КИБЕРНЕТИКА

П.С. КНОПОВ, И.В. СЕРГИЕНКО

УДК 519.21

О НЕКОТОРЫХ НАУЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ Ю.М. ЕРМОЛЬЕВА И ЕГО ШКОЛЫ В ОБЛАСТИ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *теория стохастической оптимизации, оптмальное управление, квазиградиенты.*

ВВЕДЕНИЕ

С первых лет существования Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины одними из самых приоритетных научных направлений были исследования в области теории оптимизации и оптимального управления, моделирования, теории риска и системного анализа. Научные результаты, полученные учеными института в этой области, широко известны как у нас в стране, так и за рубежом, а школы по теории недифференцируемой и дискретной оптимизации, стохастической оптимизации и теории риска, оптимального управления получили мировое признание. В настоящей статье остановимся на одном из наиболее важных направлений теории оптимизации — теории стохастической оптимизации, основное внимание уделив при этом результатам Ю.М. Ермольева и его школы.

Традиционные детерминированные методы оптимизации используются для точно определенных функций цели и ограничений, т.е. когда можно точно вычислить минимизируемую (или максимизируемую) $f^0(x)$ и проверить ограничения $f^i(x) \le 0$, $i = 1{:}m$, для любого вектора решений $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, где множество X имеет «простую» структуру (например, определяется линейными ограничениями). Обычно предполагается также, что градиенты или субградиенты (для негладких функций) f_x^i функций f^i, $i = 0, 1, \ldots, m$, можно вычислить. Разработанные Ю.М. Ермольевым [1–5] методы стохастического квазиградиента (SQG) использовались для решения общих задач оптимизации, когда точно рассчитать f^i, f_x^i невозможно. Любая детерминированная оптимизационная модель, например

$$\min\{f^0(x,\omega) \mid f^i(x,\omega) \le 0,\ i = 1, \ldots, m;\ x \in X \subseteq R^n\},$$

содержит параметры ω, которые в общем случае могут быть случайными. Это может объясняться как неполнотой информации о значениях параметров (ошибки измерений, статистические оценки параметров), так и самой стохастической природой параметров (прогнозы, погодные условия, осадки, колебания цен, спроса, урожайности, курсов акций и т.п.). Тогда при любом фиксированном x ограничения $f^i(x,\omega) \le 0$ могут не выполняться для некоторых ре-

© П.С. Кнопов, И.В. Сергиенко, 2011

ализаций случайного параметра ω, а целевая функция $f^0(x,\omega)$ может принимать разные значения, и проблема состоит в том, что следует понимать под решением такой задачи. Набор функций $f(x,\omega)=\{f^0(x,\omega), f^1(x,\omega),\ldots, f^m(x,\omega)\}$, $\omega\in\Omega$, можно рассматривать как векторную характеристику решения $x\in X$ и трактовать задачу выбора оптимального x как проблему векторной оптимизации, вообще говоря, с бесконечным числом критериев. Вместо ω иногда подставляют его среднее значение — $E\omega$, но во многих случаях нельзя игнорировать стохастическую природу параметров задачи. По этой причине, например, в финансовых приложениях вместе со средним выигрышем учитывают также дисперсию выигрыша, а в страховых приложениях — вероятность разорения компании. Формализацией задач оптимизации со случайными параметрами занимается теория стохастического программирования. Отметим, что теория и некоторые приложения стохастического квазиградиентного метода резюмированы в ряде статей Энциклопедии оптимизации [6].

Чаще всего под задачей (одноэтапного) стохастического программирования понимают экстремальную задачу

$$F^0(x)=Ef^0(x,\omega)\to\min \tag{1}$$

при ограничениях

$$F^i(x)=Ef^i(x,\omega)\le 0,\ x\in X\subseteq R^n, \tag{2}$$

где ω — вектор случайных параметров, E — символ математического ожидания по ω, x — детерминированный вектор решений с непрерывными и/или дискретными координатами. Отметим, что (Ω,Σ,P) — вероятностное пространство задачи. Часто вместо $F^i(x)$ рассматривают функции (ожидаемой полезности) вида $F(x)=Eu(f(x,\omega))$, где $u(\cdot)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция (полезности).

Если функции $f^i(x,\omega)$ в (1), (2) известны в явном виде, то интегралы (математические ожидания) в них можно приблизить с помощью квадратур или эмпирическими средними:

$$F^{iN}(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f^i(x,\omega^k), \tag{3}$$

где ω^k, $k=1,\ldots,N$, — независимые реализации случайных параметров задачи. Тогда проблему (1), (2) можно аппроксимировать детерминированной задачей и решить детерминированными методами. Этот подход к решению задач стохастического программирования, который назван методом эмпирических средних, исследовался в работах [7–10].

Предложенный Ю.М. Ермольевым SQG-метод решения задач выпуклого стохастического программирования может рассматриваться как обобщение методов стохастической аппроксимации на многомерные негладкие задачи с ограничениями и как обобщение метода Монте-Карло на задачи оптимизации, а также как развитие методов случайного поиска. Основная особенность квазиградиентных методов состоит в том, что они не требуют вычисления точных значений целевых функций и ограничений, а используют статистические оценки (реализации) подынтегральных функций и их обобщенных градиентов. Они отражают основные идеи стандартных методов оптимизации, процедуры случайного поиска, стохастической аппроксимации и статистического оценивания. Это открывает широкие возможности их применения для решения задач исследования операций, адаптации и оптимизации сложных стохастических систем с помощью имитационного моделирования. Методы SQG можно использовать для решения трех типов задач:

• детерминированных проблем, для которых сложно вычислять направление спуска (большой масштаб, негладкость, распределенность, нестационарность моделей оптимизации);

• многоэкстремальных задач, когда важно обойти локально оптимальные решения;

• задач с учетом неопределенностей и/или сложностей в оценке функций и их субградиентов (задачи стохастической, пространственной и динамической оптимизации с многомерными интегралами, моделирование, аналитически недоступные модели).

Таким образом, к методам SQG прибегают в тех случаях, когда структура задачи не позволяет использовать другие инструменты детерминированной оптимизации. При этом необходимое требование — наличие современных компьютерных ресурсов, достаточных для достижения нужной точности оптимальных решений, используемых для многих приложений.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЫПУКЛОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Идея метода стохастических квазиградиентов. Основная идея методов SQG [1–5] — использование статистических (смещенных и несмещенных) оценок целевой функции и функций ограничений, а также их градиентов (субградиентов). Другими словами, последовательность приближающих решений $x^0, x^1, \ldots$ строится с использованием случайных величин $\eta_i(k)$ и случайных векторов $\xi^i(k)$, $i = 0, \ldots, m$, таких, что условное математическое ожидание для данной «истории» G_k (скажем, $(x^0, \ldots, x^k)$) имеет вид

$$E[\eta^i(k) | G_k] = F^i(x^k) + a^i(k), \tag{4}$$

$$E[\xi^i(k) | G_k] = F_x^i(x^k) + b^i(k), \tag{5}$$

где $a^i(k)$, $b^i(k)$ — «ошибки» (смещенные) оценок $\eta^i(k)$, $\xi^i(k)$. Для точной сходимости последовательности $\{x^k\}$ к оптимальным решениям $a^i(k)$, $b^i(k)$ должны стремиться (в некотором смысле) к нулю при $k \to \infty$. Векторы $\xi^i(k)$ называются стохастическими квазиградиентами. Если $b^i(k) \equiv 0$, то они также называются стохастическими градиентами для непрерывно дифференцируемой $F^i(x)$ и стохастическими субградиентами (обобщенными градиентами) для негладких $F^i(x)$. В последующих обозначениях $F(x)$, $\eta(k)$, $\xi(k)$ также используются вместо $F^0(x)$, $\eta^0(k), \xi^0(k)$.

Рассмотрим простейший метод SQG. Предположим, что ограничений (2) нет, X — замкнутое и ограниченное (компактное) множество, такое, что ортогональные проекции $\Pi_X(y)$ точки y на X легко вычислить: $\Pi_X(y) = \operatorname{Arg}\min\{\|y - x\|^2 : x \in X\}$, например $\Pi_{a \le x \le b}(y) = \max[a, \min\{y, b\}]$. Метод SQG-проекций определяется итеративно как

$$x^{k+1} = \Pi_X[x^k - \rho_k \xi(k)], \; k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где ρ_k — положительный размер шага, x^0 — случайная начальная аппроксимация.

Требуют объяснения следующие вопросы метода (6) и других подобных алгоритмов:

(i) построение на основе начального вероятностного пространства задачи (Ω, Σ, P) другого (алгоритмического) вероятностного пространства $(\Omega, \Sigma_\omega, P_\omega)$ и выяснение вопросов измеримости в нем процесса (6);

(ii) построение направления движения $\xi(k)$ на основе информации о подынтегральной функции $f(x, \omega)$;

(iii) условия сходимости алгоритма (6) и выбор шаговых множителей ρ_k;

(iv) описание множества X и реализация операции проектирования $\Pi_X(\cdot)$;

(v) возможные модификации базового алгоритма.

Рассмотрим кратко вопросы (i)–(v).

(i) Как правило, алгоритмическое вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma_\omega, P_\omega)$ строится как счетное произведение копий исходного вероятностного пространства задачи (Ω, Σ, P) и точки $x^k(\omega)$ рассматриваются как функции от $\omega \in \Omega$. Если, кроме наблюдений стохастических параметров задачи, алгоритм включает другие стохастические элементы (типа рандомизации поиска), то они также должны быть включены в конструкцию пространства $(\Omega, \Sigma_\omega, P_\omega)$.

(ii) В общем случае направления $\xi(k)$ являются оценками субградиентов функции $F(x)$ в точке x^k и должны удовлетворять условию $E\{\xi(k) | x^0, \ldots, x^k\} \in \in a_k \partial F(x^k) + b^k$.

Рассмотрим наиболее важные типичные примеры вычисления SQG.

