УДК 519.21

Н.Г. СЕМЕЙКО

СМЕШАННЫЙ ЭМПИРИЧЕСКИЙ ПУАССОНОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

Ключевые слова: *сферическая стохастическая геометрия, эмпирический маркированный точечный процесс, пуассоновский процесс сегментов, моментная мера первого порядка*.

ВВЕДЕНИЕ

Случайный процесс сегментов (СПС) на двумерной евклидовой сфере $\widetilde{S}^2$ является важным объектом исследования в сферической стохастической геометрии (СГ), математической морфологии и эффективно используется при моделировании и обработке результатов реальных экспериментов в ряде естественных наук: морфометрии микроструктур в биологии и медицине (вирусологии, цитологии, гистологии, гематологии), селенографии, сейсмологии, космологии, астрономии. Приведем примеры таких экспериментов.

Покрытию сферы $\widetilde{S}^2$ случайно расположенными полусферами или полусферическими сегментами было отдано предпочтение как модели нейтрализации вирусной частицы, атакуемой антителами. Считается, что к поверхности вирусной частицы (предположительно сферической) антитела прикрепляются случайно, а сами антитела можно рассматривать как маленькие полусферические сегменты [1, 2].

Особый интерес в цитологии вызывает количественная морфология (морфометрия) популяции пор ядерной оболочки (кариолеммы) рецепторного нейрона. Речь идет об описании популяции пор кариолеммы (псевдовыпуклой поверхности) нейрона с помощью количественных характеристик, позволяющих вносить существенный вклад в разработку прогноза и исследования функционального состояния клетки и ее ядра в норме, эксперименте и патологии. В первом приближении кариолемму можно аппроксимировать сферой $\widetilde{S}^2$ единичного радиуса, а поры СПС — на сфере $\widetilde{S}^2$ [3].

Интересное применение теории покрытий на сфере $\widetilde{S}^2$ совместно с моделированием на ЭВМ встречается при изучении лунных кратеров [4], их модели необходимы для получения информации относительно истории и структура Луны [5].

Исследование распределения звезд и галактик на небесной сфере проведено Нейманом и Скоттом [6].

Потребность в методах сферической СГ возникает и при решении вопросов, относящихся к охвату земной поверхности системой космической связи через искусственные спутники Земли, вращающиеся по случайным орбитам. К этой же категории относится проблема обзора небесной сферы случайно расположенными наблюдателями [7].

Согласно идеям Дэвидсона и Кендалла [8] во многих задачах СГ случайные процессы геометрических объектов нужным преобразованием переводятся в траектории маркированных точечных процессов (МТП) в соответствующих параметрических (фазовых) пространствах и исследуются как таковые.

В настоящий статье с помощью теории смешанного эмпирического МТП в параметрическом пространстве впервые построена математическая модель смешанного эмпирического пуассоновского случайного процесса полусферических сегментов на сфере $\widetilde{S}^2$. С помощью простого случайного упорядоченного точечного процесса с независимым маркированием (ТПНМ) найдена моментная мера первого порядка МТП параметров, которая позволила вычислить моментную меру первого порядка СПС для сферических множеств специального вида. Рассмотрены два примера, когда центры полусферических сегментов распределены на сферы $\widetilde{S}^2$ по равномерному закону и закону Фишера [9].

Результаты исследований дают возможность оценивать плотность и среднее число пор кариолеммы нейрона [3]. Эти характеристики могут использоваться для исследования строения клеточных органелл нейрона в онтогенезе, а также его реактивных изменений при экспериментальных воздействиях при патологии.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

Как известно, двумерная евклидова сфера

$$\widetilde{S}^2 = S^2 \setminus \{x(0,0,1), x(0,0,-1)\} = \{x(\varphi,\theta) : (\varphi,\theta) \in \Delta\}$$

единичного радиуса с выколотыми точками $T_1 = x(0,0,1)$ и $T_2 = x(0,0,-1)$ («северный» и «южный» полюсы), где (φ,θ) — сферические координаты, $\Delta = \{(\varphi,\theta) : 0 \le \varphi < \pi, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$, является предкомпактным метрическим пространством [10], если расстояние $r_{\widetilde{S}^2}(x_1, x_2)$ между двумя произвольными неантиполярными точками $x_1, x_2 \in \widetilde{S}^2$ можно определить следующим образом: $r_{\widetilde{S}^2}(x_1, x_2) = |\widehat{x_1 x_2}$ ($\widehat{x_1 x_2}$ — наименьшая дуга большой окружности сферы $\widetilde{S}^2$, проходящей через точки x_1 и x_2) [11]. Сферу $\widetilde{S}^2$ вместе с σ-алгеброй $\mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2}$ ее борелевских множеств можно наделить структурой ограниченного пространства (ОП) $(\widetilde{S}^2, \mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2}, B_{\widetilde{S}^2})$ [12], где совокупность $B_{\widetilde{S}^2}$ всех ограниченных множеств из $\widetilde{S}^2$ содержит все подмножества из $\widetilde{S}^2$.

Интервал $K = [0, A]$, где A значительно меньше $\pi (A << \pi)$, с выделенной σ-алгеброй борелевских множеств $\mathfrak{A}_K$ — компактное метрическое пространство, а совокупность B_K всех ограниченных множеств из K содержит все подмножества из интервала K.

Построим ограниченное пространство $(Y, \mathfrak{A}_Y, B_Y)$, где $Y = \widetilde{S}^2 \times K = \{(x(\varphi,\theta), a) : x(\varphi,\theta) \in \widetilde{S}^2,\ a \in K\}$ — декартово произведение основных пространств $\widetilde{S}^2$ и K, которое является предкомпактным метрическим пространством с метрикой $r_Y((x_1, a_1), (x_2, a_2)) = r_{\widetilde{S}^2}(x_1, x_2) + |a_1 - a_2|$, $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2} \otimes \mathfrak{A}_K$ — σ-алгебра измеримых множеств пространства Y (произведение σ-алгебр $\mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2}$ и $\mathfrak{A}_K$). Структура ограниченных множеств $B_Y = B_{\widetilde{S}^2} \Theta B_K$ пространства Y состоит из произвольных подмножеств из Y, а множество $\zeta_Y = \mathfrak{A}_Y \cap B_Y$ ограниченных измеримых множеств из Y совпадает с σ-алгеброй $\mathfrak{A}_Y$.

