аналогии с ними решения задач (69) имеют вид

$$\overset{*}{w}_{i,n} = -\overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}} X_n, \ i = \overline{1; m}, \tag{70}$$

где $\overset{\circ}{A}_i$ — центры множеств $\mathbf{A}_i$, представленных также в (10) в центрированной форме.

Записав систему уравнений (70) в компактном виде

$$\overset{\circ}{W}_n = -\overset{\circ}{A} X_n, \ \text{где} \ \overset{\circ}{A} = \left\| \overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}} \right\|_{i=1}^{m}, \tag{71}$$

и подставив (71) в (64), получим

$$\overset{\circ}{A} X_n = -B \overset{*}{U}_n. \tag{72}$$

Если матрица B прямоугольная, то из (72) следует, что

$$\overset{*}{U}_n = -(B^{\mathrm{T}} B)^{-1} B^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{A} X_n. \tag{73}$$

Поскольку и скалярные, и векторные управления, минимизирующие радиусы инвариантных множеств, определяются величинами, содержащимися в априорных оценках, то все вычисления, связанные с определением искомых управлений, могут быть выполнены в режиме off-line.

2. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СЕМЕЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим часто используемый в приложениях случай, когда нелинейная вектор-функция $F(X_n, L(n))$ содержит линейную часть и скалярную нелинейную функцию векторного аргумента

$$X_{n+1} = F(X_n, L(n)) + Z_n = A(n) X_n + f(X_n) C + u_n B + Z_n, \tag{74}$$

где $A(n)$ — матрица $(m \times m)$ общего вида, для строк $A_i^{\mathrm{T}}(n)$ которой заданы их априорные оценки (47), $f(X_n)$ — скалярная однозначная знакопеременная нелинейная функция векторного аргумента, такая что $f(0) = 0$, векторы C и B соответственно иеют вид

$$C^{\mathrm{T}} = (0, 0, \ldots, 0, 1), \ B^{\mathrm{T}} = (0, 0, \ldots, 0, b). \tag{75}$$

Все остальные обозначения в (74) те же, что и выше, а множество $\mathbf{X}_n$ по-прежнему задано в виде (14).

Примем, что точное значение знакопеременной функции $f(\mathbf{X})$ неизвестно и для нее задана лишь оценка

$$f(\mathbf{X}) \in \mathbf{f}. \tag{76}$$

На оценках нелинейных функций векторного аргумента остановимся подробнее. Динамика семейства систем (74), (75), (47), (48), (14) описывается разностным включением

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = G(\mathbf{X}_n) + u_n B + \mathbf{Z}, \tag{77}$$

где

$$G(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A(n) \in \mathbf{A} \\ f(X_n) \in \mathbf{f}}} [A(n) X_n + f(X_n) C], \ \ \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_m. \tag{78}$$

Так как в общем случае множество $G(\mathbf{X}_n)$ невыпуклое, что существенно осложняет решение задачи синтеза управления, аппроксимируем его интервальным множеством $\overline{G}(\mathbf{X}_n)$ и вместо системы (77), (78) будем рассматривать систему

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) + u_n B + \mathbf{Z}, \tag{79}$$

где

$$\overline{G}(\mathbf{X}_n) = \overline{g}_1(\mathbf{X}_n) \times \ldots \times \overline{g}_i(\mathbf{X}_n) \times \ldots \times \overline{g}_m(\mathbf{X}_n); \tag{80}$$

$$\overline{g}_i(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_i^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i}} [A_i^{\mathrm{T}}(n) X_n], \ \ i = \overline{1; m-1}; \tag{81}$$

$$\overline{g}_m(\mathbf{X}_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_i \\ f(X_n) \in \mathbf{f}}} [A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n + f(X_n)]. \tag{82}$$

Об определении множеств (81) сказано выше, а на определении множества $\overline{g}_m(\mathbf{X}_n)$ (82) остановимся подробнее. Как известно, исследования устойчивости нелинейных непрерывных систем управления началось с работы А.И. Лурье и В.Н. Постникова [10], опубликованной в середине прошлого столетия (см. также [11]), в которой рассматривалась система с нелинейной знакопеременной скалярной «секториальной» функцией скалярного аргумента, удовлетворяющей ограничениям

$$\underline{k} x^2 \le x f(x) \le \bar{k} x^2, \ \text{где} \ 0 \le \underline{k} < \bar{k} > 0, \tag{83}$$

что эквивалентно $\underline{k} x \operatorname{sign} x \le f(x) \operatorname{sign} x \le \bar{k} x \operatorname{sign} x$ или $\underline{k} |x| \le f(x) \operatorname{sign} x \le \bar{k} |x|$.