Пример 1. Оптимизация методом Монте-Карло. Различные практические проблемы зачастую настолько сложны, что для того чтобы определить, как выбор переменной x влияет на систему в целом, можно использовать исключительно моделирование методом Монте-Карло [1, 11–15]. Любое подобное моделирование можно рассматривать как наблюдение «среды» ω из пространства образцов Ω. Для простоты изложения предположим, что имеется только одно значение $f(x, \omega)$ при моделирования ω для данного x. Проблема состоит в минимизации ожидаемой производительности (стоимости, риска, прибыли, «расстояния» от заданной цели и др.):

$$F(x) = Ef(x, \omega).$$

Это типичная задача стохастической оптимизации. Точные значения $F(x)$ неизвестны. Доступна только информация о том, что любое текущее решение x^k и исполняемая модель ω дают $\eta(k) = f(x^k, \omega)$, для которой удовлетворяется условие (4) при $a(k) \equiv 0$. Вектор $\xi(k)$ можно вычислить с помощью стандартной процедуры стохастической апроксимации: а) на любом шаге k для заданного x^k моделируются случайные выходы $f(x^k, \omega^{k0}), \ldots, f(x^k + \Delta_k e^j, \omega^{k,j})$, $j = 1, \ldots, n$, где $\Delta_k e^j$ — положительное приращение в направлении e^j j-й координатной оси; б) вычисляются

$$\xi(k) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_k^{-1} [f(x^k + \Delta_k e^j, \omega^{k,j}) - f(x^k, \omega^{k,0})] e^j. \tag{7}$$

Величины $\omega^{k,0}, \ldots, \omega^{k,n}$ не обязательно независимы: можно использовать один результат моделирования ω^k на каждом шаге k: $\omega^{k,0} = \ldots = \omega^{k,n} = \omega^k$. Вариация такого метода получения оценки SQG сходится к нулю при $k \to \infty$, тогда как для независимых моделей она стремится к бесконечности. Поскольку $E[\xi(k) | x^k] = \sum_{j=1}^{n} \Delta_k^{-1} [F(x^k + \Delta_k e^j) - F(x^k)] e^j$, то для непрерывно дифференцируемой $F(\cdot)$ имеем

$$E[\xi(k)|x^k] = F_x(x^k) + C(k)\Delta_k, \tag{8}$$

где $||C(k)|| < \text{const} < \infty$ для всех x^k из ограниченного множества X.

Пример 2. Оптимизация посредством случайного поиска. Предположим, что $F(x)$ можно непосредственно оценить, но это требует много времени, поскольку $F(x)$ определяет решение дифференциального уравнения или решение других задач оптимизации. Чисто эмпирический метод (со случайными значениями $x^{k+1} \in X$, $F(x^{k+1}) < F(x^k)$ и т.д.) может занять много времени, поскольку вероятность попасть в произвольное подпространство в неотрицательном ортанте *n*-мерного евклидового пространства равна 2^{-n}. Обычное конечно-разностное приближение

$$F_x(x^k) \approx \sum_{j=1}^{n} \Delta_k^{-1}[F(x^k + \Delta_k e^j) - F(x^k)]e^j \tag{9}$$

требует $n+1$ приближение $F(\cdot)$ и, следовательно, может оказаться трудоемким. Метод SQG

$$\xi(k) = 3/2\Delta_k^{-1}[F(x^k + \Delta_k \zeta^k) - F(x^k)]\zeta^k, \tag{10}$$

где ζ^k имеет независимые, равномерно распределенные на $[-1,1]$ компоненты, требует только двух оценок $F(x)$: в точках x^k и $x^k + \Delta_k \zeta^k$ независимо от размерности *n*. Легко видеть, что вектор (10) удовлетворяет (8) для непрерывно дифференцируемой $F(x)$.

Пример 3. Конечно-разностные аппроксимации субградиентов. Конечно-разностные аппроксимации (7), (9), (10) нельзя использовать для недифференцируемых функций, т.е. для случайных двухэтапных и минимаксных задач. Метод SQG позволяет получить простые конечно-разностные аппроксимации для задачи негладкой оптимизации в общем случае (и детерминированной, и стохастической). Небольшая рандомизация (7), (9), (10) за счет замены данной точки x^k случайной точкой $\bar{x}^k = x^k + \nu^k$, где случайный вектор ν^k имеет плотность и $||\nu^k|| \to 0$ с вероятностью 1 гарантирует их сходимость для локально-липшицевых и разрывных функций [1, 11–15].

Предположим, что $F(x)$ — локально интегрируемая (возможно, разрывная) функция и вектор ν^k имеет достаточно гладкую плотность, сконцентрированную на ограниченном множестве. Тогда

$$\xi(k) = 3/2\Delta_k^{-1}[F(\bar{x}^k + \Delta_k \zeta^k) - F(\bar{x}^k)]\zeta^k, \tag{11}$$

$$\xi(k) = 3/2\Delta_k^{-1}[f(\bar{x}^k + \Delta_k \zeta^k, \omega^{k1}) - f(\bar{x}^k, \omega^{k,0})]\zeta^k \tag{12}$$

— SQG функции $F(k,x) = EF(x+\nu^k)$ или стохастического сглаженного квазиградиента (SMQG) $F(x)$, который (в некотором смысле) сходится к $F(x)$ и для которого $F_x(k,x)$ сходятся [11,12] к множеству субградиентов $F_x(x)$. Имеем

$$E[\xi(k)|x^k] = F_x(k, x^k) + C(k)\Delta_k,$$

где $||C(k)|| < \text{const} < \infty$ для всех x^k из ограниченного множества. Анализ сходимости x^k базируется на общих идеях нестационарной оптимизации (см. пример 5). Важным преимуществом данного подхода является то, что $F(k,x)$ сглаживает частые осцилляции $F(x)$ и отражает общий тренд $F(x)$, что позволяет $\{x^k\}$ обойти ненужные локальные решения. Достаточно «большие» ν^k ускоряют процедуру перехода к важным (т.е. глобальным) решениям.

Пример 4. Глобальная оптимизация. Простейший способ добавить «устойчивости» в процедуру градиентного типа для исключения локальных решений — возмутить градиент $F_x(x^k)$ с помощью случайного вектора ν^k, т.е. рассматривать $\xi(k) = F_x(x^k) + \nu^k$, $E\nu^k = 0$. Специальный выбор ν^k соответствует методу имитации отжига (для обучения нейронных сетей). Еще один возможный способ избавиться от локальных решений — последовательная гладкая аппроксимация [12]. Другие методы глобальной оптимизации рассмотрены в [13].

Пример 5. Нестационарная оптимизация. Многие прикладные проблемы, [1, 12, 14], как и в примере 3, можно сформулировать как задачи оптимизации с целевой функцией $F_0(k, x)$ и ограничениями $F_i(k, x)$, меняющимися на каждом шаге $k = 0, 1, \ldots$ В этом случае SQG-метод на шаге k производит один шаг минимизации $F_0(k, x)$, используя оценки $F_{ix}(k, x)$, $i = 0, \ldots, m$. При $F_i(k, x) \to F_i(x)$, $k \to \infty$, получаем особый случай. Следовательно, можно показать, что $F_0(k, x^k) \to \min F_0(x)$. В общем случае можно определить широкий спектр ситуаций, для которых $|F_0(k, x^k) - \min F_0(x, k)| \to 0$, $k \to \infty$.

(iii) Рассмотрим условия сходимости алгоритма (6) и выбор шаговых множителей ρ_k. Методы SQG генерируют случайные последовательности аппроксимирующих решений $\{x^k(\omega)\}$ и значений $\{F(x^k(\omega))\}$, зависящих от ω, из соответствующим образом определенного вероятностного пространства. Более важно с практической точки зрения то, что $x^k(\omega)$ (или $F(x^k)$) сходятся к множеству локальных решений X^* $(F^* = F^*(X^*))$ для почти всех ω (с вероятностью 1). Сходимость с вероятностью 1 последовательности $\{F(x^k)\}$ к множеству F^* доказана для негладких (обобщенно-дифференцируемых, локально-липшицевых и четных полунепрерывных) функций, которые покрывают широкий спектр приложений. Предельные точки $\{x^k(\omega)\}$ для каждого ω формируют связное множество из X^*. Сходимость $x^k(\omega) \to X^*$ с вероятностью 1 имеет место в условиях «выпуклости». Глобальная сходимость в общих случаях требует специальных стохастических механизмов [1, 12, 14]. Во всех случаях для сходимости необходим специальный выбор размера шага ρ_k. Из-за сложности задач ρ_k нельзя выбрать способ, гарантирующий монотонное убывание $F(x)$: $F(x^{k+1}) < F(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Относительно гибкие требования, которые часто гарантируют сходимость последовательности $\{F(x^k)\}$ с вероятностью 1, следующие:

$$\rho_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E[\rho_k \|b(k)\| + \rho_k^2 \|\xi(k)\|^2] < \infty. \tag{13}$$

Рассмотрим, например, (7) с зависимыми наблюдениями $\omega^{k,0} = \omega^{k,1} = \ldots = \omega^k$ и $f(x, \omega) < \text{const} < \infty$. На практике всегда можно предположить, что $\|\xi(k)\| \leq \text{const} < \infty$. Тогда условие (13) удовлетворяется для $\rho_k = C/(k+1)$, $\Delta_k = D/(k+1)$ с константами C, D. Обычно C, D корректируются [1, 12] на каждом шаге с учетом истории G_k, например использованием значений $\bar{F}(k) = (k+1)^{-1} \sum_{s=0}^{k} f(x^s, \omega^s)$. Различные адаптивные SQG-методы с адаптивными корректировками ρ_k как функциями G_k изучались в [12, 16]. Идея заключается в том, чтобы выбрать ρ_k таким образом, чтобы минимизировать $E[F(x^k - \rho\xi(k))|x^k]$. Это ведет к адаптивным модификациям ρ_k, пропорциональным скалярному произведению $<\xi(k+1), \xi(k)>$. Важный вопрос определения момента остановки и доверительных интервалов для аппроксимации решений также изучался в [12].