Напомним [11], что произвольное подмножество считается полусферическим, если оно содержится по крайней мере в одной полусфере сферы $\widetilde{S}^2$. Рассмотрим полусферический замкнутый сегмент Q углового (сферического) диаметра $a\,(0 \le a \le A)$ с центром в точке $u(\varphi,\theta)$: $Q(u(\varphi,\theta), a) = \{x : x \in \widetilde{S}^2, |\widehat{ux}| \le a/2\}$. Сегмент $Q(u(\varphi,\theta), a)$, ограниченный окружностью $\partial Q(u(\varphi,\theta), a)$, имеет площадь $s(Q) = 4\pi \sin^2(a/4)$ и периметр $p(\partial Q) = 2\pi \sin(a/2)$ [11].

На сфере $\widetilde{S}^2$ рассмотрим конечный упорядоченный СПС $\mathcal{A}$, каждая траектория $E_{\mathcal{A}}$ которого считается упорядоченным множеством, состоящим из n замкнутых полусферических сегментов:

$$E_{\mathcal{A}} = (Q_1(u_1(\varphi_1, \theta_1), a_1), \ldots, Q_i(u_i(\varphi_i, \theta_i), a_i), \ldots, Q_n(u_n(\varphi_n, \theta_n), a_n)),$$

расположенных случайным образом на $\widetilde{S}^2$, где $u_i(\varphi_i, \theta_i)$ — центры сегментов, (φ_i, θ_i) — их сферические координаты, a_i — угловые диаметры сегментов $(a_i \in K)$, n — число сегментов траектории $E_{\mathcal{A}}$, причем для всех i, j $(i \neq j;\ i, j = \overline{1, n})$ выполняется условие $u_i(\varphi_i, \theta_i) \neq u_j(\varphi_j, \theta_j)((\varphi_i, \theta_i) \neq$ $\neq (\varphi_j, \theta_j))$ и $a_i \neq a_j$. Сферические сегменты $Q_i(u_i(\varphi_i, \theta_i), a_i)$ траектории $E_{\mathcal{A}}$ однозначно определяются на $\widetilde{S}^2$ упорядоченными парами $[u_i(\varphi_i, \theta_i); a_i]$, которые образуют упорядоченное разреженное множество (РМ) $E^*_{\mathcal{A}} =$ $= ([u_1(\varphi_1, \theta_1); a_1], \ldots, [u_i(\varphi_i, \theta_i); a_i], \ldots, [u_n(\varphi_n, \theta_n); a_n])$ в ограниченном пространстве $(Y, \mathfrak{A}_Y, B_Y)$.

Множество $E^*_{\mathcal{A}}$ можно рассматривать как траекторию конечного упорядоченного строго простого случайного МТП $(\mathfrak{E}^*_{\mathcal{A}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}}, P^*_{\mathcal{A}})$ в ОП $(\widetilde{S}^2 \times K,\ \mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2} \otimes$ $\otimes \mathfrak{A}_K,\ B_{\widetilde{S}^2} \odot B_K)$ [13], где $\widetilde{S}^2$ — пространство положений, K — пространство марок, $u_i(\varphi_i, \theta_i)$ — точки положения, a_i — их марки. Очевидно, существует взаимно однозначное соответствие между сегментами $Q_i(u_i, a_i)$ траектории E_A и маркированными точками $[u_i; a_i]$ разреженного множества $E^*_{\mathcal{A}}$. Поэтому СПС $\mathcal{A}$ на сфере $\widetilde{S}^2$ будем рассматривать как конечный упорядоченный строго простой случайный МТП $(\mathfrak{E}^*_{\mathcal{A}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}}, P^*_{\mathcal{A}})$ в ОП $(\widetilde{S}^2 \times K, \mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2} \otimes \mathfrak{A}_K, B_{\widetilde{S}^2} \odot B_K) : \mathcal{A} =$ $= (\mathfrak{E}^*_{\mathcal{A}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}}, P^*_{\mathcal{A}})$, индуцированный сегментами на гиперцилиндре $\widetilde{S}^2 \times K$. Центры $u_i(\varphi_i, \theta_i)$ сегментов образуют упорядоченное простое РМ $E_{\widetilde{\mathcal{A}}} = pr_{\widetilde{S}^2} E^*_{\mathcal{A}} =$ $= (u_i(\varphi_1, \theta_1), \ldots, u_i(\varphi_i, \theta_i), \ldots, u_n(\varphi_n, \theta_n))$ в ОП $(\widetilde{S}^2, \mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2}, B_{\widetilde{S}^2})$, которое можно считать траекторией конечного упорядоченного простого случайного точечного процесса (ТП) точек положений $\widetilde{\mathcal{A}} = (\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathcal{A}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathcal{A}}}, P_{\widetilde{\mathcal{A}}}) = \mathrm{pr}_{\widetilde{S}^2}(\mathfrak{E}^*_{\mathcal{A}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}}, P^*_{\mathcal{A}})$ на сфере $\widetilde{S}^2$ [14].

