УДК 517.9

П.О. КАСЬЯНОВ

МНОГОЗНАЧНАЯ ДИНАМИКА РЕШЕНИЙ АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ПСЕВДОМОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Ключевые слова: *дифференциально-операторное включение, глобальный аттрактор, траекторный аттрактор, псевдомонотонное отображение.*

ВВЕДЕНИЕ

Качественным исследованием нелинейных математических моделей эволюционных процессов и полей разной природы, в частности вопросами динамики решений нестационарных задач, занимаются многие коллективы математиков, механиков, геофизиков (в основном теоретиков), инженеров. Далеко не полный перечень результатов в этом направлении содержится в работах [1–17]. Последние данные, касающиеся изучения многозначной, в общем случае, динамики решений математических моделей с нелинейными, негладкими, разрывными, многозначными, немонотонными функциями взаимодействия основаны на теории глобальных и траекторных аттракторов для м-полупотоков решений [1, 5–7]. При этом для решений рассматриваемой эволюционной задачи должны выполняться свойства, связанные с диссипативностью системы и замкнутостью (в некотором смысле) разрешающего оператора [1, 5–8, 11, 13, 14]. Отметим, что проверка таких свойств решений для каждого включения осуществляется отдельно на основе линейности или монотонности главной части дифференциального оператора, фигурирующего в задаче [1, 6, 11, 13, 14]. В большинстве случаев рассматривают квазилинейные уравнения.

В то же время энергетические расширения и операторы Немыцкого для дифференциальных операторов, возникающих в обобщенных постановках различных задач математической физики, задач на многообразии с краем и без края, задач с запаздыванием, стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, задач с вырождением, как правило, обладают (при соответствующем выборе фазового пространства) общими свойствами, связанными условиями роста (часто не более чем полиномиального), знаковыми условиями, псевдомонотонностью [2–4, 12, 15, 16]. При таких ограничениях на определяющие параметры задачи в общем случае удается доказать только существование слабых решений дифференциально-операторного включения, причем не всегда конструктивно [2–4, 12, 15, 16]. Таким образом, проблема существования и исследования структуры траекторных и глобальных аттракторов для слабых решений эволюционных включений в бесконечномерных пространствах с многозначными функциями взаимодействия псевдомонотонного типа является актуальной задачей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для эволюционной тройки $(V;H;V^*)$ многозначного (в общем случае) отображения $A:V\rightrightarrows V^*$ и внешней силы $f\in H$ рассматривается задача исследования динамики при $t\to+\infty$ в фазовом пространстве H всех слабых решений нелинейного автономного дифференциально-операторного включения

$$y'(t)+A(y(t))\ni f, \qquad (1)$$

заданных при $t \geq 0$, где параметры задачи удовлетворяют условиям:

1) $p \geq 2$, $f \in H$;

2) вложение V в H — компактное;

3) $\exists\, c > 0: \ \forall\, u \in V, \ \forall\, d \in A(u) \quad \|d\|_{V^*} \leq c(1 + \|u\|_V^{p-1})$;

4) $\exists\, \alpha, \beta > 0: \ \forall\, u \in V, \ \forall\, d \in A(u) \quad \langle d, u \rangle_V \geq \alpha \|u\|_V^p - \beta$;

5) $A: V \rightrightarrows V^*$ — (обобщенно) псевдомонотонный [16], т.е.

• для любого $u \in V$ множество $A(u)$ является непустым, выпуклым и слабо компактным в V^*;

• из того, что $u_n \to u$ слабо в V, $d_n \in A(u_n)$ $\forall\, n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \langle d_n, u_n - u \rangle_V \leq 0$, следует, что $\forall\, \omega \in V \ \exists\, d(\omega) \in A(u)$ такое, что

$$\underline{\lim_{n \to +\infty}} \langle d_n, u_n - \omega \rangle_V \geq \langle d(\omega), u - \omega \rangle_V .$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V^* \times V \to \mathbb{R}$ — спаривание в $V^* \times V$, совпадающее на $H \times V$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ в гильбертовом пространстве H.

Замечание 1. Из условий 3–5 следует, что отображение A полунепрерывно сверху как такое, что действует из произвольного конечномерного подпространства V в V^*, снабженного слабой топологией.

Под слабым решением эволюционного включения (1) на отрезке $[\tau, T]$ понимаем элемент u пространства $L_p(\tau, T; V)$ такой, что для некоторого $d \in L_q(\tau, T; V^*)$

$$d(t) \in A(y(t)) \text{ для почти всех (п.в.) } t \in (\tau, T), \tag{2}$$

$$-\int_\tau^T (\xi'(t), u(t))dt + \int_\tau^T \langle d(t), \xi(t) \rangle_V \, dt = \int_\tau^T (f, \xi(t))dt \quad \forall\, \xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V), \tag{3}$$

где $q > 1: \ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для фиксированных $\tau < T$ рассмотрим

$$X_{\tau,T} = L_p(\tau, T; V), \ X^*_{\tau,T} = L_q(\tau, T; V^*), \ W_{\tau,T} = \{u \in X_{\tau,T} \mid u' \in X^*_{\tau,T}\},$$

$$\mathcal{A}_{\tau,T} : X_{\tau,T} \rightrightarrows X^*_{\tau,T}, \ \mathcal{A}_{\tau,T}(y) = \{d \in X^*_{\tau,T} \mid d(t) \in A(y(t)) \text{ для п.в. } t \in (\tau, T)\},$$

$$f_{\tau,T} \in X^*_{\tau,T}, \quad f_{\tau,T}(t) = f \text{ для п.в. } t \in (\tau, T),$$

где u' — производная элемента $u \in X_{\tau,T}$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}([\tau, T]; V^*)$ [2; определение IV.1.10]. Отметим, что пространство $W_{\tau,T}$ является рефлексивным банаховым пространством с нормой графика производной [15; утверждение 4.2.1]:

$$\|u\|_{W_{\tau,T}} = \|u\|_{X_{\tau,T}} + \|u'\|_{X^*_{\tau,T}}, \quad u \in W_{\tau,T}. \tag{4}$$

Из работы [3; Lemma 7] и условий 1–5 следует, что $\mathcal{A}_{\tau,T} : X_{\tau,T} \rightrightarrows X^*_{\tau,T}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\exists C_1>0 : ||d||_{X^*_{\tau,T}} \le C_1(1+||y||^{p-1}_{X_{\tau,T}})$ $\forall y\in X_{\tau,T}$, $\forall d\in \mathcal{A}_{\tau,T}(y)$;

б) $\exists C_2, C_3>0$: $\langle d, y\rangle_{X_{\tau,T}} \ge C_2||y||^p_{X_{\tau,T}} - C_3$ $\forall y\in X_{\tau,T}$, $\forall d\in\mathcal{A}_{\tau,T}(y)$;

в) $\mathcal{A}_{\tau,T} : X_{\tau,T} \rightrightarrows X^*_{\tau,T}$ (обобщенно) псевдомонотонный на $W_{\tau,T}$, т.е.