SQG-методы требуют соответствующей техники для доказательства сходимости. Они могут рассматриваться как случайный метод Ляпунова для анализа стабильности негладких динамических систем [1, 14, 15, 17]. Основная идея — показать, что $\{x^k(\omega)\}$ для всех ω оставляет окрестность точек, которые не принадлежат X^*, с убывающими значениями некоторых (в общем случае негладких) функций Ляпунова.

(iv) Описывается множество X и реализуется операция проектирования $\Pi_X(\cdot)$. С теоретической точки зрения ограничение $x \in X$, где $X = \{x | f_i(x) \le 0,$ $i = 1, 2, \ldots, m;$ $x_j \ge 0,$ $j = 1, \ldots, n\}$, удобно представлять одним неравенством $\psi(x) = \max\{\max_i f_i(x), \max_j(-x_j)\} \le 0$. Если множество X простое (например, параллелепипед или симплекс), то проектирование на X не вызывает затруднений. Если X задается линейными ограничениями, то проекция $\Pi_X(y^k)$ вектора $y^k = x^k - \rho_k s^k$ на множество X может быть найдена как решение задачи квадратичного программирования: $||y^k - x||^2 \to \min_{x \in X}$, которую можно решить с помощью стандартного математического обеспечения. Кроме того, предыдущую точку x^k можно взять как начальное приближение для процедуры квадратичного программирования. Есть и другие возможности учитывать линейные ограничения.

(v) Рассмотрим возможные модификации базового алгоритма. Что касается модификаций базовой процедуры (6), то прежде всего отметим метод Немировского–Юдина [18] для решения выпуклой задачи (1). Метод производит две последовательности $\{x^k, \bar{x}^k\}$, где x^k генерируется процедурой (6), а

$$\bar{x}^k = (1 - \sigma_{k+1})\bar{x}^{k-1} + \sigma_{k+1} x^k, \ \bar{x}^0 = x^0, \ \sigma_{k+1} = \rho_{k+1} \Big/ \sum_{i=1}^{k+1} \rho_i, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

При этом для любого k и детерминированных шагов ρ_k имеют место оценки

$$E_\omega F(\bar{x}^k) - F^* \le \frac{1}{2}\left(||x^0 - x^*||^2 + \mathrm{const} \sum_{i=1}^k \rho_i^2 \right) \Big/ \sum_{i=1}^k \rho_i .$$

Последовательность $\{\bar{x}^k\}$ лучше сходится к искомому минимуму, чем $\{x^k\}$: в методе (6), (14) можно использовать более крупные шаги ρ_k, например $\rho_k = \mathrm{const}/\sqrt{k+1}$, чем в начальном методе (6), где обычно $\rho_k = \mathrm{const}/k$.

1.2. Операции усреднения в методах стохастического программирования. Методы (6) и многие другие SQG-методы имеют ту же основную структуру, что и их детерминированные аналоги. Следующий метод стохастической линеаризации располагает существенно новой возможностью. Рассмотрим снова минимизацию $F(x)$, $x \in X$. Предположим что функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема, а X — выпуклый компакт. Этот метод задается итеративно следующим образом:

$$x^{k+1} = x^k + \rho_k(\hat{x}^k - x^k), 0 < \rho_k < 1, \tag{15}$$

$$\hat{\xi}(k+1) = \hat{\xi}(k) + \delta_k(\xi(k+1) - \hat{\xi}(k)), \tag{16}$$

$$\hat{x}^k \in \mathrm{argmin}\{\langle \hat{\xi}(k), x\rangle : x \in X\}, \ k = 0, 1, \ldots,$$

где x^0 — случайная начальная аппроксимация из X.

Известный детерминированный аналог имеет $\delta_k \equiv 0,\ \xi(k) \equiv F_x(x^k)$. Простой пример показывает, что без операции усреднения (16), т.е. $\delta_k \equiv 0$, метод (15) не сходится. Для сходимости нужно добавить к (13) условие

$$\delta_k \geq 0,\ \rho_k / \delta_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} E\delta_k^2 < \infty. \tag{17}$$

Метод (15) обычно используется, когда X определяется с помощью линейных ограничений. В этом случае линейная подзадача решается на каждом шаге k. В отличие от этого случая метод проекций (4) требует решения квадратичной подзадачи. Нужно учесть, что в обоих случаях на каждом шаге в целевой функции и функциях ограничений возникают только небольшие возмущения. Следовательно, необходимы небольшие поправки к решениям предыдущей задачи. Этот метод можно модифицировать для недифференцируемых функций и ограничений, в частности, использовать SMQG, как в (11), (12) (стохастические конечно-разностные аппроксимации), для локально-липшицевых функций.

Использование операции усреднения аналогично (16) часто решающее для сходимости методов SQG, их эффективности и устойчивости. Эти операции также применяются в отношении $\xi(k)$ в (6), где вместо $\xi(k)$ используется вектор $\hat{\xi}(k)$ такой, что для $k = 0, 1, \ldots$

$$\hat{\xi}(k+1) = \hat{\xi}(k) + \delta_k [\xi(k+1) - \hat{\xi}(k)], \qquad \hat{\xi}(0) = \xi(0).$$

Благодаря им процедура (6) приобретает свойства инерционности в дополнение к естественным глобальным свойствам, определяемым случайными механизмами. Усреднение также может уменьшить вариацию SQG.

1.3. Предельное поведение процессов стохастического программирования. Важное значение при определении доверительных областей для неизвестных параметров имеет нахождение асимптотических распределений итеративных последовательностей метода стохастических квазиградиентов и доказательство слабой сходимости случайных процессов, порожденных этими последовательностями. В частности, в [19] доказана слабая сходимость последовательности вероятностных мер, порожденных случайными процессами

$$x_n = s^{1/2}(x^s - x^t), \quad 1 \leq n \leq s \leq ne^t n + 1 \leq [ne^T],$$

к мере, индуцированной случайным процессом $x(t)$, являющимся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = (Ax(t) + \upsilon)dt + Ddw(t), \tag{18}$$

D — положительно-определенная матрица, A — невырожденная матрица.

Использовав распределение максимума для процесса $x(t)$, являющегося решением уравнения (18), можно построить и требуемую доверительную область для неизвестного параметра.

2. МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. SQG-методы. Данные методы применяются и к детерминированным, и к стохастическим минимаксным (SMM) задачам. SMM-задачи включают негладкие выборочные (случайные) целевые функции. Важный класс SMM-задач, который приведен в [1, 14], требует минимизации математического ожидания

$$F(x) = E \max_{y \in Y} g(x, y, \omega), x \in X, \tag{19}$$

где $f(x,\omega) = \max_{y \in Y} g(x, y, \omega)$ — выборочная (случайная) целевая функция, $X \subseteq R^n$, $Y \subseteq R^r$ и ω — элемент вероятностного пространства (Ω, Σ, P). Если Ω содержит единственную точку, то минимизация (19) соответствует стандартной детерминированной минимаксной задаче. Помимо детерминированных ограничений типа $x \in X$, задача (19) может иметь общие ограничения, заданные в терминах функций математического ожидания, некоторые из них могут иметь ту же структуру, что и функция математического ожидания $F(x)$ в (19). Множество Y может зависеть от (x, ω), как и в двухэтапном стохастическом программировании. Функции $f(x,\omega)$ в (19) часто имеют и более общую структуру, например в задачах управления рисками в случае катастрофических событий [20]. Прежде всего выборочная функция $f(\cdot, \omega)$ — это неявным образом заданная негладкая функция даже для линейной $g(\cdot, y, \omega)$. Поэтому все общие методы SQG, выведенные для общей задачи негладкой оптимизации (например, стохастических конечно-разностных аппроксимаций), применимы к задаче (1). Специальные SQG-методы используют свойства структуры целевой функции $f(x,\omega)$ следующим образом.

Пусть $y(x,\omega)$ — решение внутренней задачи максимизации в (19), т.е. $f(x,\omega) = g(x, y(x,\omega), \omega)$. Часто можно показать, что $g(\cdot, y, \omega)$ — легко аналитически вычисляемая GD (обобщенно-дифференцируемая) функция; следовательно, $f(\cdot, \omega) = \max_{y \in Y} g(\cdot, y, \omega)$ — GD-функция с субградиентом

$$f_x(\cdot, \omega) = g_x(\cdot, y(x,\omega), \omega), \tag{20}$$

т.е. SQG-функции $F(x)$. Например, если функция $g(\cdot, y, \omega)$ выпукла, то $f(\cdot, \omega)$ также выпукла и (20) определяет ее субградиент. Вектор $f_x(x,\omega)$ или его аппроксимации можно использовать в разных SQG-методах. Например, если $f(\cdot, \omega)$ — GD-функция, то метод SQG-проекций определяется как

$$x^{k+1} = \pi_X [x^k - \rho_k f_x(\bar{x}^k, \omega^k)], \; k = 0, 1, \ldots, \tag{21}$$

где $\bar{x}^k = x^k + \varepsilon^k$ и $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots$ — независимые случайные векторы с плотностями, $\|\varepsilon^k\| > 0$, $\varepsilon^k \to 0$ при $k \to \infty$ с вероятностью 1 и $\omega^0, \omega^1, \ldots$ — независимые наблюдения ω. Вектор $f_x(\bar{x}^k, \omega^k)$ — стохастический слабый квазиградиент $F(x)$ при $x = x^k$. Если $\rho_k \ge 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$ с вероятностью 1, $\sum_{k=0}^{\infty} E\rho_k^2 < \infty$ и X — выпуклый компакт, то $\{F(x^k)\}$ сходится с вероятностью 1 и предельные точки случайной последовательности $\{x^k\}$ с вероятностью 1 принадлежат связному множеству локальных решений [12, 13]. Сходимость (21) для $\varepsilon^k \equiv 0$ имеет место для так называемых [1, 14, 15] слабо выпуклых функций $F(x)$, т.е. таких, что $F(y) - F(x) \ge (F_x(x), y - x) + r(x, y)$, где $r(x, y)/\|x - y\| \to 0$, $x \to z$, $y \to z$. Для выпуклых $f(\cdot, \omega)$ последовательность $\{x^k\}$ при $\varepsilon^k \equiv 0$ сходится с вероятностью 1 к множеству оптимальных решений. Если функция распределения ω сконцентрирована в точке, то (19) сводится к стандартной детерминированной минимаксной задаче и (21) является для нее SQG-процедурой.