Так как положение произвольного сегмента $Q_i(u_i(\varphi_i, \theta_i), a_i)$ на сфере $\widetilde{S}^2$ взаимно однозначно определяется совокупностью параметров (точкой) $[\varphi_i, \theta_i; a_i]$ пространства $Z = \Delta \times K$, то каждой траектории $E^*_{\mathcal{A}}$ случайного процесса $\mathcal{A}$ соответствует упорядоченное строго простое разреженное множество параметров

$$E^*_D = (z_1, \ldots, z_i, \ldots z_n) = ([\varphi_1, \theta_1; a_1], \ldots, [\varphi_i, \theta_i; a_i], \ldots, [\varphi_n, \theta_n; a_n])$$

в пространстве Z, причем справедливо и обратное утверждение, где $z_i = [\varphi_i, \theta_i; a_i]$, $(\varphi_i, \theta_i) = \delta_i$ — точки положения, a_i — их марки и $\forall\, i, j$ $(i \neq j;\ i_1 j = \overline{1, n})$ выполняются условия $(\varphi_i, \theta_i) = \delta_i \neq \delta_j = (\varphi_j, \theta_j)$ и $a_i \neq a_j$. Таким образом, СПС на сфере $\widetilde{S}^2$ соответствует конечный строго простой случайный упорядоченный МТП (УМТП) параметров $D = (\mathfrak{E}^*_D, \mathfrak{X}^*_D, P^*_D)$ с траекториями E^*_D в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, B_Z)$, где $\mathfrak{A}_Z = \mathfrak{A}_\Delta \otimes \mathfrak{A}_K$, $\mathfrak{A}_\Delta$ — σ-алгебра измеримых множеств пространства положений Δ, $B_Z = B_\Delta \, \Theta \, B_K$, B_Δ — структура ограниченных множеств (совокупность всех подмножеств) пространства Δ. Точки положения (φ_i, θ_i) МТП D образуют упорядоченное простое РМ $E_{\widetilde{D}} = pr_\Delta E_D^* = ((\varphi_1, \theta_1), \ldots, (\varphi_i, \theta_i), \ldots, (\varphi_n, \theta_n))$, которое можно считать траекторией конечного упорядоченного простого случайного ТП точек положений $\widetilde{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, P_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$ в ОП $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta, B_\Delta)$. ТП $(\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, P_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$ следует рассматривать как проекцию УМТП параметров $\mathfrak{D}$ на пространство положений Δ [14]: $(\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}) = \mathrm{pr}_\Delta (\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}, P^*_{\mathfrak{D}})$. Поэтому существует отображение (проектирование) $\mathfrak{R}$ измеримого пространства $(\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}})$ в измеримое пространство $(\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$ $(\mathfrak{R} : (\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}) \to (\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}))$ [14].

Теорема 1 [14]. Проектирование $\mathfrak{R}$ является измеримым отображением пространства $(\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}})$ в пространство $(\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что $\forall \; W_{\widetilde{\mathfrak{D}}} \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}$

$$P_{\widetilde{\mathfrak{D}}} \{W_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\} = P^*_{\mathfrak{D}} \{\mathfrak{R}^{-1}(W_{\widetilde{\mathfrak{D}}})\}. \tag{1}$$

Будем полагать, что каждая траектория $E^*_{\mathfrak{D}}$ процесса $\mathfrak{D}$ получена в результате действия следующего вероятностного механизма. Для его описания введем четыре случайные величины: $\delta = \delta(\omega) = (\varphi(\omega), \theta(\omega))$, $a = a(\omega)$ и $\nu = \nu(\omega)$, удовлетворяющие условиям:

1) непрерывные случайные величины $\varphi(\omega)$, $\theta(\omega)$, $a(\omega)$ и целочисленная неотрицательная случайная величина $\nu(\omega)$ определены на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$;

2) случайные величины $\delta(\omega)$, $a(\omega)$ и $\nu(\omega)$ принимают соответственно значения из выборочных вероятностных пространств $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta, P_\delta)$, $(K, \mathfrak{A}_K, P_a)$ и $(Z_+, \mathfrak{A}_{Z+}, P_\nu)$, где $\mathfrak{A}_{Z+}$ — σ-алгебра измеримых множеств пространства Z_+, вероятностные меры имеют вид

$$P_\delta(B_\Delta) = \mathbb{P}\{\omega : \delta(\omega) \in B_\Delta\} = \mu_1(B_\Delta) \;\; (B_\Delta \in \mathfrak{A}_\Delta),$$

$$P_a(B_K) = \mathbb{P}\{\omega : a(\omega) \in B_K\} = \mu_2(B_K) \;\; (B_K \in \mathfrak{A}_K),$$

$$P_\nu(B_{Z+}) = \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) \in B_{Z+}\} \;\; (B_{Z+} \in \mathfrak{A}_{Z+})$$

и распределения P_δ и P_a рассматриваются соответственно как абсолютно непрерывные относительно меры Лебега в пространствах $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta)$ и $(K, \mathfrak{A}_K)$ с плотностями $f_1(\varphi, \theta)$ и $f_2(u)$;

3) $\varphi(\omega)$, $\theta(\omega)$, $a(\omega)$ и $\nu(\omega)$ — независимые в совокупности случайные величины.

На σ-алгебре борелевских множеств $\mathfrak{A}_Z = \mathfrak{A}_\Delta \otimes \mathfrak{A}_K$ фазового пространства $Z = \Delta \times K$ введем произведение вероятностных мер $P_z = P_\delta \otimes P_a$. Тогда $(Z, \mathfrak{A}_Z, P_z)$ будем считать выборочным вероятностным пространством случайной величины $z(\omega) = [\delta(\omega); a(\omega)]$ с вероятностной мерой

$$P_z(B_\Delta \times B_K) = \mathbb{P}\{\omega : [\delta(\omega); a(\omega)] \in B_\Delta \times B_K\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\omega : \delta(\omega) \in B_\Delta, a(\omega) \in B_K\} = \{\mathbb{P}\{\omega : \delta(\omega) \in B_\Delta\} \, \mathbb{P}\{\omega : a(\omega) \in B_K\} =$$

$$= \mu_1(B_\Delta)\mu_2(B_K) = \mu(B_\Delta \times B_K) \;\; (B_\Delta \times B_K \in \mathfrak{A}_Z).$$