• для любого $y\in X_{\tau,T}$ множество $\mathcal{A}_{\tau,T}(y)$ является непустым, выпуклым и слабо компактным в $X^*_{\tau,T}$;

• $\mathcal{A}_{\tau,T}$ полунепрерывно сверху как такое, что действует из произвольного конечномерного подпространства $X_{\tau,T}$ в $X^*_{\tau,T}$, снабженного слабой топологией;

• из того, что $y_n\to y$ слабо в $W_{\tau,T}$, $d_n\in\mathcal{A}_{\tau,T}(y_n)$ $\forall n\ge 1$, $d_n\to d$ слабо в $X^*_{\tau,T}$,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_{X_{\tau,T}} \le 0,$$

следует $d\in\mathcal{A}_{\tau,T}(y)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle d_n, y_n\rangle_{X_{\tau,T}} = \langle d, y\rangle_{X_{\tau,T}}$. Отметим, что условие измеримости на A не накладывается.

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_{\tau,T}} : X^*_{\tau,T}\times X_{\tau,T}\to\mathbb{R}$ — спаривание в $X^*_{\tau,T}\times X_{\tau,T}$, совпадающее на $L_2(\tau,T;H)\times X_{\tau,T}$ со скалярным произведением в $L_2(\tau,T;H)$, т.е.

$$\forall u\in L_2(\tau,T;H),\quad \forall v\in X_{\tau,T}\quad \langle u,v\rangle_{X_{\tau,T}} = \int_\tau^T (u(t),v(t))dt.$$

Заметим также [2; теорема IV.1.17], что вложение $W_{\tau,T}\subset C([\tau,T];H)$ непрерывно, плотно и

$$\forall u,v\in W_{\tau,T}\quad (u(T),v(T))-(u(\tau),v(\tau)) = \int_\tau^T [\langle u'(t),v(t)\rangle_V + \langle v'(t),u(t)\rangle_V]dt. \quad (5)$$

Из определения производной в смысле $\mathcal{D}([\tau,T];V^*)$ и равенства (3) непосредственно следует утверждение.

Лемма 1. Каждое слабое решение $u\in X_{\tau,T}$ дифференциально-операторного включения (1) на отрезке $[\tau,T]$ принадлежит пространству $W_{\tau,T}$, кроме того,

$$u'+\mathcal{A}_{\tau,T}(u)\ni f_{\tau,T}. \quad (6)$$

Наоборот, если $u\in W_{\tau,T}$ удовлетворяет (6), то u является слабым решением (1) на $[\tau,T]$.

Существование слабого решения задачи Коши (1) с начальным условием

$$y(\tau)=y_\tau \quad (7)$$

на отрезке $[\tau,T]$ для произвольного $y_\tau\in H$ гарантируют условие 1, условия а)–в), а также результаты работы [15, гл. 5]. Таким образом, имеет место следующий результат.

Лемма 2. Для любых $\tau<T$, $y_\tau\in H$ задача Коши (1), (7) имеет слабое решение на отрезке $[\tau,T]$. Кроме того, каждое слабое решение $u\in X_{\tau,T}$ задачи Коши (1), (7) на отрезке $[\tau,T]$ принадлежит $W_{\tau,T}\subset C([\tau,T];H)$ и удовлетворяет (6).

Замечание 2. Поскольку $W_{\tau,T}\subset C([\tau,T];H)$, для каждого слабого решения задачи (1) в силу леммы 1 начальное условие (7) имеет смысл.

Для фиксированных $\tau < T$ введем обозначение: $\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau) = \{u(\cdot) \mid u$ — слабое решение (1) на $[\tau, T]$, $u(\tau) = u_\tau\}$, $u_\tau \in H$.

Из леммы 2 следует, что $\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau) \neq \varnothing$ и $\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau) \subset W_{\tau,T}$ $\forall \tau < T, u_\tau \in H$.

Докажем, что трансляция и конкатенация слабых решений являются также слабыми решениями.

Лемма 3. Если $\tau < T$, $u_\tau \in H$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau)$, то $v(\cdot) = u(\cdot + s) \in \in \mathcal{D}_{\tau-s,T-s}(u_\tau)$ $\forall s$. Если $\tau < t < T$, $u_\tau \in H$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,t}(u_\tau)$ и $v(\cdot) \in \mathcal{D}_{t,T}(u(t))$, то

$$z(s) = \begin{cases} u(s), & s \in [\tau, t], \\ v(s), & s \in [t, T], \end{cases}$$

принадлежит $\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau)$.

Доказательство. Доказательство следует из определения решения (3), леммы 1 и того, что $z \in W_{\tau,T}$, как только $v \in W_{\tau,t}$, $u \in W_{t,T}$ и $v(t) = u(t)$. При доказательстве последнего можно использовать определение производной в смысле $\mathcal{D}([\tau,T]; V^*)$, формулу (5) и лемму IV.1.12 из [2] о плотности $C^1([t_1, t_2]; V)$ в W_{t_1,t_2} для $t_1 < t_2$.

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Доказательство существования компактного глобального и траекторного аттрактора эволюционных включений и, в частности, включений типа (1) опирается на свойства совокупности слабых решений задачи (1), связанных с абсорбируемостью порожденного м-полупотока решений и его асимптотической компактностью (см. работы [5–8] и ссылки к ним). Следующие лемма об априорных оценках решений и теорема о зависимости решений от начальных данных играют ключевую роль в исследовании динамики всех слабых решений задачи (1) при $t \to +\infty$.

Лемма 4. Существуют $c_4, c_5, c_6, c_7 > 0$ такие, что для любого конечного интервала времени $[\tau, T]$ каждое слабое решение $u(\cdot)$ задачи (1) на $[\tau, T]$ удовлетворяет оценкам: $\forall t \geq s$, $t, s \in [\tau, T]$,

$$\|u(t)\|_H^2 + c_4 \int_s^t \|u(\xi)\|_V^p d\xi \leq \|u(s)\|_H^2 + c_5 (1 + \|f\|_H^2)(t - s), \tag{8}$$

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u(s)\|_H^2 e^{-c_6(t-s)} + c_7 (1 + \|f\|_H^2). \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство стандартным образом следует из условий на параметры задачи (1) и леммы Гроноулла–Беллмана.