Пример 6. Планирование производства в условиях неопределенности. В условиях неопределенности будущего спроса, цен, коэффициентов ввода–вывода, доступных ресурсов и т.д. выбор объема производства $\bar{x} \ge x \ge 0$ для прогнозируемого спроса ω — задача принятия решений наудачу. Стоимость $f(x,\omega)$, связанная с переоценкой и недооценкой ω, является, в простейшем случае, случайной кусочно-постоянной линейной функцией

$$f(x,\omega)=\max\{\alpha(x-\omega),\beta(\omega-x)\},$$

где α — единица стоимости, связанная с излишком единицы продукции, а β — с ее недостатком. Задача состоит в нахождении значения x, «оптимального» в том смысле, что для всех предсказуемых значений спроса ω функции $x\to x(\omega)$ определяет оптимальный уровень производства. Критерий ожидаемой стоимости приводит к минимизации

$$F(x)=E\max\{\alpha(x-\omega),\beta(\omega-x)\} \tag{22}$$

по отношению к $\bar{x}\ge x\ge 0$ для заданного верхнего предела $\bar{x}$. Такую задачу стохастической оптимизации можно переформулировать как двухэтапную модель стохастического программирования, известную как задача разносчика газет.

Функция $F(x)$ в (22) выпукла; следовательно, метод (21) при $\varepsilon^k\equiv 0$ сводится к следующему:

$$x^{k+1}=\min\{\max\{0,x^k-\rho_k\xi(k)\},\bar{x}\},\ k=0,1,\dots, \tag{23}$$

где $\xi(k)=\alpha$, если текущий уровень производства x^k превышает наблюдаемый спрос ω^k $(x^k\ge\omega^k)$, и $\xi(k)=-\beta$ в противном случае. Метод (23) можно рассматривать как адаптивную процедуру, которая может изучать уровень оптимального производства через последовательные правки к текущим значениям $x^0,x^1,\dots$ в зависимости от наблюдаемого спроса $\omega^0,\omega^1,\dots$ Обратим внимание, что оптимальное решение (22) и более общие SMM-задачи дают характеристики квантильного типа для решений, т.е. меры риска CVaR [21]. Если, например, распределение ω имеет плотность $\alpha>0$, $\beta>0$, то оптимальное решение x, минимизирующее (22), — это квантиль, определенный как $\Pr[\omega\le x]=\beta/(\alpha+\beta)$. Следовательно, процесс (23) — процедура ограниченной последовательной оценки [14]. Задача (22) иллюстрирует значительное отличие между методом, подразумевающим прямые вычисления $x(\omega)$, и подходом, в котором вместо продуцирования тривиальных оптимальных решений $x(\omega)=\omega$ для любого сценария ω получаем решение, оптимальное («устойчивое») для всех возможных ω.

Пример 7. Стохастическая модель размещения производства. Эта модель [14, 22] обобщает пример 6 и иллюстрирует возможное влияние поведения основных вероятностных распределений. Предположим, что потребители живут в регионе i и выбирают целевой регион j с вероятностью P_{ij}, связанной со стоимостью путешествия между точками (i, j) и (или) другими факторами. Пусть ε_{ij} — случайное число поездок пользователей из i в j и τ_j — общее число пользователей, достигших j: $\tau_j=\sum_{i=1}^m\varepsilon_{ij}$, $j=1{:}n$, $\sum_{j=1}^n\varepsilon_{ij}=a_i$, $i=1{:}m$. Реальное число τ_j потребителей, попавших в j, может не равняться x_j. Случайная стоимость, связанная с переоценкой или недооценкой спроса τ_j в регионе j, может быть выпуклой функцией $\alpha_j(x_j-\tau_j)$ для $x_j\ge\tau_j$ или $\beta_j(\tau_j-x_j)$ для $x_j<\tau_j$. Задача состоит в том, чтобы определить значение x_j, минимизирующее ожидаемую стоимость

$$F(x)=\sum_{j=1}^n E\max\{\alpha_j(x_j-\tau_j),\beta_j(\tau_j-x_j)\},$$

где $\bar{x}_j \geq x \geq 0$. SQG-процедура для решения данной задачи аналогична (23). Примечательно, что приложение SQG-методов для пространственных минимаксных задач размещения [23], в отличие от дискретных схем аппроксимации, не влияет на выпуклость.

2.2. Принятие решений в условиях предельных случаев. Стандартная теория предельных случаев изучает поведение максимума $\max(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ для последовательности $\theta_1, \ldots, \theta_n$, $n \geq 2$. Целевая функция (19) определяется максимумом взаимозависимых случайных переменных $g(x, y, \omega)$, $y \in Y$, которые зависят также от управляющей переменной x. Задачу (19) можно рассматривать как модель принятия решений в предельных случаях, когда два типа неопределенных переменных y, ω влияют на результат $g(x, y, \omega)$ принятия решений x. Неопределенность в отношении y оценивается из экстремального случайного сценария, в то время как ω рассматривается как случайная величина. Следовательно, (19) — гибридная задача, объединяющая чисто детерминистский минимаксный подход, принимающий форму минимизации $F(x) = \max\{g(x, y, \omega) | \, y \in Y, \omega \in \Omega\}$, и чисто вероятностный байесовский подход минимизации функции ожидания $F(x) = Eg(x, y, \omega)$ для некоторого общего распределения величин (y, ω). Такие SQG-процедуры, как (21), можно рассматривать как адаптивный поиск робастных решений, принимаемых исходя из отклика среды (моделирования) $\omega^0, \omega^1, \ldots$

2.3. Асимметричная информация. Следующая интерпретация приводит к различным важным обобщениям задачи SMM (19). Рассмотрим двух агентов и целевую функцию $g(x, y, \omega)$. Агент 1 выбирает действие $x \in X$, не зная выбора $y \in Y$ агента 2 и состояния окружающей среды ω. Агент 2 выбирает действие y после агента 1, будучи информированным о значениях x, ω. Функция $F(x)$ в (19) — гарантированный ожидаемый результат агента 1 для действия x. Если агент 2 не знает состояния ω перед выбором действия y, задача агента 1 состоит в минимизации

$$F(x) = \max_{y \in Y} Eg(x, y, \omega). \tag{24}$$

Функция $F(x)$ в (24) нелинейна. Расчет F в любой точке требует решения своей оптимизационной подзадачи, т.е. это вложенная задача, которую можно решить с помощью методов SQG и операции усреднения.

Пример 8. Точная штрафная функция. Данный метод также вкладывается в общую теорию SQM. Для $F_i(x) = Ef_i(x, \omega)$, $i = 0, 1, \ldots$, он соответствует решению особого случая задачи (23): минимизации точной штрафной функции

$$F(x) = Ef_0(x, \omega) + C \sum_{i=1}^{m} \max\{0, Ef_i(x, \omega)\}$$

для общей задачи стохастического программирования.

2.4. Выпукло-вогнутые математические ожидания. Предположим, что функция $\varphi(x, y) = Eg(x, y, \omega)$ выпукла по x и вогнута по y, а X, Y — компактные выпуклые множества. Пусть

$$x^{k+1} = \pi_X [x^k - \rho_k g_x(x^k, y^k, \omega^k)], \quad y^{k+1} = \pi_X [y^k + \rho_k g_y(x^k, y^k, \omega^k)], \tag{25}$$

где g_x, g_y — субградиенты $g(x, y, \omega)$ по отношению к x, y соответственно. Для поиска седловых точек $\varphi(x, y)$ в $X \times Y$ применим метод SQG-проекции — стохастический аналог метода Эрроу–Гурвица. Сходимость последовательностей $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ к седловым точкам требует достаточно строгих предположений на $\varphi(x, y)$, например условия строгой выпукло-вогнутости. Можно показать, что для нелинейных функций $\varphi(\cdot, y)$, $\varphi(x, \cdot)$ последовательности $\{x^k\}, \{y^k\}$ не сходятся при любом выборе размера шага ρ_k, за исключением некоторых особых случаев. Сходимость последовательностей $\sum_{s=0}^{k} \rho_s x^s / \sum_{s=0}^{k} \rho_s$, $\sum_{s=0}^{k} \rho_s y^s / \sum_{s=0}^{k} \rho_s$, $k \to \infty$, с вероятностью 1 к седловой точке $\varphi(x, y)$ имеет место при стандартных предположениях на ρ_k, гарантирующих сходимость метода SQG-проекции для выпуклой задачи [16]. Другая возможность — модифицировать (25), используя общие идеи общего метода или его вариации [24].

Пример 9. Конечное множество *Y*. Рассмотрим задачу (24) с конечным множеством Y, т.е. предположим, что $F(x) = \max_{1 \le i \le r} Eg_i(x, \omega)$. Эта задача эквивалентна минимизации $F(x) = \max_{y \in Y} E \sum_{i=1}^{r} y_i g_i(x, \omega)$ с выпукло-вогнутым математическим ожиданием $Y = \left\{ y_i \ge 0, \sum_{i=1}^{r} y_i = 1 \right\}$.