Для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (83), справедливо равенство

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} x. \tag{84}$$

Поскольку для знакопеременных функций $f(X)$ векторного аргумента X многомерного аналога равенства (84) не существует, то, следуя [7], введем оценки для функций $f(X)$ следующим образом.

Для однозначной знакопеременной функции $f(X)$ по априорным сведениям о ее свойствах определяются те непересекающиеся между собой области $\mathbf{X}^+$, в которых $f(X) \ge 0$, и области $\mathbf{X}^-$, в которых $f(X) \le 0$. Для области $\mathbf{X}^+$ оценку функции $f(X)$ примем в виде

$$\underline{k} \| X \| \le f(X) \le \bar{k} \| X \| \ \ \text{при} \ \ X \in \mathbf{X}^+ \tag{85}$$

и соответственно для области $\mathbf{X}^{-}$ оценка функции $f(X)$ имеет вид

$$-\underline{k}\,\|X\| \geq f(X) \geq -\bar{k}\,\|X\| \text{ при } X \in \mathbf{X}^{-}. \tag{86}$$

Здесь $0 \leq \underline{k} < \bar{k}$.

Такими областями $\mathbf{X}^{+}$ и $\mathbf{X}^{-}$ могут быть те или иные ортанты пространства $\mathbb{R}^m$ или их объединения и $\mathbf{X}^{+} \cup \mathbf{X}^{-} = \mathbb{R}^m$. Далее будем рассматривать лишь тот случай, когда функция $f(X)$ знакопеременная и для нее заданы оценки (85) и (86).

Управляемое семейство систем (77) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ при выполнении условий: существует управление $u_n = u(X_n)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость семейству невозмущенных систем $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) + u_n B$ в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \{X : \|X\| \leq \rho\}$ и имеет место включение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} \subset \overset{\circ}{\mathbf{X}}. \tag{87}$$

Полагаем, что вектор X_n измеряется полностью и без помех и из него формируется управление $u_n = u(X_n)$. Подставив его в (77), получим уравнение эволюции замкнутой системы

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) + u(X_n)B. \tag{88}$$

В соответствии со следствием теоремы из [7] достаточным условием асимптотической устойчивости эволюционирующих множеств $\mathbf{X}_n$ в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ является выполнение неравенства

$$r[\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n)] < r(\mathbf{X}_n). \tag{89}$$

Ниже примем, что оценки линейной части системы (74) и нелинейной однозначной знакопеременной функции таковы, что неравенство (89) справедливо. Из (80)–(82) следует, что управление $u(X_n)$ воздействует лишь на множество $\tilde{g}_m(\mathbf{X}_n, u_n) = \overline{g}_m(\mathbf{X}_n) + bu_n$, поэтому задача минимизации величины $r(\overline{\mathbf{X}}_{n+1})$ сводится к задаче

$$\min_{u_n} r(\tilde{\mathbf{x}}_{m,n+1}), \tag{90}$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}_{m,n+1} = \{x_{m,n+1} : \underline{x}_{m,n+1} + bu_n \leq x_{m,n+1} \leq \bar{x}_{m,n+1} + bu_n\}. \tag{91}$$

Далее, разобьем интервал $\tilde{\mathbf{x}}_{m,n+1}$ на подмножества $\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{m,n+1}$ и $\tilde{\mathbf{x}}^{-}_{m,n+1}$ в соответствии с (85) и (86) и сведем решение задачи к поиску граничных точек интервалов $\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{m,n+1}$ и $\tilde{\mathbf{x}}^{-}_{m,n+1}$:

$$\underline{x}^{+}_{m,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}^{+} \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \{A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n + \underline{k}\,\|X_n\|\}, \tag{92}$$

$$\bar{x}^{+}_{m,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}^{+} \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \{A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n + \bar{k}\,\|X_n\|\}, \tag{93}$$

$$\underline{x}^{-}_{m,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}^{-} \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \{A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n - \bar{k}\,\|X_n\|\}, \tag{94}$$

$$\bar{x}^{-}_{m,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}^{-} \\ A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_m}} \{A_m^{\mathrm{T}}(n) X_n - \underline{k}\,\|X_n\|\}. \tag{95}$$

Путем дальнейшего разбиения множества $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ избавимся от нормы вектора состояния и сведем задачи (92)–(95) к совокупности задач минимизации и максимизации линейных функций на интервальных множествах, решение которых сводится к перебору вершин.