Теорема 1. Пусть $\tau < T$, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ — произвольная последовательность слабых решений (1) на $[\tau, T]$ такая, что $u_n(\tau) \to \eta$ слабо в H. Тогда существуют $\{u_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{u_n\}_{n\geq 1}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\eta)$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0, T - \tau) \quad \max_{t \in [\tau+\varepsilon, T]} \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_H \to 0, \quad k \to +\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Предположим, что выполняются условия теоремы 1. Тогда вследствие леммы 1 для любого $n \geq 1$ имеем $u_n(\cdot) \in W_{\tau,T} \subset C([\tau, T]; H)$. Кроме того, из леммы 4, условия 4 и соотношения (6) получим

$$\forall n \geq 1 \quad \exists d_n \in \mathcal{A}_{\tau,T}(u_n) : u_n'(t) + d_n(t) = f \text{ для п.в. } t \in (\tau, T), \tag{11}$$

$$\exists C > 0 : \ \forall n \geq 1 \quad \|u_n\|_{X_{\tau,T}} + \|u_n'\|_{X_{\tau,T}^*} + \|u_n\|_{C([\tau,T];H)} + \|d_n\|_{X_{\tau,T}^*} \leq C. \tag{12}$$

Отсюда, из непрерывности вложения $W_{\tau,T} \subset C([\tau,T];H)$ [2; теорема IV.1.17], условий 2 и а), компактности вложения $W_{\tau,T} \subset L_2(\tau,T;H)$ [4; теорема 1.5.1], а также рефлексивности пространства $W_{\tau,T}$ с нормой графика производной (4) получим, что с точностью к подпоследовательности $\{u_{n_k}, d_{n_k}\}_{k\ge1} \subset \{u_n, d_n\}_{n\ge1}$ для некоторых $u \in W_{\tau,T}$, $d \in X^*_{\tau,T}$ имеют место такие сходимости:

$$u_{n_k} \to u \text{ слабо в } X_{\tau,T},\; u'_{n_k} \to u' \text{ слабо в } X^*_{\tau,T},\; d_{n_k} \to d \text{ слабо в } X^*_{\tau,T},$$

$$u_{n_k} \to u \text{ слабо в } C([\tau,T];H),\; u_{n_k} \to u \text{ в } L_2(\tau,T;H),$$

$$u_{n_k}(t) \to u(t) \text{ в } H \text{ для п.в. } t \in (\tau,T), \quad k \to +\infty. \tag{13}$$

Завершим доказательство теоремы в несколько шагов.

Шаг 1. Докажем, что

$$\forall\, t \in (\tau,T] \quad u_{n_k}(t) \to u(t) \text{ в } H, k \to +\infty. \tag{14}$$

Из леммы 4 следует, что $\forall\, k \ge 1$, $\forall\, t \ge s,\ t,s \in [\tau,T]$,

$$||u_{n_k}(t)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)t \le ||u_{n_k}(s)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)s. \tag{15}$$

Из (13) получим, что для п.в. $s \in (\tau,T)$, для п.в. $t \in (s,T)$

$$||u(t)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)t \le ||u(s)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)s.$$

Поскольку $u \in W_{\tau,T} \subset C([\tau,T];H)$, $\forall\, t \ge s,\ t,s \in [\tau,T]$, имеем

$$||u(t)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)t \le ||u(s)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)s. \tag{16}$$

Поэтому функции

$$J_k(t) = ||u_{n_k}(t)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)t, \tag{17}$$

$$J(t) = ||u(t)||_H^2 - c_5(1+||f||_H^2)t \tag{18}$$

непрерывные и монотонно невозрастающие на $[\tau,T]$.

Поскольку $u_{n_k}(t) \to u(t)$ в H для п.в. $t \in (\tau,T)$, имеем

$$J_k(t) \to J(t), \quad k \to +\infty \text{ для п.в. } t \in (\tau,T). \tag{19}$$

Покажем, что

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\, J_k(t) \le J(t) \quad \forall\, t \in (\tau,T]. \tag{20}$$

Из (19) следует, что $\forall\, t \in (\tau,T]$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{t} \in (\tau,t): |J(\bar{t}) - J(t)| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k(\bar{t}) = J(\bar{t})$. Поэтому $\forall\, k \ge 1$ имеем

$$J_k(t) - J(t) \le J_k(\bar{t}) - J(t) \le |J_k(\bar{t}) - J(\bar{t})| + |J(\bar{t}) - J(t)| < \varepsilon + |J_k(\bar{t}) - J(\bar{t})|.$$

Таким образом,

$$\forall\, t \in (\tau,T],\ \forall\, \varepsilon > 0 \ \overline{\lim_{k\to+\infty}}\, J_k(t) \le J(t) + \varepsilon,$$

откуда следует (20) и, в частности, неравенство

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\, ||u_{n_k}(t)||_H^2 \le ||u(t)||_H^2 \quad \forall\, t \in (\tau,T].$$

Из слабой сходимости $u_{n_k}(t)$ к $u(t)$ в H при $k \to +\infty$ $\forall\, t \in [\tau,T]$, неравенства (20) и работы [2; теорема I.5.12] получим (14).

Шаг 2. Покажем, что

$$u' = f_{\tau,T} - d. \tag{21}$$

В силу леммы 1 для любых $k \geq 1$, $\xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V)$ справедливо соотношение

$$-\langle \xi', u_{n_k} \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle d_{n_k}, \xi \rangle_{X_{\tau,T}} = \langle f_{\tau,T}, \xi \rangle. \tag{22}$$

Переходя в (22) к пределу при $k \to +\infty$, получаем

$$\forall\, \xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V) - \langle \xi', u \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle d, \xi \rangle_{X_{\tau,T}} = \langle f_{\tau,T}, \xi \rangle .$$

Таким образом, используя свойства интеграла Бохнера, $\forall\, \varphi \in C_0^\infty([\tau, T])$, $\forall\, h \in V$ имеем

$$-\left(\int_\tau^T u(s)\varphi'(s)ds, h \right) = -\int_\tau^T (h, u(s))_H\, \varphi'(s)ds =$$

$$= \int_\tau^T \langle f - d(s), h \rangle_V\, \varphi(s)ds = \left\langle \int_\tau^T [f_{\tau,T}(s) - d(s)]\varphi(s)ds, h \right\rangle_V .$$

Из определения производной элемента $u \in X_{\tau,T}$ в смысле $\mathcal{D}^*([\tau, T]; V^*)$ непосредственно вытекает соотношение (21).

Шаг 3. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, T - \tau)$ и покажем, что

$$d(t) \in A(u(t)) \text{ для п.в. } t \in (\tau + \varepsilon, T), \tag{23}$$

используя псевдомонотонность $\mathcal{A}_{\tau+\varepsilon,T}$ на $W_{\tau+\varepsilon,T}$.