Возможны дальнейшие усовершенствования стохастических минимаксных задач. Сочетание моделей (19), (24) дает минимизацию

$$F(x) = \max_{y \in Y} E \max_{z \in Z} g(x, y, z, \omega). \qquad (26)$$

Если $g(x, y, z, \omega)$ выпукла по x и вогнута по y, а X, Y — выпуклые компакты, то процедура (25) применима также для решения (26), если $g_x(x^k, y^k, \omega^k)$, $g_y(x^k, y^k, \omega^k)$ заменить на $g_x(x^k, y^k, z^k, \omega^k)$, $g_y(x^k, y^k, z^k, \omega^k)$, где z^k — решение детерминированной подзадачи $g(x^k, y^k, z^k, \omega^k) = \max_{z \in Z} g(x^k, y^k, z, \omega^k)$.

2.5. Стохастическое равновесие Неша. Стохастическое равновесие игры с N участниками на $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$ можно определить, используя функции выигрышей $\Psi_i(x) = E\psi_i(x, \omega)$, $x \in X$. Обозначим $(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ через $(y_i | x)$. Точку $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \in X$ называют равновесным состоянием Неша, если $\Psi_i(x^*) = \min\{\Psi_i(y_i | x^*) | (y_i | x^*) \in X\}$. Введем функцию $L(x, y) = \sum_{i=1}^{N} [\Psi_i(x) - \Psi_i(y_i | x)]$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Точка $x^* \in X$ — нормализованное равновесное состояние, если $\max_{y \in X} L(x^*, y) = 0$. Поскольку $\max_{y \in X} L(x, y) \ge 0$, поиск случайно нормализованного равновесного состояния сводится к задаче SMM: минимизировать

$$F(x) = \max_{y \in X} L(x, y), x \in X.$$

Важную дополнительную информацию о том, что $\min_{x \in X} F(x) = 0$, можно эффективно использовать при поиске общего решения методами SQG. Предположим, что $L(x, y)$ — выпукло-вогнутая функция для $x \in X$, $y \in X$. Тогда процедура (25) примет вид

$$x_i^{k+1} = \pi_X [x_i^k - \rho_k \psi_{ix_i}(x^k, \omega^k)], \ i = 1:N, \ k = 0, 1, \ldots,$$

где ψ_{ix_i} — субградиент $\varphi_i(x, \omega)$ по отношению x. Условия сходимости аналогичны используемым в методе (25). Эти методы для изучения равновесного состояния Неша используют адаптивно регулируемую процедуру [16, 25].

Пример 10. Случайная олигополия Курно. Классическая модель олигополии Курно [25, 26] является ключевой моделью современной теории промышленной организации. Обобщая ее на производство разных товаров, получим модель следующего вида. Компания i производит пакет предметов потребления $x_i \in R^n$, соответствующая выпуклая случайная стоимость производства составляет $c_i(x_i, \omega)$, а случайный рыночный доход $p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j, \omega), x_i\right)$, где $p(Q, \omega)$ — стоимость, при которой общий спрос Q равен общему объему поставок $\sum_{j=1}^{n} x_j$. Предположим, что $p(Q, \omega) = a - A(\omega)Q$, где $a \in R^n$ и $A(\omega)$ — $n \times n$ положительно-полуопределенная матрица (почти для всех ω). Тогда для $\Psi_i(x, \omega) = c_i(x_i, \omega) - (a, x_i) + \sum_{j=1}^{n} (A(\omega)x_j, x_i)$ функция $L(x, y)$ выпукло-вогнута.

2.6. Стохастическая оптимизация с неизвестными распределениями. Вероятностная мера P стандартной задачи стохастического программирования предполагается сосредоточенной на подмножествах A пространства Ω в том смысле, что можно генерировать выборки $\omega^0, \omega^1, \ldots$ случайных величин ω из P. На практике вероятностная мера P может не быть точно известна: имеются данные о некоторых ее характеристиках, в частности ограничениях на среднее или другие моменты. Такие данные обычно даются в виде ограничений

$$Q_s(x, P) = \int_{\Omega} q_k(x, \omega) P(d\omega) \le 0, \quad s = 1{:}K, \tag{27}$$

$$\int_{\Omega} P(d\omega) = 1, \tag{28}$$

где $q_k(x, \omega)$ — известные функции (которые часто не зависят от x), например как в ограничениях $c_{r_1, \ldots, r_l} \le E\omega_1^{r_1} \ldots \omega_l^{r_l} \le C_{r_1, \ldots, r_l}$ с известными константами c, C. Если неизвестная вероятностная мера оценивается из худшего (по отношению к ограничениям) случая (27), (28), то нашу задачу можно сформулировать в виде SMM: найти вектор x, минимизирующий

$$F(x) = \max_{P \in \mathbf{P}} \int f(x, \omega) P(d\omega), \tag{29}$$

где $\mathbf{P}$ — семейство вероятностных мер, определенных (27), (28). Решение «внутренней» подзадачи в (29) определяет вероятностную меру $P^*(x, d\omega)$. Важно, что $P^*(x, \cdot)$ сконцентрирована не более чем в $K+1$ точках [27, 28], и этот факт можно эффективно использовать для планирования процедуры решения. Другой важный подход — использование двойственных соотношений [28]

$$F(x) = \max_{u \ge 0, \omega \in \Omega} [f(x, \omega) + \sum_{s=1}^{K} u_s q_s(x, \omega)] \tag{30}$$

для внутренней задачи максимизации в (29).

Еще один важный класс случаев возникает при дальнейшей спецификации неопределенностей, связанных с мерой P. Предположим, случайные параметры можно разделить на две группы (ω, ν) с совместной функцией распределения $H(\omega, \nu)$ вида $dH(\omega, \nu) = h(\omega, \nu) P(d\omega) \mu(d\nu)$, где $P(d\omega)$ точно неизвестно, но удовлетворяет (27), (28). Если P берется из худшего случая, задачу можно переформулировать как задачу минимизации:

$$F(x) = E[\max_{P \in \mathbf{P}} E_{x,y} f(x, \omega, \nu)] =$$

$$= \int [\max_{P \in \mathbf{P}} \int f(x, \omega, \nu) h(\omega, \nu) P(d\omega)] d\mu(\nu). \tag{31}$$

Используя соотношения двойственности, аналогичные (30), (31), задачу можно переформулировать как минимизацию вида (19) функции

$$F(x) = \int \max_{u \geq 0, \omega \in \Omega} . \tag{32}$$

Пример 11. Неполные данные о функции стоимости. Рассмотрим (31) для функции стоимости $F(x) = (Ec, x)$, $x \in X$, где c — случайный вектор, $c = c(\omega, \nu)$, и функции q_k в (27) не зависят от x. Тогда задачу (32) можно сформулировать в терминах минимизации

$$F(x) = \int \max_{u \geq 0, \omega \in \Omega} [(c(\omega, \nu), x) h(\omega, \nu).$$

Здесь $F(x)$ — выпуклая функция, а SQG определяется соотношением (20).

Сложность обсуждаемой здесь SMM-задачи возникает вследствие вложенной структуры целевой функции. Во многих случаях она включает подзадачи детерминированной оптимизации под знаком математического ожидания. В приложениях эти подзадачи часто имеют специальную структуру, например допустимое множество можно свести к конечному числу альтернативных вариантов (как в примере 9). В случае бесконечного допустимого множества они могут быть последовательно приближены случайными конечными множествами с конечным числом элементов на каждом шаге $k = 0, 1, \dots$ SQG-процедуры, как показано в [28]. Для практических приложений важно понимать, что модели (19), (24), (26), (29), (31) фактически сформулированы при разных предположениях на сценарий худшего случая. Например, в (29) оценка находится для худшего случая ожидаемого выхода, а (19) рассматривает худший случай случайных сценариев.

3. НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

3.1. Негладкие задачи. Общие аргументы использования SQG-методов для негладких задач требуют специального обсуждения и обоснования. Достаточно продуктивным и интересным оказался подход к решению негладких задач, основанный на процедурах сглаживания и усреднения в определенном смысле. В настоящее время большой интерес представляет класс задач с так называемыми обобщенно-дифференцируемыми GD-функциями [1, 13, 29–31]. Класс GD-функций замкнутый по отношению к операторам min, max и их суперпозиции. Для множества субградиентов ∂f справендлива формула

$$\partial \max\{f_1(x), f_2(x)\} = \operatorname{co}\{\partial f_i(x) = \max(f_1, f_2)\}, \tag{33}$$

и субградиенты сложной функции $\Psi(f_1, \dots, f_r)$ вычисляются по очевидным и известным цепным правилам. Класс GD-функций также замкнут по отношению к оператору математического ожидания

$$\partial F(x) = E \partial f(x, \omega), F(x) = Ef(x, \omega), \tag{34}$$

где $f(\cdot, \omega)$ — GD-функция.

Отметим, что класс GD-функций содержит функции, непрерывно дифференцированные, выпуклые, вогнутые, полугладкие и замкнутые относительно операций максимума, минимума, суперпозиции и взятия математического ожидания. Для минимизации GD-функций обоснованы обобщенно-градиентный и стохастический обобщенно-градиентный методы. Формулы (33), (34) дают полезный инструмент для вычисления субградиента. К сожалению, для общего класса негладких функций их прямое использование усложнено и в некоторых случаях непродуктивно. Наиболее эффективно использование метода SMQG аналогично (11), (12).

3.2. Системы с дискретными событиями. Многие системы с дискретными событиями имеют разрывные показатели функционирования (длины очередей в системах массового обслуживания, время обслуживания в системах с отказами и регенерацией, уровни запасов при случайном спросе в экономических системах). Локальная оптимизация этих систем требует совершенно нового аналитического аппарата и соответствующих численных методов. Любая задача стохастической оптимизации является сама по себе задачей многокритериальной оптимизации: по сути, каждой реализации случайных параметров (сценарию) соответствует своя целевая функция и свое решение. В стохастическом программировании, как правило, агрегируют эти случайные целевые функции с помощью операций математического ожидания. Однако это не единственный способ построения обобщенной целевой функции. Другая важная функция такого рода — функция вероятности, выражающая вероятность того, что некоторая случайная величина, зависящая от непрерывных и дискретных параметров, не превышает заданной границы или принадлежит заданной области. С помощью функций вероятности описывают надежность технических систем, риск в экономике и бизнесе. Функции вероятности и математического ожидания являются частными случаями функций ожидаемой полезности, с помощью которых формулируются задачи принятия решений при неопределенности. Функции ожидаемой полезности могут быть невыпуклыми, негладкими и даже разрывными и, следовательно, требуют специальных методов оптимизации.