Из всех найденных значений $\bar{x}_{m,n+1}$ определим наибольшее, которое обозначим $\bar{x}^*_{m,n+1}$, а из всех значений $\underline{x}_{m,n+1}$ — наименьшее, которое обозначим $\underline{x}^*_{m,n+1}$, и окончательно получим

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{m,n+1} = \{x_{m,n+1} : \underline{x}^*_{m,n+1} \le x_{m,n+1} \le \bar{x}^*_{m,n+1}\},$$

где $\underline{x}^*_{m,n+1} = -\bar{x}^*_{m,n+1}$ в силу симметричности $\widetilde{\mathbf{x}}_{m,n+1}$.

Представим множество $\mathbf{A}_m$ в центрированной форме (10). Также поступим и с интервальным множеством κ допустимых значений k:

$$\kappa = \overset{\circ}{k} + \delta\kappa,\ \ \overset{\circ}{k} = \frac{1}{2}(\bar{k} + \underline{k}),\ \ \delta\kappa = \left\{\delta k : |\delta k| \le \frac{1}{2}(\bar{k} - \underline{k})\right\}. \tag{96}$$

С учетом введенных обозначений (96) задачу (90) перепишем в виде

$$\min_{u_n} \max_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \\ \delta A_m^{\mathrm{T}}(n) \in \delta\mathbf{A}_m \\ \delta k \in \delta\kappa}} \{(\overset{\circ}{A}_m + \delta A_m)^{\mathrm{T}} X_n + (\overset{\circ}{k} + \delta k) \| X_n \|\}. \tag{97}$$

Решение задачи (97), совпадающей с точностью до обозначения с задачей, решенной в [9], имеет вид

$$\overset{*}{u}_n = -\overset{\circ}{A}{}^{\mathrm{T}}_m(n) X_n - \overset{\circ}{k} \| X_n \|. \tag{98}$$

Уравнение эволюции системы (77) при управлении u_n в виде (98) окончательно запишем как

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{G}(\mathbf{X}_n) + \mathbf{Z}. \tag{99}$$

Приняв в (99), что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}, \tag{100}$$

определяющее инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Воспользовавшись предложенным в [6] итерационным методом определения множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$, найдем его из уравнения (100).

Как отмечалось в [6], соотношение, определяющее радиус инвариантного (предельного) множества, можно получить иным путем. Действительно, в [7] показано, что при анализе устойчивости эволюционирующих множеств радиус центрально-симметрического множества $\mathbf{X}_n$ является функцией Ляпунова. Поэтому уравнение, определяющее предельное (инвариантное) множество системы (99), получим, приравняв нулю правую часть выражения

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = r[(\overline{F}(\mathbf{X}_n, L)) + \mathbf{Z}] - r(\mathbf{X}_n),$$

что дает уравнение, определяющее радиус инвариантного множества

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}}) = r(\overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}) = r(\overline{G}(\overset{*}{\mathbf{X}})) + r(\mathbf{Z}).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа продолжает исследования семейств (в общем случае) нелинейных нестационарных дискретных систем, подверженных воздействию ограниченных возмущений, начатые в [6], и использует предложенный в [7] метод аппроксимации множеств, определяемых разностными включениями, описывающими динамику семейства нелинейных дискретных систем, интервальными множествами, а также методы определения инвариантных множеств этих систем [6].

Основной результат статьи — постановка и решение задачи синтеза управления, минимизирующего радиус инвариантного множества (предельного множества) семейства нелинейных дискретных систем — аналога дисперсии при стохастической природе возмущений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проиллюстрируем изложенный выше метод определения управления, минимизирующего радиус инвариантного множества, для нелинейного разностного включения (77) при $m=2$ на следующем примере:

$$X_{n+1}=A(n)X_n+f(X_n)C+u_nB+Z_n, \tag{П1}$$

где для элементов $a_{ij}(n)$, $i,j=\overline{1;2}$, матрицы $A(n)$ заданы их оценки

$$\begin{gathered} 0{,}1\le a_{11}(n)\le 0{,}2;\ 0{,}1\le a_{12}(n)\le 0{,}2; \\ -0{,}1\ge a_{21}(n)\ge -0{,}2;\ -0{,}1\ge a_{22}(n)\ge -0{,}2; \end{gathered} \tag{П2}$$