Пусть G_1 и G_2 — независимые случайные эксперименты, которые порождают выборочные вероятностные пространства $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta, P_\delta)$ и $(K, \mathfrak{A}_K, P_a)$; тогда $G = (G_1, G_2)$ — составной случайный эксперимент с выборочным вероятностным пространством $(Z, \mathfrak{A}_Z, P_z)$. Случайно (в соответствии с распределением вероятностей P_ν случайной величины $\nu(\omega)$) выбирается число $n \in Z_+$, а затем каждая траектория $E^*_{\mathfrak{D}} = ([\delta_1; a_1], \dots, [\delta_i; a_i], \dots, [\delta_n; a_n])$ объема n УМТП $\mathfrak{D}$ получается в результате n независимых повторений одного и того же случайного составного эксперимента $G = (G_1, G_2)$, заключающегося в случайном выборе без возвращения маркированной пары $Z_i = [\delta_i; a_i]$ $(i = \overline{1, n})$ из фазового пространства $Z = \Delta \times K$: точки положения $\delta_i = (\varphi_i, \theta_i)$ из пространства Δ (эксперимент G_1) и марки a_i из пространства K (эксперимент G_2). Тогда траекторию $E^*_{\mathfrak{D}}$ можно считать выборкой $(\delta_i \neq \delta_j,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j)$ конечного объема n, полученной простым случайным выбором без возвращения из генеральной совокупности $Z = \Delta \times K$ значений случайной величины $z(\omega) = [\delta(\omega); a(\omega)]$, имеющей совместное распределение $P_z = P_\delta \otimes P_a$. Таким образом, траекторию $E^*_{\mathfrak{D}}$ можно рассматривать как реализацию на выборочном измеримом пространстве $(Z, \mathfrak{A}_Z)$ конечной последовательности

$$E^*_{\mathfrak{D}} = E^*_{\mathfrak{D}}(\omega) = ([\delta_1(\omega); a_1(\omega)], \dots, [\delta_i(\omega); a_i(\omega)], \dots, [\delta_{\nu(\omega)}(\omega); a_{\nu(\omega)}(\omega)]) \quad (2)$$

случайного объема $\nu(\omega)$ независимых и одинаково распределенных случайных величин $z_i(\omega) = [\delta_i(\omega); a_i(\omega)]$ с распределением P_z, определенных на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Случайную величину ν можно предоставить следующим образом:

$$\nu = N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, Z) = \operatorname{card}[E^*_{\mathfrak{D}} \cap Z] = \sum_{z \in E^*_{\mathfrak{D}}} I_Z(z),$$

где $N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, Z)$ — случайная величина, определяющая число точек множества $E^*_{\mathfrak{D}}$ в пространстве Z, $I_Z(\cdot)$ — характеристическая функция пространства Z.

Определение 1. Случайный процесс $(\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}, P^*_{\mathfrak{D}})$ будем называть конечным строго простым смешанным эмпирическим УМТП параметром с независимым маркированием в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, B_Z)$ [13, 15].

Теорема 2 [16]. Если:

1) случайная величина $\nu = \nu(\omega)$ распределена по закону Пуассона с параметром λ

$$P_\nu\{\nu = k\} = P^*_{\mathfrak{D}}\{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, Z) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\lambda = M[N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, Z)] = M[\nu]$;

2) случайная величина ν независима от случайных величин (2);

3) $N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B_Z) = \sum_{i=1}^{\nu} I_{B_Z}([\delta_i; a_i])$ — случайна эмпирическая мера УМТП $\mathfrak{D}$ $(B_Z \in \mathfrak{A}_Z)$;

4) $\{B^j_Z = B^j_\Delta \times B^j_K : B^j_\Delta \in \mathfrak{A}_\Delta,\ B^j_K \in \mathfrak{A}_K,\ j = \overline{1, s},\ s \geq 2\}$ — произвольная конечная последовательность ограниченных измеримых попарно непересекающихся множеств пространства $Z : B^i_Z B^j_Z = \varnothing$ $(i, j = \overline{1, s},\ i \neq j)$,

то:

а) мера $N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_Z)$ $(j=\overline{1,s})$ эмпирического УМТП $(\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}, P^*_{\mathfrak{D}})$ распределена по закону Пуассона $\mathcal{P}(\lambda\mu(B^j_Z))$ с параметрической мерой $\lambda\mu(B^j_Z)$

$$P^*_{\mathfrak{D}}\{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_Z) = k_j\} = \frac{[\lambda\mu(B^j_Z)]^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda\mu(B^j_Z)), \tag{3}$$

где $\mu(B^j_Z) = P_z(B^j_Z)$, $k_j = 0, 1, 2, \ldots$;

б) меры $\{N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_Z), j=\overline{1,s}\}$ — независимые в совокупности случайные величины

$$P^*_{\mathfrak{D}}\{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_Z), j=\overline{1,s}\} = \prod_{j=1}^{s} P^*_{\mathfrak{D}}\{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_Z) = k_j\}. \tag{4}$$

Следствие 1. Процесс параметров $\mathfrak{D} = (\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}, P^*_{\mathfrak{D}})$ следует рассматривать как смешанный эмпирический конечный строго простой случайный УМТП с независимым маркированием в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, B_Z)$ [15], распределенный по общему закону Пуассона $\mathcal{P}(\lambda\mu(B_Z))$ с параметрической мерой $\lambda\mu(B_Z)$,

$$M[N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B_Z)] = \lambda\mu(B_Z) \ \ (B_Z \in \mathfrak{A}_Z). \tag{5}$$

Определение 2. СПС $\mathcal{A} = (\mathfrak{E}^*_{\mathcal{A}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}}, P^*_{\mathcal{A}})$, которому соответствует смешанный эмпирический УМТП параметров $\mathfrak{D} = (\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}, P^*_{\mathfrak{D}})$, распределенный по общему закону Пуассона в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, B_Z)$, будем называть смешанным эмпирическим пуассоновским случайным процессом сферических сегментов.