Рассмотрим ограничения $u_{n_k}(\cdot)$, $d_{n_k}(\cdot)$, $u(\cdot)$, $d(\cdot)$ на отрезок $[\tau + \varepsilon, T]$. Для простоты изложения обозначим ограничения теми же символами: $u_{n_k}(\cdot)$, $d_{n_k}(\cdot)$, $u(\cdot)$ и $d(\cdot)$ соответственно. Из сходимостей (13), (14) имеем

$$u_{n_k} \to u \text{ слабо в } W_{\tau+\varepsilon,T},$$

$$d_{n_k} \to d \text{ слабо в } X^*_{\tau+\varepsilon,T},$$

$$\forall\, t \in [\tau + \varepsilon, T] \quad u_{n_k}(t) \to u(t) \text{ в } H,\ k \to +\infty . \tag{24}$$

Покажем, что

$$\lim_{k \to +\infty} \langle d_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle_{X_{\tau+\varepsilon,T}} = 0 . \tag{25}$$

Действительно,

$$\forall\, k \geq 1 \int_{\tau+\varepsilon}^T \langle d_{n_k}(s), u_{n_k}(s) - u(s) \rangle_V\, ds =$$

$$= \int_{\tau+\varepsilon}^T (f, u_{n_k}(s) - u(s))ds - \int_{\tau+\varepsilon}^T \langle u'_{n_k}, (s), u_{n_k}(s) - u(s) \rangle_V\, ds . \tag{26}$$

Из (24) следует

$$\int_{\tau+\varepsilon}^T (f, u_{n_k}(s) - u(s))ds \to 0,\ \ k \to +\infty . \tag{27}$$

Из (5) и (24) получим

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle u'_{n_k}(s), u(s)-u_{n_k}(s)\rangle_V \, ds =$$

$$= \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle u'_{n_k}(s), u(s)\rangle_V - \frac{1}{2}(\|u_{n_k}(T)\|_H^2 - \|u_{n_k}(\tau+\varepsilon)\|_H^2) \to$$

$$\to \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle u'(s), u(s)\rangle_V - \frac{1}{2}(\|u(\tau)\|_H^2 - \|u(\tau+\varepsilon)\|_H^2) = 0, \ \ k\to+\infty . \tag{28}$$

Переходя к пределу в (26) при $k \to +\infty$, из (27) и (28) получим (25).

Таким образом, из (11), (24), (25) и псевдомонотонности $\mathcal{A}_{\tau+\varepsilon,T}$ на $W_{\tau+\varepsilon,T}$ получим (23).

Шаг 4. Из произвольности $\varepsilon \in (0, T-\tau)$, сходимостей (13), соотношения (23) и определения $\mathcal{A}_{\tau,T}$ следует $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\eta)$.

Шаг 5. Докажем (10) от противного. Предположим, что $\exists\, \varepsilon>0$, $\exists\, L>0$, $\exists\, \{u_{k_j}\}_{j\ge1} \subset \{u_{n_k}\}_{k\ge1}$:

$$\forall\, j\ge1 \ \ \max_{t\in[\tau+\varepsilon,T]} \|u_{k_j}(t)-u(t)\|_H = \|u_{k_j}(t_j)-u(t_j)\|_H \ge L .$$

Не теряя общности, можем считать, что $t_j \to t_0 \in [\tau+\varepsilon, T]$, $j\to+\infty$. Следовательно, в силу непрерывности $u\colon [\tau,T]\to H$

$$\underline{\lim}_{j\to+\infty} \|u_{k_j}(t_j)-u(t_0)\|_H \ge L . \tag{29}$$

В то же время покажем, что

$$u_{k_j}(t_j) \to u(t_0) \ \text{в} \ H, \ j\to+\infty . \tag{30}$$

Шаг 5.1. Сначала докажем, что

$$u_{k_j}(t_j) \to u(t_0) \ \text{слабо в} \ H, \ j\to+\infty. \tag{31}$$

Для фиксированного $h\in V$ из (13) следует, что последовательность действительных функций $(u_{n_k}(\cdot), h)\colon [\tau,T]\to\mathbb{R}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Принимая во внимание неравенство (12) и плотность вложения $V\subset H$, получаем, что $u_{n_k}(t)\to u(t)$ слабо в H равномерно на $[\tau,T]$, $k\to+\infty$, откуда следует (31).

Шаг 5.2. Докажем, что

$$\overline{\lim}_{j\to+\infty} \|u_{k_j}(t_j)\|_H \le \|u(t_0)\|_H . \tag{32}$$

Рассмотрим непрерывные, монотонно невозрастающие функции J_{k_j}, J, $j\ge1$, определенные в (17), (18). Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1>0$. Из (19) и непрерывности J следует, что

$$\exists\, \bar t \in (\tau, t_0)\colon \lim_{j\to+\infty} J_{k_j}(\bar t) = J(\bar t), \quad |J(\bar t)-J(t_0)| < \varepsilon_1.$$

Тогда для достаточно больших $j\ge1$

$$J_{k_j}(t_j)-J(t_0) \le |J_{k_j}(\bar t)-J(\bar t)| + |J(\bar t)-J(t_0)| \le |J_{k_j}(\bar t)-J(\bar t)| + \varepsilon_1.$$

Следовательно, $\overline{\lim}_{j\to+\infty} J_{k_j}(t_j) \le J(t_0)+\varepsilon_1$. Из произвольности $\varepsilon_1>0$ и того, что $t_j\to t_0$, $j\to+\infty$, получим (32).

Шаг 5.3. Из (31), (32) и работы [2; теорема I.5.12] непосредственно следует (30).

Шаг 5.4. Для завершения доказательства теоремы отметим, что (30) вступает в противоречие с (29).

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\tau < T$, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ — произвольная последовательность слабых решений (1) на $[\tau, T]$ такая, что $u_n(\tau) \to \eta$ в H, $n \to +\infty$. Тогда существуют $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\eta)$ и $\{u_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{u_n\}_{n\geq 1}$ такие, что $u_{n_k} \to u$ в $C([\tau, T]; H)$, $k \to +\infty$.

Доказательство. Единственное принципиальное отличие от доказательства теоремы 1 состоит в проверке неравенства $\overline{\lim\limits_{j\to+\infty}} J_{k_j}(t_j) \leq J(t_0)$, когда $t_0 = \tau$, $t_j \to t_0$, $j \to +\infty$, $\{t_j\}_{j\geq 1} \subset [\tau, T]$ (см. шаг 5.2 доказательства теоремы 1). В этом случае $\forall j \geq 1$ $J_{k_j}(t_j) - J(\tau) \leq J_{k_j}(\tau) - J(\tau)$. Поскольку $u_n(\tau) \to u(\tau)$ в H, $n \to +\infty$, имеем $J_{k_j}(\tau) \to J(\tau)$, $j \to +\infty$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{j\to+\infty}} J_{k_j}(t_j) \leq J(t_0)$.