$$B^{\mathrm{T}}=(0;b);\ C^{\mathrm{T}}=(0;1). \tag{П3}$$

Для однозначной знакопеременной функции $f(X)$ заданы ее априорные оценки

$$\begin{gathered} \underline{k}\,\|X\|_1\le f(X)\le \bar{k}\,\|X\|_1,\ X\in\mathbf{X}_1=\{X: x_1\ge 0; x_2\ge 0\}; \\ f(X)=0,\ X\in\mathbf{X}_2=\{X: x_1\ge 0; x_2\le 0\}; \\ -\underline{k}\,\|X\|_1\ge f(X)\ge -\bar{k}\,\|X\|_1,\ X\in\mathbf{X}_3=\{X: x_1\le 0; x_2\le 0\}; \\ f(X)=0,\ X\in\mathbf{X}_4=\{X: x_1\le 0; x_2\ge 0\}; \end{gathered} \tag{П4}$$

$$\underline{k}=0,\ \bar{k}=0{,}05. \tag{П5}$$

Нетрудно убедиться, что функция $\xi(X)=\|X\|_1=|x_1|+|x_2|$ не представима в квазилинейной форме по Е.А. Барбашину [12]:

$$\xi(X)=\varphi^{\mathrm{T}}(X)X,\ \text{где}\ \varphi(X)=[\phi_i(X)]_{i=1}^2;\ \phi_i(X)=\frac{\xi(X)}{x_i},\ i=\overline{1;2},$$

так как при $x_i\to 0$ и $x_j\ne 0$, $j\ne i$ $\phi_i(X)\to\infty$.

Для возмущения Z_n задана его априорная оценка (5), где

$$\max_{i=\overline{1;\,2}}|z_{in}|\le\Delta=0{,}9. \tag{П6}$$

Эволюция семейства систем (П1)–(П6) описывается соотношением

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1}=\overline{G}(\overline{\mathbf{X}}_n)+u_nB+\mathbf{Z}. \tag{П7}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \overline{G}(\mathbf{X}_n)=\bar{g}_1(\mathbf{X}_n)\times\bar{g}_2(\mathbf{X}_n), \\ \bar{g}_1(\mathbf{X}_n)=\bigcup_{\substack{X_n\in\mathbf{X}_n=\overset{\circ}{\mathbf{X}} \\ A_1^{\mathrm{T}}(n)\in\mathbf{A}_1}} A_1^{\mathrm{T}}(n)X_n, \\ \bar{g}_2(\mathbf{X}_n)=\bigcup_{\substack{X_n\in\mathbf{X}_n=\overset{\circ}{\mathbf{X}} \\ A_2^{\mathrm{T}}(n)\in\mathbf{A}_2}} [A_2^{\mathrm{T}}(n)X_n+k\,\|X_n\|_1]\quad(\underline{k}\le k\le\bar{k}). \end{gathered} \tag{П8}$$

Из (П8) для первой координаты вектора состояния имеем

$$\mathbf{x}_{1,n+1} = \bar{g}_1(\mathbf{X}_n) = \{x_1 : \underline{x}_{1,n+1} \le x_{1,n+1} \le \bar{x}_{1,n+1}\},$$

где при $X_n \in \mathbf{X}_1$

$$\underline{x}_{1,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \\ A_1^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_1}} A_1^{\mathrm{T}}(n) X_n,\ \bar{x}_{1,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \\ A_1^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_1}} A_1^{\mathrm{T}}(n) X_n.$$

Для второй координаты получим

$$\mathbf{x}_{2,n+1} = \bar{g}_2(\mathbf{X}_n) = \{x_2 : \underline{x}_{2,n+1} \le x_{2,n+1} \le \bar{x}_{2,n+1}\}$$

и для отыскания $\underline{x}_{2,n+1}$ и $\bar{x}_{2,n+1}$ найдем максимумы и минимумы функций $\varphi_1(\cdot) = A_2^{\mathrm{T}}(n) X_n + k \| X_n \|_1$, $\varphi_2(\cdot) = A_2^{\mathrm{T}}(n) X_n + k \| X_n \|_1$ и $\varphi_3(\cdot) = A_2^{\mathrm{T}}(n) X_n$ на множествах $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ и $\mathbf{X}_4$:

$$\bar{x}_{2,n+1}^1 = \max\{\varphi_1(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_1;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2;\ \underline{k} \le k \le \bar{k}\}, \qquad (П9)$$

$$\underline{x}_{2,n+1}^1 = \min\{\varphi_1(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_1;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2;\ \underline{k} \le k \le \bar{k}\}, \qquad (П10)$$

$$\bar{x}_{2,n+1}^3 = \max\{\varphi_2(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_3;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2;\ \underline{k} \le k \le \bar{k}\}, \qquad (П11)$$