Замечание. В теореме 2 будем считать, что $B^j_Z = B^j_\Delta \times K \ \ \forall j = \overline{1,s}$ $(s \ge 2)$. Очевидно, $\mu(B^j_Z) = \mu_1(B^j_\Delta)\mu_2(K) = \mu_1(B^j_\Delta)$, так как $\mu_2(K) = 1$. Рассмотрим произвольное множество $W^* = \{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_\Delta \times K) = k_j\} \in \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}$ $(j=\overline{1,s})$. Тогда

$$P^*_{\mathfrak{D}}\{W^*\} = P^*_{\mathfrak{D}}\{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_\Delta \times K) = k_j\} = \frac{[\lambda\mu_1(B^j_\Delta)]^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda\mu_1(B^j_\Delta)). \tag{6}$$

Оператор проектирования $\mathfrak{R}$ является измеримым отображением из пространства $(\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}})$ в пространство $(\mathfrak{E}^*_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}^*_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$ (теорема 1), поэтому существует множество $W_{\widetilde{\mathfrak{D}}} \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}$ такое, что $W^* = \mathfrak{R}^{-1}(W_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$. Так как $\mathfrak{D}$ — строго простой УМТП, то $W_{\widetilde{\mathfrak{D}}} = \mathfrak{R}(W^*) = \{E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} : N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = k_j\}$, где $N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = \operatorname{card}[E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} \cap B^j_\Delta]$ — случайная эмпирическая мера УТП $\widetilde{\mathfrak{D}}$. С учетом формул (1), (6) имеем

$$P^*_{\mathfrak{D}}\{W^*\} = P^*_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{R}^{-1}(W_{\widetilde{\mathfrak{D}}})\} = P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\{W_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\} = P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\{E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} : N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = k_j\}, \tag{7}$$

$$P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\{E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} : N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = k_j\} = \frac{[\lambda\mu_1(B^j_\Delta)]^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda\mu_1(B^j_\Delta)). \tag{8}$$

Аналогично для произвольного множества $W^* = \{E^*_{\mathfrak{D}} : N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B^j_\Delta \times K) = k_j,\ j = \overline{1,s}\} \in \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}$, где $B^i_\Delta B^j_\Delta = \varnothing$ $(i, j = \overline{1,s},\ i \neq j)$, найдется такое множество $W_{\widetilde{\mathfrak{D}}} = \{E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} : N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = k_j,\ j = \overline{1,s}\} \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}$, что $W^* = \mathfrak{R}^{-1}(W_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$. Из формул (1), (4), (7) имеем

$$P^*_{\mathfrak{D}}\{W^*\} = P^*_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{R}^{-1}(W_{\widetilde{\mathfrak{D}}})\} = P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\{W_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\},$$

$$P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\{E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} : N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = k_j,\ j = \overline{1,s}\} = \prod_{j=1}^{s} P_{\widetilde{\mathfrak{D}}}\{E_{\widetilde{\mathfrak{D}}} : N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B^j_\Delta) = k_j\}.$$

Таким образом, УТП точек положений $\widetilde{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{E}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, P_{\widetilde{\mathfrak{D}}})$ есть смешанный эмпирический конечный простой случайный ТП Пуассона $\mathcal{P}(\lambda\mu_1(B_\Delta))$ с параметрической мерой $\lambda\mu_1(B_\Delta)$ в ОП $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta, B_\Delta)$: $M[N(E_{\widetilde{\mathfrak{D}}}, B_\Delta)] = \lambda\mu_1(B_\Delta) = \nu^{(1)}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}(B_\Delta)$ $(B_\Delta \in \mathfrak{A}_\Delta)$, где $\nu^{(1)}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}(\cdot)$ — моментная мера первого порядка ТП $\widetilde{\mathfrak{D}}$.

Пусть B_Z — произвольное измеримое множество из σ-алгебры $\mathfrak{A}_Z$ борелевских множеств пространства Z и $\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}(B_Z) = M[N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B_Z)]$ — моментная мера первого порядка МТП $\mathfrak{D}$:

$$\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}(B_Z) = \int_{E^*_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}} N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B_Z) P^*_{\mathfrak{D}}(dE^*_{\mathfrak{D}}).$$

Теорема 3. Если $\mathfrak{D} = (\mathfrak{E}^*_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathfrak{D}}, P^*_{\mathfrak{D}})$ — смешанный эмпирический конечный строго простой случайный УМТП параметров с независимым маркированием в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, B_Z)$, распределенный по закону Пуассона $\mathcal{P}(\lambda\mu(B_Z))$ с параметрической мерой $\lambda\mu(B_Z)$, то для произвольного измеримого множества $B_Z \in \mathfrak{A}_Z$ его моментная мера $\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}(B_Z)$ первого порядка имеет вид

$$\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}(B_Z) = \iiint_{B_Z} \lambda f_1(\varphi, \theta) f_2(a)\, d\varphi d\theta da = \int_{B_Z} \lambda_{\mathfrak{D}}(z) dz, \tag{9}$$

где $\lambda_{\mathfrak{D}}(z) = \lambda_{\mathfrak{D}}(\varphi, \theta, a) = \lambda f_1(\varphi, \theta) f_2(a)$ — функция интенсивности МТП $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Докажем формулу (9) для произвольного измеримого прямоугольника $B_Z = B_\Delta \times B_K \in \mathfrak{A}_Z$ $(B_\Delta \in \mathfrak{A}_\Delta,\ B_K \in \mathfrak{A}_K)$, используя условие 2. Так как известна параметрическая мера (5) МТП $\mathfrak{D}$, то

$$\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}(B_\Delta \times B_K) = M[N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, B_\Delta \times B_K)] = \lambda\mu(B_\Delta \times B_K) =$$

$$= \lambda\mu_1(B_\Delta)\mu_2(B_K) = \lambda \iint_{B_\Delta} f_1(\varphi, \theta) d\varphi d\theta \int_{B_K} f_2(a) da =$$

$$= \iiint_{B_\Delta \times B_K} \lambda f_1(\varphi, \theta)\, f_2(a)\, d\varphi d\theta da = \nu^{(1)}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}(B_\Delta)\mu_2(B_k). \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что мера $\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}$ является произведением мер $\nu^{(1)}_{\widetilde{\mathfrak{D}}}(B_\Delta)$ и $\mu_2(B_K)$: $\nu^{(1)}_{\mathfrak{D}} = \nu^{(1)}_{\widetilde{\mathfrak{D}}} \otimes \mu_2$. Так как формула (9) справедлива для произвольного измеримого прямоугольника из σ-алгебры $\mathfrak{A}_Z$, то в силу теоремы единственности произведения мер [17, с. 144] формула (9) справедлива и для произвольного измеримого множества $B_Z \in \mathfrak{A}_Z$.

Теорема доказана.