При оптимизации систем с дискретными событиями возникает вопрос о глобальной оптимизации системы, поскольку оптимизирующиеся функции вообще невыпуклые. Можно было бы применить общеизвестные методы глобальной оптимизации, но это усложняется тем, что функции, подлежащие оптимизации, представляют собой математические ожидания, т.е. многомерные интегралы, и их точное вычисление либо очень трудоемко, либо практически невозможно. Поэтому необходимы особые подходы к глобальной оптимизации таких стохастических систем. Большинство классических задач исследования операций, которые часто формулируются как задачи дискретного (или смешанного) программирования (задача о рюкзаке, о назначении, о расположении, о распределении ресурсов и др.), в общем случае могут содержать случайные параметры. При этом они должны быть переформулированы как задачи стохастического дискретного программирования (одно-, двух- или многоэтапного, с вероятностными ограничениями, с функциями риска). Формально задача дискретного стохастического программирования — это задача выбора, например, минимального математического ожидания из конечного (астрономического) множества вариантов.

Рассмотрим некоторые важные задачи, связанные с этой проблематикой.

Задачи с вероятностными ограничениями. Задача

$$f(x) \to \min_x \tag{35}$$

при вероятностном ограничении

$$\mathbf{P}\{g(x,\omega) \le 0\} \ge 1-\beta \tag{36}$$

может быть приближена следующей простой задачей без ограничений (с параметром штрафа N):

$$F(x) = f(x) + N\,\mathbf{E}\max\{0, g(x,\omega)\} \to \min_x, \tag{37}$$

где $\mathbf{E}\max\{0, g(x,\omega)\} = \mathbf{E}g(x,\omega) I\{g(x,\omega) \ge 0\}$. В работах [32, 33] такая замена использовалась для оптимизации портфеля договоров страхования при ограничениях на вероятность банкротства компании страховки. Случайная величина

$\max\{0, g(x,\omega)\}$ может интерпретироваться как величина заимствования для покрытия положительных потерь $g(x,\omega)$, а N — цена за такое заимствование. Оказывается, что задачи (35), (36) и (37) тесно связаны. Например, в [32, 33] оптимальное значение (35), (36) может быть приближено оптимальным значением (37) с некоторым большим параметром $N(\beta)$ штрафа.

Квантили и условные средние при заданном риске. Важным для финансовых приложений является специальный случай задачи (35), (36) — минимизация квантиля заданного уровня

$$Q_\beta(x) = \min\{y \mid \mathbf{P}\{g(x,\omega) \le y\} \ge 1-\beta\} \to \min_x . \tag{38}$$

Вместо (38) снова можно решать задачу минимизации штрафной функции (37):

$$F(x, y) = y + N\,\mathbf{E}\max\{0, g(x,\omega) - y\} \to \min_{x,y}, \tag{39}$$

которая является специальным случаем стохастических минимаксных задач. Из условий оптимальности для этой проблемы следует, что оптимальное значение y (для данного x) — это $1/N$ квантиль случайной величины h.

Условное среднее при риске β (CVaR — conditional value at risk) определяется так:

$$C_\beta(x) = \frac{1}{\beta}\mathbf{E}g(x,\omega)I\{g(x,\omega) - Q_\beta(x) \ge 0\}.$$

Минимизация $C_\beta(x)$ при естественных предположениях эквивалентна [21] следующей выпуклой задаче стохастического программирования:

$$R(x,\alpha) = y + \frac{1}{\beta}\mathbf{E}\max\{0, g(x,\omega) - y\}\} \to \min_{y,x}.$$

Таким образом, CVaR-минимизация (40) имеет форму (39) при $N = \dfrac{1}{\beta}$.

Проблему (39) можно интерпретировать экономически. Предположим, что $g(x,\omega)$ представляет стохастические дополнительные потери в зависимости от решения x и случайного параметра ω. Эти потери покрываются за счет заблаговременного заимствования средств в размере y при процентной ставке 1 и постфактум в размере $\max\{0, g(x,\omega) - y\}$ по ставке N. Такая стратегия поведения обеспечивает большую гибкость по сравнению с чисто детерминированным решением x, как в (35), (36).

Процесс риска. Классический дискретный процесс риска описывает изменение во времени резервов $R_t(x)$ страховой компании:

$$R_{t+1}(x) = R_0 + \Pi_t(x) - C_t(x), \quad t = 0, 1, \ldots, T,$$

где $R_0 \ge 0$ — начальный капитал компании, $\Pi_t(x)$ — взносы страхования и $C_t(x)$ — случайные агрегированные выплаты до момента t, включая налоги, дивиденды и т.д., x — вектор решений. Функции $\Pi_t(x)$, $C_t(x)$ считаются непрерывно дифференцированными (или обобщенно дифференцированными) по x. Компоненты вектора x могут включать параметры портфеля активов и контрактов страхования [32, 33].

Проблема состоит в том, чтобы оптимизировать работу компании на временном горизонте $[0, T]$ с помощью набора индикаторов, например:

- случайное время остановки

$$\tau(x) = \max\{t \in [0, T]: R_s(x) \ge 0 \;\; \forall\, s,\;\; 0 \le s < t\}, \tag{40}$$

которое называют моментом неплатежеспособности, если $\tau(x) < T$, либо $R_{\tau(x)=T}(x) < 0$;

• вероятность банкротства на интервале времени $[0, T]$

$$\mathbf{P}(\cdot) = \mathbf{E}(1 - I\{R_t(x) \geq 0,\ 0 \leq t \leq T\}); \tag{41}$$

• частичная ожидаемая прибыль (на траекториях выживания)

$$F_T(x) = \mathbf{E} R_T(x) I\{R_t(x) \geq 0, 0 \leq t \leq T\}; \tag{42}$$

• ожидаемая отрицательная глубина банкротства

$$H_T(x) = \mathbf{E} \min\{0, R_{\tau(x)}(x)\} = \mathbf{E} \sum_{t=0}^{T} R_t(x) I\{R_\tau \geq 0, 0 \leq \tau < t;\ R_t(x) < 0\}; \tag{43}$$

• критерий стабильности

$$S_T(x) = \mathbf{P}\{R_t(x) \geq (1-\varepsilon)\mathbf{E} R_t(x), 0 \leq t \leq T\} =$$

$$= \mathbf{E} I\{R_t(x) \geq (1-\varepsilon)\mathbf{E} R_t(x), 0 \leq t \leq T\}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \tag{44}$$

Критерий стабильности оценивает вероятность того, что компания развивается не намного хуже, чем средняя траектория. Структура этого критерия подобна (41). Отметим, что функция $\tau(x)$ может быть разрывная по x. Это может вызвать разрывность всех функций (41)–(44).

Условие А. Для любой фиксированной точки $x \in X$, $t \in [0, T]$ и $c, \delta \geq 0$

(i) $\mathbf{P}\{R_t(x) = c\} = 0$;

(ii) для $\mathbf{P}\{R_t(x) \in [c-\delta, c+\delta]\} \leq L\delta$ некоторой константы $L > 0$.

В условиях A(i) упомянутые выше индикаторы непрерывны, а в условиях A(ii) — липшицевы в X [13].

Разрывные функции полезности и риска. С введением неопределенности и рисков полная оценка решения x зависит от соотношения между различными социально-экономическими и экологическими индикаторами (расходы, выгоды, доходы, убытки) и индикаторами рисков. Достаточно полно этот класс задач и соответствующий класс мер риска описан в [34]. Классический пример — эффективные стратегии по критериям среднее–дисперсия, обеспечивающим баланс между средними ожидаемыми доходами по всем инвестициям и дисперсией. К сожалению, концепция эффективных стратегий по критериям средний доход–дисперсия может вводить в заблуждение и даже быть ошибочной для ненормальных распределений вероятности (особенно для катастрофических рисков), которые требуют сложных индикаторов риска и соответствующих понятий устойчивых стратегий. Точнее, на практике данное решение x приводит к разным результатам $f(x, \omega) = (f_1(x, \omega), \ldots, f_m(x, \omega))$, которые зависят от некоторых неопределенных (случайных) переменных ω. Формально оценку решения x можно представить в виде функции математического ожидания

$$U(x) = \mathbf{E} u(f_1(x, \omega), \ldots, f_m(x, \omega)),$$

где $u(\cdot)$ — функция полезности, определенная на $f \in R^m$. Эффективные решения по критериям среднее–дисперсия, которые максимизировали $\mathbf{E} f(x, \omega) - N\mathbf{E}[f(x, \omega) - \mathbf{E} f(x, \omega)]^2$, $N > 0$, можно получить максимизацией функции полезности того же типа:

$$\max_{x, y} \mathbf{E}[f(x, \omega) - N(f(x, \omega) - y)^2].$$

Традиционно функция полезности считается непрерывной и дифференцированной. Легко видеть, что все рассмотренные в этом разделе функции риска могут быть представлены в той же форме, но с негладкими и даже разрывными функциями полезности. Например, если $u(\cdot)$ — индикаторная функция для события $\{f \in R^m \mid f \geq c\}$, то $U(x) = \mathbf{P}\{f(x,\omega) \geq c\}$.