$$\underline{x}_{2,n+1}^3 = \min\{\varphi_2(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_3;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2;\ \underline{k} \le k \le \bar{k}\}, \qquad (П12)$$

$$\bar{x}_{2,n+1}^2 = \max\{\varphi_3(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_2;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2\}, \qquad (П13)$$

$$\underline{x}_{2,n+1}^2 = \min\{\varphi_3(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_2;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2\}, \qquad (П14)$$

$$\bar{x}_{2,n+1}^4 = \max\{\varphi_3(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_4;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2\}, \qquad (П15)$$

$$\underline{x}_{2,n+1}^4 = \min\{\varphi_3(\cdot) : X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \cap \mathbf{X}_4;\ A_2^{\mathrm{T}}(n) \in \mathbf{A}_2\}. \qquad (П16)$$

Рассмотрим поведение системы (П7) в области

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \operatorname{conv}\left\{ \left\| \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix} \right\| \right\}.$$

Найдем решения задач (П9)–(П16) при заданных оценках строк матриц $A_i^{\mathrm{T}}(n)$, $i = \overline{1;2}$, вершинах множества $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ и коэффициентах $\underline{k}$, $\bar{k}$:

$$\underline{x}_{1,n+1} = -0{,}8;\ \bar{x}_{1,n+1} = 0{,}8;$$

$$\underline{x}_{2,n+1}^1 = 0;\ \bar{x}_{2,n+1}^1 = 1{,}0;\ \underline{x}_{2,n+1}^3 = -1{,}0;\ \bar{x}_{2,n+1}^3 = 0;$$

$$\underline{x}_{2,n+1}^2 = -0{,}8;\ \bar{x}_{2,n+1}^2 = 0{,}8;\ \underline{x}_{2,n+1}^4 = -0{,}8;\ \bar{x}_{2,n+1}^4 = 0{,}8.$$

Выбрав наименьшее и наибольшее значения левой и соответственно правой границы, найдем множество

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \operatorname{conv}\left\{ \left\| \begin{matrix} 1,\ 0 \\ 1,\ 0 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} 1,\ 0 \\ -1,\ 0 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} -1,\ 0 \\ -1,\ 0 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} -1,\ 0 \\ 1,\ 0 \end{matrix} \right\| \right\}. \qquad (П17)$$

Радиус множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ равен 1,41. Поскольку справедливо неравенство

$$r(\bar{\mathbf{X}}_{n+1}) = 1{,}41 < r(\mathbf{X}_n = \overset{\circ}{\mathbf{X}}) = 2{,}82,$$

то невозмущенная и неуправляемая система $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bar{G}(\mathbf{X}_n)$ асимптотически устойчива в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$; следовательно, неуправляемая возмущенная система (99) при определенной интенсивности возмущения $Z_n \in \mathbf{Z}$ имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, которое при подстановке в (99) $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$ определим из уравнения (100).

Воспользовавшись описанным в [6] итерационным методом определения множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ из (100) и приняв точность его определения $\pm 0{,}1$, получим, что $\overset{*}{\mathbf{X}}$ совпадает с (П17).

Обратимся теперь к семейству управляемых возмущенных систем (П1)–(П6). Управление u_n выбираем из решения задачи (97) в виде (98).

Уравнение эволюции семейства систем (П1)–(П6) при управлении (98) выражается уравнением (99), а уравнение (100) определяет инвариантное множество рассматриваемой системы. Повторив описанную выше процедуру определения инвариантного множества из уравнения (100), найдем его радиус, который по определению меньше радиуса инвариантного множества соответствующего семейства неуправляемых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков Б.В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // Докл. АН СССР. — 1946. — **51,** № 5. — С. 7–15.
2. Гноенский Л.С. Задача Булгакова о накоплении возмущений // Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение / Под ред. В.В. Александрова. — М.: Изд-во МГУ, 1993.
3. Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н. Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 74–81.
4. Kuntsevich V.M., Pshenichny B.N. Analysis of some classes of nonlinear discrete systems under bounded disturbances // Prepr. of the 4th Symp. IFAC Nonlinear Control Systems Design, 1998. — P. 324–329.
5. Кунцевич В.М., Поляк Б.Т. Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 6. — С. 6–21.
6. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6.
7. Кунцевич А.В., Кунцевич В.М. Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 51–59.
8. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
9. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 105–118.
10. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. — 1944. — **8,** № 3.
11. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 261 с.
12. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1978. — 287 с.

Поступила 31.03.2011