4. О ГЛОБАЛЬНОМ АТТРАКТОРЕ

Рассмотрим конструкции, введенные в [7]. Обозначим как $P(H)$ ($\mathcal{B}(H)$) совокупность всех непустых (непустых ограниченных) подмножеств пространства H. Напомним, что м-полупотоком называется многозначное отображение $G: \mathbb{R} \times H \to P(H)$, для которого:

- $G(0, \cdot) = Id$ (тождественное отображение);
- $G(t+s, x) \subset G(t, G(s, x))$ $\forall x \in H$, $t, s \in \mathbb{R}_+$;

м-полупоток строгий, если $G(t+s, x) = G(t, G(s, x))$ $\forall x \in H$, $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Из лемм 3 и 4 следует, что любое слабое решение может быть продолжено до глобального, определенного на $[0, +\infty)$. Пусть для произвольного $y_0 \in H$ $\mathcal{D}(y_0)$ — совокупность всех слабых решений (определенных на $[0, +\infty)$) задачи (1) с начальными данными $y(0) = y_0$.

Определим м-полупоток G следующим образом: $G(t, y_0) = \{y(t) \mid y(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)\}$.

Лемма 5. М-полупоток G является строгим.

Доказательство. Пусть $y \in G(t+s, y_0)$. Тогда $y = u(t+s)$, где $u(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)$. Из леммы 3 вытекает, что $v(\cdot) = u(s+\cdot) \in \mathcal{D}(u(s))$. Следовательно, $y = v(t) \in \in G(t, u(s)) \subset G(t, G(s, y_0))$.

Обратно, если $y \in G(t, G(s, y_0))$, то $\exists\, u(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)$, $v(\cdot) \in \mathcal{D}(u(s))$: $y = v(t)$. Определим отображение

$$z(\xi) = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in [0, s], \\ v(\xi - s), & \xi \in [s, t+s]. \end{cases}$$

Из леммы 3 вытекает, что $z(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)$. Следовательно, $y = z(t+s) \in \in G(t+s, y_0)$.

Напомним, что множество $\mathcal{A}$ называется глобальным аттрактором G, если:

- $\mathcal{A}$ — отрицательно полуинвариантное (т.е. $\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A})$ $\forall t \geq 0$);
- $\mathcal{A}$ — притягивающее множество, т.е.

$$\operatorname{dist}(G(t, B), \mathcal{A}) \to 0, \ t \to +\infty \ \ \forall B \in \mathcal{B}(H), \tag{33}$$

где $\operatorname{dist}(C, D) = \sup\limits_{c\in C} \inf\limits_{d\in D} ||c-d||_H$ — полуметрика Хаусдорфа;

- для любого замкнутого множества $Y \subset H$, удовлетворяющего (33), $\mathcal{A} \subset Y$ (минимальность).

Глобальный аттрактор называется инвариантным, если $\mathcal{A} = G(t, \mathcal{A})$ $\forall t \geq 0$.

Докажем существование инвариантного компактного глобального аттрактора.

Теорема 2. М-полупоток G обладает инвариантным компактным в фазовом пространстве H глобальным аттрактором $\mathcal{A}$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что

$$\exists R,\ \widetilde{\alpha}>0:\ \forall\, y_0\in H,\ y(\cdot)\in\mathcal{D}(y_0),\ t\ge 0\ \ \|y(t)\|_H^2\le\|y_0\|_H^2\, e^{-\widetilde{\alpha}t}+R. \quad (34)$$

Таким образом, шар $B_0=\{u\in H\,|\,\|u\|_H\le\sqrt{R+1}\}$ является абсорбирующим множеством, т.е. $\forall\, B\in\mathcal{B}(H)\ \exists\, T(B)>0:\ \forall\, t\ge T(B)\ \ G(t,B)\subset B_0$. В частности, из (34) вытекает, что множество $\cup_{t\ge 0}G(t,B)$ ограничено в $H\ \ \forall\, B\in\mathcal{B}(H)$.

Отметим также, что согласно теореме 1 отображение $G(t,\cdot):H\to\mathcal{B}(H)$ принимает компактные значения и является компактным при $t>0$ в том смысле, что переводит ограниченные множества в предкомпактные.

Докажем, что отображение $u_0\to G(t,u_0)$ полунепрерывно сверху [9; Definition 1.4.1]. Для этого достаточно показать [10; p. 48], что $\forall\, u_0\in H,\ \forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,\delta(u_0,\varepsilon)>0:\ \ \forall\, u\in B_\delta(u_0)\ \ G(t,u)\subset B_\varepsilon(G(t,u_0))=\{z\in H\,|\,\mathrm{dist}\,(z,G(t,u_0))<\varepsilon\}$. Если это не так, то существуют $u_0\in H$, $\varepsilon>0$, $\{\delta_n\}_{n\ge1}\subset(0,+\infty)$, $\{u_n\}_{n\ge1}\subset H$ такие, что $\forall\, n\ge1\ u_n\in B_{\delta_n}(u_0)$, $G(t,u_n)\not\subset B_\varepsilon(G(t,u_0))$ и $\delta_n\to0$, $n\to+\infty$. Тогда $\forall\, n\ge1\ \exists\, v_n(\cdot)\in\mathcal{D}(u_n)$: $v_n(t)\notin B_\varepsilon(G(t,u_0))$. Поскольку $u_n\to u_0$ в H, $n\to+\infty$, из теоремы 1 следует, что $v_n(t)\to v(t)\in G(t,u_0)$ в H, $n\to+\infty$, для некоторого $v(\cdot)\in\mathcal{D}(u_0)$. Это противоречит тому, что $\forall\, n\ge1\ \|v_n(t)-v(t)\|_H\ge\varepsilon$.

Таким образом, существование глобального аттрактора с требуемыми свойствами непосредственно следует из [7; Proposition 2, Theorem 3, Remark 8].

Теорема доказана.