Если

$$u(f_1, f_2) = f_1 I\{f_2 \geq 0\} = \begin{cases} 0, & f_2 < 0, \\ f_1, & f_2 \geq 0, \end{cases}$$

то получаем функцию $U(x) = \int\limits_{f_2(x,\omega)\geq 0} f_1(x,\omega)\mathbf{P}(d\omega)$. В частном случае $f_1(x,\omega) \equiv f_2(x,\omega) = f(x,\omega)$ имеем $U(x) = \mathbf{E}\max\{0, f(x,\omega)\}$.

Функции $U(x)$ с негладким и разрывным подынтегральным выражением $u(\cdot)$ могут быть универсальным средством для анализа весьма различных проблем управления рисками. Другими словами, можно называть такие функции, как $U(x)$, случайными функциями риска, или обобщенными функциями полезности. Можно назвать $U(x)$ также обобщенной ожидаемой функцией полезности. Заметим, что хотя индикаторы (41)–(44) определены с помощью времени остановки $\tau(x)$, они могут быть также выражены в виде $\mathbf{E}u(R_0, R_1(x), \ldots, R_T(x))$ с некоторой разрывной функцией $u(\cdot)$.

3.3. Невыпуклые задачи. Ряд практических задач, таких как оптимизации технических систем, подверженных дискретному вмешательству случая, приводят к невыпуклым негладким (и даже разрывным) целевым функциям [11]. Такие приложения требуют обобщения метода стохастических квазиградиентов на невыпуклые задачи.

Пример 12. Минимаксный принцип принятия решений при стохастической неопределенности приводит к следующей задаче:

$$\min_{x\in X}[F(x) = E\max_{y\in Y} f(x, y, \omega)],$$

где $f(x, y, \omega)$ — непрерывно дифференцированная по x для всех (y, ω) (не обязательно выпуклая) функция, выражающая потери при решении x, внешних детерминированных факторах $y \in Y$ и внешнем случайном факторе ω, X и Y — некоторые множества. Если функция $f(x, y, \omega)$ не является выпуклой по x (скажем, только непрерывно дифференцированная по x), то целевая функция $F(x)$ также может быть невыпуклой.

Пример 13. Задача оптимизации среднего времени жизни сети имеет вид

$$\max_{x\in X}[F(x) = E\max_{p\in P}\min_{e\in p} f_{ep}(x)],$$

где p — путь из множества сетей P, соединяющих вход и выход сети, $f_{ep}(x)$ — случайное время жизни элемента e пути p. В этом случае функция (полезности) $u(t) = \max_{p\in P}\min_{e\in p} t_{ep}$ невыпуклая и негладкая. Проблема заключается в вычислении обобщенных стохастических градиентов функции $F(x)$ и нахождении локального и/или глобального минимума $F(x)$ на X. Другие примеры невыпуклых негладких задач оптимизации стохастических систем с дискретными событиями обсуждаются в [11, 13], где показано, что наличие операций максимума и минимума в выражениях для временных характеристик систем с дискретными событиями типична.

Пример 14. Рассмотрим производственную систему (линию), состоящую из $i = 1, 2, \ldots, n$ последовательно соединенных станков. Деталь, которая поступает на линию в случайный момент времени θ_0, последовательно обрабатывается каждым станком. При этом время обработки θ_i детали i-м станком случайно. Пусть переменная x_i обозначает момент включения i-го станка, y_i — момент, когда обработанная деталь покидает станок i. Пусть a_i и b_i обозначают расходы системы (в единицу времени), связанные с ожиданием включения i-го станка и обработки детали этим станком соответственно. Тогда общие случайные расходы системы $f^n(x, y, \theta)$ можно вычислить последовательно:

$$f^i(x, y) = f^{i-1}(x, y) + \max\{a_i(y_i - x_i, b_i(x_i - y_i)\},$$

$$f^0 = 0, \ \ y^i = \max\{y^{i-1}, x^i\} + \theta_i$$

для $i = 1, \ldots, n$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Таким образом, функции $f^i(x, y)$ строятся с помощью операций max и min (– max) и поэтому являются невыпуклыми и негладкими. Разрывные функции издержек возникают в случае периодически работающих или отказывающих станков. Проблема заключается в локальной и/или глобальной минимизации функции ожидаемых затрат $F(x) = Ef^n(x, y)$ при ограничениях $x_1, \ldots, x_n$.

Пример 15. Функция вида $F(x) = \boldsymbol{E}u(f(x\omega))$ называется функцией ожидаемой полезности, где $u(\cdot)$ выражает полезность (для лица, принимающего решение) разных значений функции выигрыша $f(\cdot, \cdot)$, зависимой от решения x и случайных факторов ω. Очевидно, функция полезности $u(f(x\omega))$ может быть невыпуклой по x даже в случае выпуклой функции $f(x\omega)$. Если $u(\cdot) = \chi(\cdot)$, где $\chi(t) = \{0$ для $t < 0$ и 1 для $t \geq 0\}$, то соответствующая функция ожидаемой полезности $F(x)$ совпадает с функцией вероятности $P(x) = P\{f(x, \omega) \geq 0\}$. Очевидно, функция вероятности может быть негладкой и даже разрывной.

Функция $u(\cdot)$ может быть функцией принадлежности $(0 \leq u(\cdot) \leq 1)$ значений векторного критерия f некоторой размытой целевой области, тогда $u(f(x\omega))$ выражает степень достижения размытой цели для решения x, а $F(x) = Eu(f(x, \omega))$ — ожидаемую степень достижения размытой цели.

Оптимизационные задачи для приведенных примеров имеют вид

$$\min x \in X[F(x) = \boldsymbol{Ex}f(x, \omega)], \tag{45}$$

где x — вектор управляемых/оптимизируемых переменных, ω — случайный параметр, определенный на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P), $f(x, \omega)$ и $F(x)$ — случайная и ожидаемая функции эффективности, X — допустимое множество из R^n. В этих задачах существенно, что функция $f(\cdot, \omega)$ не имеет хороших аналитических свойств, в общем случае она может быть невыпуклой, негладкой и даже разрывной.

В некоторых задачах функция математического ожидания $F(x) = \mathbf{E}f(x, \omega)$ может быть гладкой, несмотря на негладкие подынтегральные функции $f(x, \omega)$. Тогда для оптимизации $F(x)$ можно применить классический метод стохастической аппроксимации. Отметим, что гладкость функции $F(x) = \mathbf{E}f(x, \omega)$ может быть разной, в частности $F(x)$ может быть дифференцированной, но не непрерывно дифференцированной. В последнем случае необходимо использовать методы и идеи негладкой оптимизации.

3.4. Стохастическая непараметрическая оптимизация и робастные байесовские оценки. Этот класс задач тесно связан с исследованием байесовских оценок в случае, когда отсутствует полная информация об априорном распределении, однако имеется информация о принадлежности априорного распределения некоторому классу функций. Такая ситуация возникает, например, при оценивании неизвестных параметров надежности високотехнологических систем, когда статистические выборки, которые касаются отказов элементов системы, очень малы и поэтому нет возможности адекватно выбрать то или другое априорное распределение. В этих условиях проблема вычисления байесовских оценок нетривиальна. При выборе априорной функции распределения специалисты часто руководствовались соображениями простоты математического аппарата, с помощью которого вычисляются байесовские оценки, используя при этом так называемые сопряженные оценки. Однако этот поход очень часто приводит к серьезным ошибкам.

Во избежание произвольного выбора априорной функции распределения предложен минимаксный подход. Основная его идея состоит в том, что задается целый класс априорных функций распределения и выбирается оценка, которая минимизирует супремум целевового функционала в этом классе функций. Разработаны методы решения этих достаточно сложных задач стохастической оптимизации в функциональных пространствах, алгоритмы их численной реализации, проведены вычислительные эксперименты. Особое внимание уделялось случаю, когда имеются ограничения на моменты или квантили. При этом доказано, что задача стохастической оптимизации сводится к задаче линейного программирования. Вычислены робастные байесовские оценки, нижние и верхние пределы для оценок, которые являются мерой неопределенности, порожденной ограниченной априорной информацией. Показано, что при решении конкретных задач оценивания параметров надежности предложенные методы существенно улучшают качество этих оценок.

Таким образом, в зависимости от вида ограничений на функции распределения оптимизационные задачи, сформулированные выше, можно класифицировать следующим образом.

1. Задачи оптимизации линейных функционалов в классе функций распределения, удовлетворяющих линейным ограничениям в виде равенств:

$$\varphi(H)=\int_X f_0(x)dH(x)\to \inf\ (\sup), \tag{46}$$

при ограничениях

$$\int_X dH(x)=1, \tag{47}$$

$$\psi_i(H)=\int_X f_i(x)dH(x)\le a_i,\ i=1,2,\dots,m, \tag{48}$$

где X — компактное множество в пространстве R^n.

2. Задачи оптимизации линейных функционалов (24) в классе функций распределений, имеющих фиксированные m первых моментов

$$\int_a^b dH(x)=1,\quad \int_a^b x^i dH(x)=\mu_i,\ \ i=1,\dots,m,\quad -\infty<a<b<\infty. \tag{49}$$

(заметим, что задачи (46)–(49) частично обсуждались в разд. 2.6).

3. Задачи оптимизации дробно-линейных функционалов

$$\varphi(H)=\frac{\int_X g_1(x)dH(x)}{\int_X g_2(x)dH(x)}\to \inf\ (\sup) \tag{50}$$

в классе функций распределений, удовлетворяющих линейным ограничениям типа неравенств (47), (48).

4. Задачи оптимизации дробно-линейных функционалов (50) (где $X=[a,b]$) в классе функций распределения, имеющих фиксированные m первых моментов (49).

5. Минимаксные задачи с дробно-линейным функционалом

$$\inf_y \, (\sup_H) \frac{\int_X g_1(y,x)dH(x)}{\int_X g_2(x)dH(x)} \tag{51}$$

при ограничениях на функции распределения (47), (48). При этом предполагается, что функция $g_1(y,x)$ выпукла относительно y при фиксированном x.