МОМЕНТНАЯ МЕРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО ЭМПИРИЧЕСКОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

Рассмотрим на сфере $\widetilde{S}^2$ сферический пояс $B(\ell)$, ограниченный малыми окружностями G_1 и G_2, (рис. 1). Сферическому поясу в пространстве Δ соответствует прямоугольник $C = \{(\varphi, \theta) : 0 \le \varphi < 2\pi,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$, причем углы $\theta_1 = \angle WOC_2$ и $\theta_2 = \angle WOC_1$ удовлетворяют условиям: $(-\pi + A)/2 < \theta_1 < \theta_2 < (\pi - A)/2$, $\theta_2 - \theta_1 = \ell$. Определим множество $Z(B(\ell)) \in Z$ следующим образом:

$$Z(B(\ell)) = \{z : z = [\varphi, \theta; a] \in Z,\ Q(u(\varphi, \theta), a) \cap B(\ell) \ne \varnothing\}, \tag{11}$$

где $Q(u(\varphi, \theta), a)$ — сферический сегмент, который соответствует точке $z = [\varphi, \theta; a]$ из параметрического пространства Z. Рассмотрим случайную величину $K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell)) =$ {число сегментов процесса $\mathcal{A}$, которые пересекаются со сферическим поясом $B(\ell)\} = \operatorname{card}[E^*_{\mathcal{A}} \cap B(\ell)]$. На основании определения (11) множества $Z(B(\ell))$

$$K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell)) = N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, Z(B(\ell))),$$

$$\xi^{(1)}(B(\ell)) = M[K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell))] = M[N^*(E^*_{\mathfrak{D}}, Z(B(\ell))] = \nu^{(1)}_{\mathfrak{D}}(Z(B(\ell)), \tag{12}$$

где $\xi^{(1)}(\cdot)$ — моментная мера первого порядка процесса сферических сегментов $\mathcal{A}$.

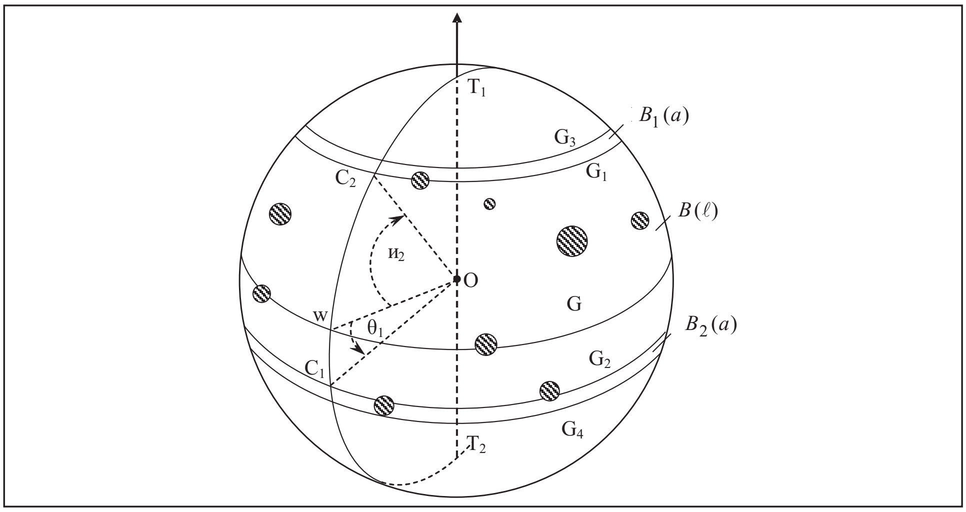

Рис. 1. Изображение пересечения сегментов $Q_1, \ldots, Q_n$ случайного процесса со сферическим поясом $B(\ell)$

Теорема 4. Если $\mathcal{A} = (\mathfrak{E}^*_{\mathcal{A}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}}, P^*_{\mathcal{A}})$ — смешанный эмпирический конечный упорядоченный случайный пуассоновский процесс сегментов на единичной сфере $\widetilde{S}^2$, то моментная мера первого порядка $\xi^{(1)}(B(\ell))$ процесса $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\xi^{(1)}(B(\ell)) = \lambda \left[P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi, \theta) \in B(\ell)\} + \int_K (P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi, \theta) \in B_1(a)\} + \right.$$

$$\left. + P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi, \theta) \in B_2(a)\}) f_2(a) da \right], \tag{13}$$

где $B_1(a)$ и $B_2(a)$ — непересекающиеся сферические пояса, ограниченные соответственно малыми окружностями G_1, G_3 и G_2, G_4 (см. рис. 1).

Доказательство. На основании соотношений (9) и (12) имеем

$$\xi^{(1)}(B(\ell)) = \iiint\limits_{Z(B(\ell))} \lambda f_1(\varphi,\theta)\, f_2(a) d\varphi d\theta da. \tag{14}$$

Для вычисления интеграла (14) представим множество $Z(B(\ell))$ в следующем виде:

$$Z(B(\ell)) = \bigcup_{a\in K}[C(a)\times\{a\}],$$

где $C(a)=\{(\varphi,\theta):(\varphi,\theta,a)\in Z(B(\ell)),\ Q(u(\varphi,\theta),a)\cap B(\ell)\neq\varnothing\}$ — сечение множества $Z(B(\ell))$ в точке a. Легко видеть, что $C(a)=C\cup C_0(a)$, где

$$C_0(a)=\{(\varphi,\theta):(\varphi,\theta)\,\overline{\in}\, C,\ Q(u(\varphi,\theta),a)\cap B(\ell)\neq\varnothing\}=C_1(a)\cup C_2(a),$$

$$C_1(a)=\{(\varphi,\theta):\varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in(\theta_2,\theta_2+a/2]\},$$

$$C_2(a)=\{(\varphi,\theta):\varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in[\theta_1-a/2,\theta_1)\}.$$

Множествам параметров $C_1(a)$ и $C_2(a)$ соответствуют на сфере два непересекающихся сферических пояса: $B_1(a)$ и $B_2(a)$, ограниченные соответственно малыми окружностями G_1, G_3 и G_2, G_4 (см. рис. 1). Используя представления множеств $Z(B(\ell))$ и $C_1(a)$, $C_2(a)$, имеем

$$\xi^{(1)}(B(\ell))=\lambda\int\limits_K f_2(a)\left[\iint\limits_C f_1(\varphi,\theta)d\varphi d\theta+\iint\limits_{C_1(a)} f_1(\varphi,\theta)d\varphi d\theta+\iint\limits_{C_2(a)} f_1(\varphi,\theta)d\varphi d\theta\right]da=$$

$$=\lambda\int\limits_K f_2(a)[P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B(\ell)\}+P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B_1(a)\}+P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B_2(a)\}]da=$$

$$=\lambda\Bigg[P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B(\ell)\}+$$

$$+\int\limits_K (P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B_1(a)\}+P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B_2(a)\})f_2(a)da\Bigg]. \tag{15}$$

Теорема доказана.