5. О ТРАЕКТОРНОМ АТТРАКТОРЕ

Рассмотрим семейство $\mathcal{K}_+=\cup_{y_0\in H}\mathcal{D}(y_0)$ всех слабых решений включения (1), определенных на $[0,+\infty)$. Заметим, что $\mathcal{K}_+$ является трансляционно инвариантным, т.е. $\forall\, u(\cdot)\in\mathcal{K}_+$, $\forall\, h\ge0\ \ u_h(\cdot)\in\mathcal{K}_+$, где $u_h(s)=u(h+s)$, $s\ge0$. На $\mathcal{K}_+$ зададим полугруппу трансляций $\{T(h)\}_{h\ge0}$, $T(h)u(\cdot)=u_h(\cdot)$, $h\ge0$, $u\in\mathcal{K}_+$. В силу трансляционной инвариантности $\mathcal{K}_+$ заключаем, что $T(h)\mathcal{K}_+\subset\mathcal{K}_+$ при $h\ge0$.

Построим аттрактор трансляционной полугруппы $\{T(h)\}_{h\ge0}$, действующей на $\mathcal{K}_+$. Рассмотрим на $\mathcal{K}_+$ топологию, индуцированную из пространства Фреше $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$. Отметим, что

$$f_n(\cdot)\to f(\cdot)\ \text{в}\ C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\Leftrightarrow\ \forall\, M>0\ \ \Pi_M f_n(\cdot)\to$$

$$\to\Pi_M f(\cdot)\ \text{в}\ C([0,M];H),$$

где Π_M — оператор ограничения на отрезок $[0,M]$ [6; с. 18]. Обозначим в качестве Π_+ оператор ограничения на $[0,+\infty)$.

Напомним, что множество $\mathcal{P}\subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ называется притягивающим для пространства траекторий $\mathcal{K}_+$ включения (1) в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$, если для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ множества $\mathcal{B}\subset\mathcal{K}_+$ и произвольного числа $M\ge0$ выполняется соотношение

$$\mathrm{dist}_{C([0,M];H)}(\Pi_M T(t)\mathcal{B},\Pi_M\mathcal{P})\to0,\quad t\to+\infty. \quad (35)$$

Множество $\mathcal{U}\subset\mathcal{K}_+$ называется траекторным аттрактором в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ относительно топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$ [6; определение 1.2], если:

- $\mathcal{U}$ компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$;
- $\mathcal{U}$ строго инвариантно относительно $\{T(h)\}_{h\ge0}$, т.е. $T(h)\mathcal{U}=\mathcal{U}\ \forall\, h\ge0$;
- $\mathcal{U}$ является притягивающим множеством для пространства траекторий $\mathcal{K}_+$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$.

Рассмотрим включение (1) на всей числовой прямой. По аналогии с пространством $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$ пространство $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ снабжается топологией локальной равномерной сходимости на каждом отрезке $[-M,M]\subset\mathbb{R}$ [6; с. 198]. Функция $u\in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)\cap L_\infty(\mathbb{R};H)$ называется полной траекторией включения (1), если $\forall\, h\in\mathbb{R}\ \Pi_+ u_h(\cdot)\in\mathcal{K}_+$ [6; с. 198]. Пусть $\mathcal{K}$ — совокупность всех полных траекторий включения (1). Отметим, что

$$\forall\, h\in\mathbb{R},\ \forall\, u(\cdot)\in\mathcal{K}\ \ u_h(\cdot)\in\mathcal{K}. \tag{36}$$

Лемма 6. Множество $\mathcal{K}$ непустое, компактное в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R};H)$, кроме того,

$$\forall\, y(\cdot)\in\mathcal{K},\ \forall\, t\in\mathbb{R}\quad y(t)\in\mathcal{A}, \tag{37}$$

где $\mathcal{A}$ — глобальный аттрактор из теоремы 2.

Доказательство. **Шаг 1.** Покажем, что $\mathcal{K}\neq\varnothing$. Заметим, что в силу [15], а также условий 1, 3–5 следует, что $\exists\, v\in V\colon\ A(v)\ni f$. Положим $u(t)=v\ \forall\, t\in\mathbb{R}$. Тогда $u\in\mathcal{K}\neq\varnothing$.

Шаг 2. Докажем (37). Для любого $y\in\mathcal{K}\ \exists\, d>0: \|y(t)\|_H\le d\ \forall\, t\in\mathbb{R}$. Положим $B=\cup_{t\in\mathbb{R}}\{y(t)\}\in\mathcal{B}(H)$. Отметим, что $\forall\,\tau\in\mathbb{R},\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+\ \ y(\tau)=y_{\tau-t}(t)\in$ $\in G(t, y_{\tau-t}(0))\subset G(t,B)$. Из теоремы 2 и (33) вытекает, что $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, T>0:$ $\forall\,\tau\in\mathbb{R}\quad \mathrm{dist}(y(\tau),\mathcal{A})\le \mathrm{dist}(G(T,B),\mathcal{A})<\varepsilon$. Поэтому, учитывая компактность $\mathcal{A}$ в H, для любых $u(\cdot)\in\mathcal{K},\ \tau\in\mathbb{R}$ следует, что $u(\tau)\in\mathcal{A}$.

Шаг 3. Ограниченность $\mathcal{K}$ в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ вытекает из (37) и ограниченности $\mathcal{A}$ в H.

Шаг 4. Проверим компактность $\mathcal{K}$ в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Для этого достаточно проверить предкомпактность и замкнутость.

Шаг 4.1. Проверим предкомпактность $\mathcal{K}$ в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Если это не так, то в силу (36) $\exists\, M>0:\Pi_M\mathcal{K}$ не является предкомпактом в $C([0,M];H)$. Следовательно, существует последовательность $\{v_n\}_{n\ge1}\subset\Pi_M\mathcal{K}$, не имеющая сходящуюся в $C([0,M];H)$ подпоследовательность. В то же время $v_n=\Pi_M u_n$, где $u_n\in\mathcal{K}$, $v_n(0)=u_n(0)\in\mathcal{A},\ n\ge1$. Поскольку $\mathcal{A}$ — компакт в H (см. теорему 2), в силу следствия 1 $\exists\,\{v_{n_k}\}_{k\ge1}\subset\{v_n\}_{n\ge1},\ \exists\,\eta\in H,\ \exists\, v(\cdot)\in\mathcal{D}_{0,M}(\eta)$: $v_{n_k}(0)\to\eta$ в H, $v_{n_k}\to v$ в $C([0,T];H),\ k\to+\infty$. Получили противоречие.