Пример 1. Если компоненты $\varphi(\omega)$ и $\theta(\omega)$ вектора $\delta(\omega)=(\varphi(\omega),\theta(\omega))$ — независимые непрерывные случайные величины, то случайная величина $\delta(\omega)$ равномерно распределена на сфере $\widetilde{S}^2$ с совместной плотностью вероятностей компонент $\varphi(\omega)$, $\theta(\omega)$ [9]:

$$f_1(\varphi,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\cos\theta}{4\pi}, & (\varphi,\theta)\in\Delta,\\ 0, & (\varphi,\theta)\notin\Delta.\end{cases}$$

В этом случае $\forall\, B_Z\in\mathfrak{A}_Z$ моментная мера первого порядка МТП параметров $\mathfrak{D}$ имеет вид $\nu_{\mathfrak{D}}^{(1)}(B_Z)=\iiint\limits_{B_Z}\dfrac{\lambda}{4\pi}\cos\theta f_2(a)d\varphi d\theta da$. Эта формула совпадает с выражением для моментной меры первого порядка

$$\nu_{\mathfrak{D}}^{(1)}(\bar{Z})=\iiint\limits_{\bar{Z}}\lambda_0\cos\theta f(a)d\varphi d\theta da\quad(\bar{Z}\in\mathfrak{A}_Z),$$

которую автор получил в работе [18] для неупорядоченного процесса сферических сегментов $\mathcal{A}$, где $\lambda_0 = \lambda / 4\pi$ — интенсивность МТП параметров $\mathfrak{D}$.

Так как $P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta) \in B(\ell)\} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_C \cos\theta d\varphi d\theta = \frac{s(B(\ell))}{4\pi}$,

$$P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta) \in B_1(a)\} = \frac{s(B_1(a))}{4\pi},\ P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta) \in B_2(a)\} = \frac{s(B_2(a))}{4\pi}$$

($s(B(\ell))$, $s(B_1(a))$, $s(B_2(a))$ — соответственно площади областей $B(\ell)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$), из формулы (15) имеем

$$\xi^{(1)}(B(\ell)) = \frac{\lambda}{4\pi}\left[s(B(\ell)) + \int\limits_K \{s(B_1(a)) + s(B_2(a))\} f_2(a) da \right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi}[s(B(\ell)) + \frac{1}{2\pi} p(B(\ell))\bar{p}(\partial Q) + \frac{1}{2\pi}\Omega_2 \bar{s}(Q)], \tag{16}$$

где $p(B(\ell)) = p(G_1) + p(G_2)$ — параметр сферического пояса $B(\ell)$; $\bar{p}(\partial Q) = = 2\pi \int\limits_K \sin(a/2) f_2(a) da$, $\bar{s}(Q) = 4\pi \int\limits_K \sin^2(a/4) f_2(a) da$ — средний периметр и средняя площадь сферических сегментов процесса $\mathcal{A}$, $\Omega_2 = (-1)^m \sqrt{4\pi^2 - p^2(G_1)} + + (-1)^n \sqrt{4\pi^2 - p^2(G_2)}$, при этом $m = 1$, $n = 2$, если $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$; $m = 1$, $n = 1$, если $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$; $m = 2$, $n = 1$, если $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$.

Следствие 2. Рассмотрим случайную величину $K(E^*_{\mathcal{A}}, G_1) = \operatorname{card}[E^*_{\mathcal{A}} \cap \cap G_1] = \{$число сегментов процесса $\mathcal{A}$, пересекающихся с малой окружностью G_1 сферы $\widetilde{S}^2\}$ (см. рис. 1). Если при $\ell \to 0$ область $B(\ell) \to G_1$ в метрике Хаусдорфа, то справедливы такие предельные соотношения: $s(B(\ell)) \to 0$, $p(G_2) \to p(G_1)$, $\Omega_2 \to 0$ и $K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell)) \to K(E^*_{\mathcal{A}}, G_1)$, $M[K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell))] \to M[K(E^*_{\mathcal{A}}, G_1)]$, при этом

$$\xi^{(1)}(G_1) = M[K(E^*_{\mathcal{A}}, G_1)] = \frac{\lambda}{4\pi^2} p(G_1)\bar{p}(\partial Q). \tag{17}$$

Следствие 3. Рассмотрим случайную величину $K(E^*_{\mathcal{A}}, G) = \operatorname{card}[E^*_{\mathcal{A}}, G] = \{$число сферических сегментов процесса $\mathcal{A}$ пересекающихся с большой окружностью G сферы $\widetilde{S}^2\}$ (см. рис. 1). Если при $\ell \to 0$ область $B(\ell) \to G$ в метрике Хаусдорфа, то справедливы следующие предельные соотношения: $s(B(\ell)) \to 0$, $p(G_1)(p(G_2)) \to \to p(G) = 2\pi$, $\Omega_1 \to 0$ и $K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell)) \to K(E^*_{\mathcal{A}}, G)$, $M[K(E^*_{\mathcal{A}}, B(\ell)] \to M[K(E^*_{\mathcal{A}}, G]$, при этом

$$\xi^{(1)}(G) = M[K(E^*_{\mathcal{A}}, G)] = \frac{\lambda}{2\pi}\bar{p}(\partial Q). \tag{18}$$

Пример 2. Для независимых непрерывных случайных величин $\varphi(\omega)$ и $\theta(\omega)$ будем полагать, что случайная величина $\delta(\omega) = (\varphi(\omega), \theta(\omega))$ распределена на сфере $\widetilde{S}^2$ по унимодальному закону Фишера с совместной однопараметрической плотностью распределения вероятностей

$$f_1(\varphi,\theta;k) = \begin{cases} \dfrac{k}{4\pi sh(k)} \exp(k \sin\theta)\cos\theta, & (\varphi,\theta) \in \Delta, \\ 0, & (\varphi,\theta) \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

где k — параметр концентрации массы распределения [9]. Следует отметить, что для больших значений параметра k масса распределения в основном концентрируется на малой части сферы $\widetilde{S}^2$ вокруг «северного» полюса; если $k=0$, то масса равномерно распределена на сфере $\widetilde{S}^2$.