Шаг 4.2. Проверим замкнутость $\mathcal{K}$ в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Пусть $\{v_n\}_{n\ge1}\subset\mathcal{K}$, $v\in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$: $v_n\to v$ в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H),\ n\to+\infty$. Из ограниченности $\mathcal{K}$ в $L_\infty(\mathbb{R};H)$ следует $v\in L_\infty(\mathbb{R};H)$. Из следствия 1 имеем, что $\forall\, M>0$ ограничение $v(\cdot)$ на отрезок $[-M,M]$ принадлежит $\mathcal{D}_{-M,M}(v(-T))$. Следовательно, $v(\cdot)$ — полная траектория включения (1). Таким образом, $v\in\mathcal{K}$.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{A}$ — глобальный аттрактор из теоремы 2. Тогда

$$\forall\, y_0\in\mathcal{A}\ \ \exists\, y(\cdot)\in\mathcal{K}:\ y(0)=y_0. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $y_0\in\mathcal{A},\ u(\cdot)\in\mathcal{D}(y_0)$. Из (9), (33) получим $\forall\, t\in\mathbb{R}_+$ $y(t)\in\mathcal{A}$. Из теоремы 2 следует $G(1,\mathcal{A})=\mathcal{A}$. Поэтому

$$\forall\,\eta\in\mathcal{A}\ \ \exists\,\xi\in\mathcal{A},\ \exists\,\varphi_\eta(\cdot)\in\mathcal{D}_{0,1}(\xi):\ \varphi_\eta(1)=\eta.$$

Для любого $t\in\mathbb{R}$ положим

$$y(t)=\begin{cases} u(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \varphi_{\,y(-k+1)}(t+k), & t\in[-k,-k+1),\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Отметим, что $y \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, $y(t) \in \mathcal{A}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (следовательно, $y \in L_\infty(\mathbb{R}; H)$) и, в силу леммы 3, $y \in \mathcal{K}$, при этом $y(0) = y_0$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}$ — глобальный аттрактор из теоремы 2. Тогда в пространстве $\mathcal{K}_+$ существует траекторный аттрактор $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}_+$. При этом имеет место

$$\mathcal{P} = \Pi_+ \mathcal{K} = \Pi_+ \{y \in \mathcal{K} \mid y(t) \in \mathcal{A} \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}. \tag{39}$$

Доказательство. Из леммы 6 и непрерывности оператора $\Pi_+ : C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H) \to$ $\to C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ следует, что множество $\Pi_+ \mathcal{K}$ непустое, компактное в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Кроме того, справедливо второе равенство в (39). Строгая инвариантность $\Pi_+ \mathcal{K}$ следует из автономности включения (1).

Докажем, что $\Pi_+ \mathcal{K}$ является притягивающим множеством для пространства траекторий $\mathcal{K}_+$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$. Пусть $B \subset \mathcal{K}_+$ — ограниченное множество в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, $M \geq 0$. Проверим истинность (35). Если это не так, то существуют последовательности $t_n \to +\infty$, $v_n(\cdot) \in B$ такие, что

$$\forall\, n \geq 1 \ \ \operatorname{dist}_{C([0,T];H)}(\Pi_M v_n(t_n + \cdot), \Pi_M \mathcal{K}) \geq \varepsilon. \tag{40}$$

В то же время из ограниченности B в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ следует, что $\exists\, R > 0$: $\forall\, v(\cdot) \in B$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ $\|v(t)\|_H \leq R$. Таким образом, $\exists\, N \geq 1$: $\forall\, n \geq N$ $v_n(t_n) \in$ $\in G(t_n, v_n(0)) \subset G(1, G(t_n - 1, v_n(0))) \subset G(1, \overline{B}_R)$, где $\overline{B}_R = \{u \in H \mid \|u\|_H \leq R\}$.

Следовательно, учитывая (33) и компактность отображения $G(1, \cdot) : H \to$ $\to \mathcal{B}(H)$ (см. доказательство теоремы 2), получим $\exists\, \{v_{n_k}(t_{n_k})\}_{k \geq 1} \subset \{v_n(t_n)\}_{n \geq 1}$, $\exists\, z \in \mathcal{A}$: $v_{n_k}(t_{n_k}) \to z$ в H, $k \to +\infty$. Далее, $\forall\, k \geq 1$ положим $\varphi_k(t) = v_{n_k}(t_{n_k} + t)$, $t \in [0, M]$. Заметим, что $\forall\, k \geq 1$ $\varphi_k(\cdot) \in \mathcal{D}_{0,M}(v_{n_k}(t_{n_k}))$. Тогда из следствия 1 получаем подпоследовательность $\{\varphi_{k_j}\}_{j \geq 1} \subset \{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ и элемент $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{0,M}(z)$:

$$\varphi_{k_j} \to \varphi \ \text{ в } \ C([0, M]; H), \quad j \to +\infty. \tag{41}$$

При этом, учитывая инвариантность $\mathcal{A}$ (см. теорему 2), $\forall\, t \in [0, M]$ $\varphi(t) \in \mathcal{A}$. Вследствие леммы 7 существуют $y(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{K}$: $y(0) = z$, $v(0) = \varphi(M)$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ положим

$$\psi(t) = \begin{cases} y(t), & t \leq 0, \\ \varphi(t), & t \in [0, M], \\ v(t - M), & t \geq M. \end{cases}$$

В силу леммы 3 $\psi(\cdot) \in \mathcal{K}$. Следовательно, из (40) получим

$$\forall\, k \geq 1 \ \|\Pi_M v_{n_k}(t_{n_k} + \cdot) - \Pi_M \psi(\cdot)\|_{C([0,M];H)} = \|\varphi_k - \varphi\|_{C([0,M];H)} \geq \varepsilon,$$

что вступает в противоречие с (41).

Таким образом, построенное в (39) множество $\mathcal{P}$ является траекторным аттрактором в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ относительно топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$.

Теорема доказана.

ПРИМЕРЫ

Рассмотрим класс нелинейных граничных задач, для которых можно исследовать динамику решений при $t \to +\infty$, не претендуя на общность при изложении.

Пусть $n \geq 2$, $m \geq 1$, $p \geq 2$, $1 < q \leq 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Через N_1 (соответственно N_2) обозначим число дифференцирований по x порядка $\leq m - 1$ (соответственно порядка $= m$).

Пусть также $A_\alpha(x,\eta;\xi)$ — семейство вещественных функций ($|\alpha|\le m$), определенных в $\Omega\times\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}$ и удовлетворяющих условиям:

а) для п.в. $x\in\Omega$ функция $(\eta,\xi)\to A_\alpha(x,\eta,\xi)$ непрерывна в $\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}$;

б) $\forall(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}$ функция $x\to A_\alpha(x,\eta,\xi)$ измерима в Ω;

в) существуют такие $c_1\ge 0$ и $k_1\in L_q(\Omega)$, что для п.в. $x\in\Omega$ $\forall(\eta,\xi)\in$ $\in\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}$

$$|A_\alpha(x,\eta,\xi)|\le c_1[|\eta|^{p-1}+|\xi|^{p-1}+k_1(x)];$$

г) существуют такие $c_2>0$ и $k_2\in L_1(\Omega)$, что для п.в. $x\in\Omega$, $\forall(\eta,\xi)\in$ $\in\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}$

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha(x,\eta,\xi)\xi_\alpha\ge c_2|\xi|^p-k_2(x);$$

д) для п.в. $x\in\Omega$, $\forall\eta\in\mathbb{R}^{N_1}$, $\forall\xi,\xi^*\in\mathbb{R}^{N_2}$, $\xi\to\xi^*$ выполняется

$$\sum_{|\alpha|=m}(A_\alpha(x,\eta,\xi)-A_\alpha(x,\eta,\xi^*))(\xi_\alpha-\xi_\alpha^*)>0.$$

Введем обозначения: $D^k u=\{D^\beta u,\ |\beta|=k\},\ \delta u=\{u,Du,\ldots,D^{m-1}u\}$ [4; с. 194].

Для произвольной фиксированной внешней силы $f\in L_2(\Omega)$ исследуем динамику при $t\to+\infty$ всех слабых (обобщенных) решений, определенных на $[0,+\infty)$, следующей задачи:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_\alpha(x,\delta y(x,t),D^m y(x,t)))=f(x)\ \text{ в }\ \Omega\times(0,+\infty),\quad (42)$$

$$D^\alpha y(x,t)=0\ \text{ на }\ \Gamma\times(0,+\infty),\ |\alpha|\le m-1. \quad (43)$$

Введем обозначения [4; с. 195] : $H=L_2(\Omega)$, $V=W_0^{m,p}(\Omega)$ — действительное пространство Соболева,

$$a(u,\omega)=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega A_\alpha(x,\delta u(x),D^m u(x))D^\alpha\omega(x)dx,\quad u,\omega\in V.$$

Условие 2 имеет место в силу теоремы Соболева о компактности вложения. Принимая во внимание условия а)–д) и рассуждения из работы [4; с. 192–199], оператор $A\colon V\to V^*$, определенный формулой $\langle A(u),\omega\rangle_V=a(u,\omega)$ $\forall u,\omega\in V$, удовлетворяет условиям 3–5. Следовательно, можно перейти от задачи (42), (43) к соответствующей задаче в «обобщенной» постановке (1). Отметим, что

$$A(u)=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_\alpha(x,\delta u,D^m u))\ \ \forall u\in C_0^\infty(\Omega).$$

Таким образом, для слабых (обобщенных) решений задачи (42), (43) выполняются все утверждения из предыдущих разделов, в частности теорем 1–3 и лемм 1–7.

Замечание 3. В качестве приложений можно рассматривать также новые классы задач с вырождением, задачи на многообразии с краем и без края, задачи с запаздыванием, стохастические дифференциальные уравнения с частными производными и другие задачи с дифференциальными операторами псевдомонотонного типа при соответствующем выборе фазовых пространств [4, 11–13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов разд. 4 и 5 следует что м-полупоток G, построенный на всех слабых решениях (1), обладает компактным инвариантным глобальным аттрактором $\mathcal{A}$. Для всех слабых решений (1), определенных на $[0,+\infty)$, существует траекторный аттрактор $\mathcal{P}$. При этом $\mathcal{A}=\mathcal{P}(0)=\{y(0) \mid y\in\mathcal{K}\}$, $\mathcal{P}=\Pi_+\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — совокупность всех полных траекторий дифференциально-операторного включения (1) в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)\cap L_\infty(\mathbb{R};H)$. Таким образом, доказано равенство глобальных аттракторов как в смысле [7; Definition 6], так и в смысле [6; определение 2.2]. Открытыми остаются вопросы относительно связности и размерности построенных аттракторов в общем случае. Отметим, что предложенные в [6, 7] подходы опираются на свойства решений эволюционных объектов, в данной работе — на свойства функции взаимодействия A из (1) и свойства фазовых пространств.

Анализируя доказательства изложенных результатов, вместо условия 5 можно рассматривать более слабое условие на отображение $A:V\rightrightarrows V^*$: из того, что

$u_n\to u$ слабо в V, $d_n\in A(u_n)$ $\forall n\ge 1$, $d_n\to d$ слабо в $V^*, n\to+\infty$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle d_n, u_n-u\rangle_V=0$, следует $d\in A(u)$.

Для класса автономных дифференциально-операторных включений с псевдомонотонной нелинейной зависимостью между определяющими параметрами задачи исследована динамика при $t\to+\infty$ всех глобальных слабых решений, определенных на $[0,+\infty)$. Доказано существование глобального компактного аттрактора и компактного траекторного аттрактора, изучена их структура, проверено равенство глобальных аттракторов как в смысле определения 6 из [7], так и в смысле определения 2.2 из [6]. Полученные результаты позволяют исследовать динамику решений новых классов эволюционных включений из нелинейных математических моделей геофизических и социоэкономических процессов и полей с функцией взаимодействия псевдомонотонного типа, удовлетворяющей условию не более чем полиномиального роста и стандартному знаковому условию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ball J.M. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier–Stokes equations // J. Nonlinear Sci. — 1997. — **7**, N 5. — P. 475–502.
2. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
3. Migorski S. Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications // J. Global Optim. — 2005. — **31**, N 3. — P. 505–533.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Физматгиз, 1961. — 203 с.
6. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье–Стокса // Мат. заметки. — 2002. — **71**, № 2. — С. 194–213.
7. Melnik V.S., Valero J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. — 1998. — **6**, N 1. — P. 83–111.
8. Valero J., Kapustyan A.V. On the connectedness and asymptotic behaviour of solutions of reaction-diffusion systems // J. Math. Analysis and Appl. — 2006. — **323**, N 1. — P. 614–633.
9. Aubin J.P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston: Birkhauser, 1990. — 461 p.
10. Aubin J.P., Sellina A. Set-valued analysis and viability theory. — Berlin: Springer, 1984.

11. Sell G.R., You Yu. Dynamics of evolutionary equations. — New York: Springer, 2002. — 672 p.

12. Дубинский Ю.А. Нелинейные параболические уравнения высокого порядка // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Нов. достиж. — 1990. — **37**. — С. 89–166.

13. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Trajectory attractor for reaction-diffusion system with diffusion coefficient vanishing in time // Discr. and Contin. Dynam. Systems. — 2010. — **27**, N 4. — P. 1498–1509.

14. Чуешов И.Д. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. — 1993. — **48**, № 3(291). — С. 135–162.

15. Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — К.: Наук. думка, 2008. — 464 с.

16. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Toscano S. Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued w_{λ_0}-pseudomonotone maps // J. Differ. Equations. — 2010. — **249**, N 6. — P. 1258–1287.

17. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.

Поступила 12.08.2010