В этом случае моментная мера первого порядка МТП параметров $\mathfrak{D}$ имеет вид

$$\nu^{(1)}(B_Z)=\frac{\lambda k}{4\pi sh(k)}\iiint\limits_{B_Z}\exp(k\sin\theta)\cos\theta f_2(a)d\varphi d\theta da.$$

Поскольку

$$P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B(\ell)\}=\frac{1}{2sh(k)}[e^{k\sin\theta_2}-e^{k\sin\theta_1}], \qquad (19)$$

$$P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B_1(a)\}=\frac{1}{2sh(k)}[e^{k\sin(\theta_2+a/2)}-e^{k\sin\theta_2}], \qquad (20)$$

$$P_{\widetilde{\mathcal{A}}}\{u(\varphi,\theta)\in B_2(a)\}=\frac{1}{2sh(k)}[e^{k\sin\theta_1}-e^{k\sin(\theta_1-a/2)}], \qquad (21)$$

то, подставляя (19)–(21) в формулу (15), имеем

$$\xi^{(1)}(B(\ell))=\frac{\lambda}{2sh(k)}\int\limits_K[e^{k\sin(\theta_2+a/2)}-e^{k\sin(\theta_2-a/2-\ell)}]f_2(a)da.$$

Следствие 4. Если при $\ell\to 0$ область $B(\ell)\to G_1$ в метрике Хаусдорфа, то справедливо предельное соотношение $\xi^{(1)}(B(\ell))\to\xi^{(1)}(G_1)$, где

$$\xi^{(1)}(G_1)=\frac{\lambda}{sh(k)}\int\limits_K e^{k\sin\theta_2\cos(a/2)}sh[k\cos(\theta_2)\sin(a/2)]f_2(a)da.$$

Следствие 5. Если в формуле (21) полагать, что $\theta_2=0$, то при $\ell\to 0$ область $B(\ell)\to G$ в метрике Хаусдорфа и $\xi^{(1)}(B(\ell))\to\xi^{(1)}(G)$, где

$$\xi^{(1)}(G)=\frac{\lambda}{sh(k)}\int\limits_K sh[k\sin(a/2)]f_2(a)da.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе продолжаются исследования австралийского математика Р.Е. Майлса (R.E. Miles) [11] в области СГ. Если Р.Е. Майлс в основном использовал методы интегральной геометрии, то в данной работе предложен новый подход с использованием теории смешанных эмпирических МТП. Аппарат смешанных эмпирических МТП более универсален и позволяет исследовать задачи СГ, у которых геометрические структуры случайной природы не обязательно расположены равномерно в пространствах R^2, R^3 или S^2.

Математические модели сферической СГ — еще один шаг вперед для получения эффективных средств обработки экспериментальной информации на кариолемме ядра клетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. — М.: Наука, 1972. — 192 с.
2. Moran P.A.P., Fazekas S. Random circles on a sphere // Biometrics. — 1962. — **49**, N 3, 4. — P. 389–396.
3. Семейко Н.Г., Петунин Ю.И., Яценко В.П. Исследование морфометрических характеристик поровых комплексов ядерной оболочки сенсорного нейрона методами сферической стохастической геометрии // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — **42**, № 6. — С. 175–182.
4. Cross C.A., Fisher D.L. The computer simulation of lunar crates // Month. Not. Roy. Austral. Soc. — 1968. — **139**. — P. 261–272.
5. Marcus A.H. Some point process models of lunar and planetary surfaces // Stochastic point processes: statistical analysis, theory and applications / Ed. P.A.W. Lewis. — New York, 1972. — P. 682–699.
6. Neyman J., Scott R.L. Statistical approach to problems of cosmology // J. Roy. Stat. Soc. Ser. B. — 1958. — **20**. — P. 1–43.
7. Gilbert E.N. The probability of covering a sphere with N circular caps // Biometrics. — 1965. — **52**, N 3, 4. — P. 323–330.
8. Harding E.P., Kendall D.G. Stochastic geometry. — New York: Wiley, 1974. — 400 p.
9. Mardia K.V. Statistics of directional data. — London: Academ. Press, 1972. — 248 p.
10. Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Физматгаз, 1958. — 324 с.
11. Miles R.E. Random points, set and tessellations on the surface of a sphere // Sankhya. Ser. A. — 1971. — **33**, N 2. — P. 145–174.
12. Ripley B.D. Locally finite random sets: Foundations for point process theory // Ann. Prob. — 1976. — **4**, N 6. — P. 983–994.
13. Петунін Ю.І., Семейко М.Г. Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах. 1 // Теорія ймовірностей. та мат. статистика. — 2006. — Вип. 74. — С. 99–109.
14. Петунин Ю.И., Семейко Н.Г. Случайный процесс сегментов на двумерной евклидовой сфере. 1 // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1988. — Вып. 39. — С. 107–113.
15. Петунін Ю.І., Семейко М.Г. Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах. 2 // Теорія ймовірностей. та мат. статистика. — 2006. — Вип. 75. — С. 121–126.
16. Семейко М.Г. Змішані емпіричні випадкові маркіровані точкові процеси в компактних метричних просторах // Там же. — 2009.
17. Лоэв М. Теория вероятностей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 719 с.
18. Петунин Ю.И., Семейко Н.Г. Случайный процесс сегментов на двумерной евклидовой сфере. 2. // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1988. — Вып. 41. — С. 88–96.

Поступила 04.02.2010