6. Минимаксные задачи с дробно-линейным функционалом (50) при ограничениях на фиксированные m первых моментов (49).

Задачи первого и второго типов возникают при решении задачи нахождения нижнего и верхнего пределов диапазона возможных значений байесовского риска для оценки $\widehat{\theta}_H(x)$ неизвестного параметра θ.

Задачи третьего и четвертого типов возникают при:

а) решении задачи поиска робастной байесовской оценки, если наихудшей считается такая априорная функция распределения $H^* \in \Gamma$, которой отвечает верхний предел θ^* диапазона (θ_*, θ^*) возможных значений байесовской оценки;

б) решении задачи поиска нижнего θ_* и верхнего θ^* пределов диапазона (θ_*, θ^*) возможных значений апостериорной оценки математического ожидания параметра θ при фиксированных выборочных данных x;

в) решении задачи поиска нижнего $\phi_*(\widehat{\theta}_H(x))$, верхнего $\phi^*(\widehat{\theta}_H(x))$ пределов диапазона $(\phi_*(\widehat{\theta}_H(x)),\ \phi^*(\widehat{\theta}_H(x)))$ возможных значений апостериорного байесовского риска для оценки $\widehat{\theta}_H$.

Минимаксные задачи пятого и шестого типов возникают при решении задачи поиска робастной байесовской оценки, если наихудшей считается такая априорная функция распределения $H^* \in \Gamma$, которой отвечает наибольшее значение апостериорного риска. Внутренними задачами в этих минимаксных задачах являются оптимизационные задачи третьего или четвертого типа. Поэтому алгоритмы решения минимаксных задач используют алгоритмы решения задач третьего или четвертого типа.

Таким образом, для решения поиска робастных байесовских оценок, а также нижних и верхних пределов необходимо разработать алгоритмы для решения задач первых четырех типов. Решение всего указанного цикла проблем приведено в работах [35, 36].

3.5. Общие ограничения. Ограничения (1), для которых функции $F^i(x)$ точно неизвестны, могут рассматриваться с помощью функций штрафов, операций усреднения и множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу минимизации $F^0(x)$, $x \in X$, при ограничениях (1). Вместо этого можно минимизировать функцию штрафа, например

$$\Psi(x,c) = F^0(x) + c\sum_{i=1}^{m} \max\{0, F^i(x)\}$$

на X, где c — достаточно большая величина. Если точные значения $F^i(x)$ недоступны, значение $\max\{0, F^i(x)\}$ неизвестно. Заметим, что если F^i являются *GD*-функциями, то $\Psi(\cdot, c)$ — также GD-функция с субградиентом $\Psi_x = F_x^0 + c\sum_{i=1}^{m} \max\{0, F^i\} F_x^i$, где F_x^0 , F_x^i — субградиенты F^0, F^i.

Предположим, что доступны статистические оценки $\xi^0(k)$, $\xi^i(k)$, удовлетворяющие (5). Рассмотрим процедуру SQG с встроенной операцией усреднения, описанной в п. 1.2:

$$x^{k+1} = \Pi_X [x^k - \rho_k (\xi^0(k) + c\sum_{i=1}^{m} \max\{0, \hat{F}_i(x)\}\xi^i(k))],$$

$$\hat{F}_i(k+1) = \hat{F}_i(k) + \delta_k [\eta^i(k) - \hat{F}_i(k)], \quad i = 1{:}m.$$

Сходимость данного метода с вероятностью 1 требует условий, аналогичных используемым в (13). В этих же условиях сходится следующая процедура:

$$x^{k+1} = \Pi_X [x^k - \rho_k \alpha^k],$$

$$\alpha^k = \begin{cases} \xi^0(k), \text{ если } \max F^{i(k)} = F^{i_k}(k) \le 0, \\ \xi^{i_k}(k), \text{если } F^{i_k}(k) > 0. \end{cases}$$

Предположим, что $F^i(x)$, $i = 0,1,\dots,m,$ — выпуклые функции и X — выпуклый компакт. Метод множителей Лагранжа для SQG характеризуется отношениями

$$x^{k+1} = \Pi_X \left[x^k - \rho_k \left[\xi^0(k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(k) \xi^i(k) \right]\right], \tag{52}$$

$$\lambda_i(k+1) = \min[\max\{0, \lambda_i(k) + \delta_k \eta_i(k)\}, C],$$

где $\eta_i(k)$, $\xi^i(k)$ — оценки $F^i(x^k)$, $F_x^i(x^k)$, как в (2), (3); F_x^i — субградиенты $F^i(x)$; C — достаточно большое значение; ρ_k, δ_k — размеры шага аппроксимации.

Процедуру (52) можно интерпретировать в контексте нестационарной оптимизации: x^{k+1} — результат одного шага процедуры (6), применяемой к нестационарной функции $\Psi(k,x) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(k) F^i(x)$ с SQG $\xi^0(k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(k)\xi^i(k)$. Как показано в [15], $\min_{s \le k} F_0(x^s)$ сходится к $\min F_0(x)$ (в допустимом множестве) с вероятностью 1 при условии, что $F_0(x)$ строго выпукла, $\rho_k = \delta_k$ и (13) удовлетворяется для $||\xi(k)||^2$, заменяемыми на $\sum_{i=0}^{m} ||\xi^i(k)||^2$. Сходимость выпуклых функций $F^0(x)$ (не обязательно строго выпуклых) устанавливается при дополнительных предположениях на δ_k, аналогичных (17). Сходимость последовательностей $\sum_{s=0}^{k} \rho_s x^s / \sum_{s=0}^{k} \rho_s$, $\sum_{s=0}^{k} \rho_s \lambda(s) / \sum_{s=0}^{k} \rho_s$, $\lambda(s) = (\lambda_1(s), \dots, \lambda_m(s))$, к седловым точкам функции Лагранжа не требует строгой выпуклости $F^0(x)$ и разных размеров шага ρ_k, δ_k

4. КОНЕНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим неформальную постановку задач оптимального управления. Имеется некоторая система, поведение которой характеризуется двумя видами параметров: состоянием и управлением. Требуется выбрать параметры управления таким образом, чтобы поведение системы было в некотором смысле оптимальным. При этом на нее могут влиять также случайные возмущения или другие неуправляемые параметры. Если модели описываются с помощью дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, то один из подходов для нахождения оптимального управления заключается в построении конечно-разностной аппроксимации исходной задачи и оценки точности ее решения относительно первоначальной непрерывной задачи. При этом возникают следущие вопросы.

1. При каких условиях имеет место сходимость последовательности оптимальных управлений разностных аналогов, получаемых при неограниченном уменьшении размеров сетки разбиения. Сложность объясняется тем, что правые части дифференциальных уравнений и их коэффициенты зависят от управлений, которые могут быть разрывными функциями.

2. Если имеет место указанная выше сходимость, то возникает вопрос о поиске оптимального управления конечно-разностной задачи.

3. Исследование скорости сходимости оптимальных управлений разностных аналогов, построение разностных схем с высокими порядками аппроксимации.

4. Исследование вопросов, связанных с устойчивостью разностной схемы при фиксированной сетке разбиения.

В работах [37, 38] исследуется часть из перечисленных задач, при этом основное внимание уделяется нахождению условий сходимости по функционалу оптимального управления разностного аналога к оптимальному управлению непрерывной задачи. При этом исследуются объекты, поведение которых описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и стохастическими в частных производных. Рассмотрены также различные подходы к построению специальных методов нелинейного и стохастического программирования для решения разностного аналога задачи оптимального управления. Эти работы по праву считаются пионерскими и получили признание специалистов в области оптимального управления и теории оптимизации. Другой класс задач оптимального управления марковскими стохастическими системами, так называемыми системами с локальным взаимодействием, в котором основное внимание уделено нахождения условий существования оптимальных стратегий, алгоритмам их нахождения и различным приложениям в различных областях экономики, теории распознавания, комуникационных сетей и т.д., рассмотрен в [39].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К сожалению, мы не имели возможности охватить весь круг задач, связанных с теорией стохастической оптимизацией, и изложить в полной мере полученные научные результаты украинской школы. Мы не ставили целью давать полные формулировки научных результатов — это невозможно ввиду ограниченного объема статьи (например, вопросы негладкой стохастической оптимизации, оптимального управления стохастическими сисиемами и другие описаны достаточно сжато и в неполной мере). Подробнее ознакомиться с научными исследованиями в этой области (и, в частности, с работами сотрудников нашего института) можно, например, в монографиях [14, 40–42]. Мы попытались достаточно кратко изложить ряд фундаментальных научных результатов в области стохастической оптимизации и ее различных приложений, полученных Ю.М. Ермольевым, его учениками и коллегами украинской школы стохастической оптимизации, созданнной Юрием Михайловичем Ермольевым и получившей широкое мировое признание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
2. Ермольев Ю.М., Некрылова З.В. Метод стохастических субградиентов и его приложения // Теория оптимальных решений. — 1967. — Вып. 1. — С. 24–47.
3. Ермольев Ю.М., Шор Н.З. Метод случайного поиска для двухэтапных стохастических задач и его обобщения // Кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 90–92.
4. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. — М.: Наука, 1979. — 253 с.
5. Ermoliev Y.M. Stochastic Quasigradient Methods. — Numerical Techniques for Stochastic Optimization , Y. Ermoliev and R.Wets, eds. — Berlin: Springer-Verlag, 1988. — P. 141–185.
6. Ermoliev Y.M. Stochastic quasigradient methods in minimax problems, two-stage stochastic programming: quasigradient method. Stochastic Quasigradient Methods: Applications, Stochastic Quasigradient Methods: General Theory // Encyclopedia of Optimization / C.A. Floudas, P.M. Pardalos (eds). — New York: Springer-Verlag, 2009. — P. 3813–3818; 3955–3959; 3807–3813; 3801–3807.
7. Норкин В.И. Об условиях и скорости сходимости метода эмпирических средних в математической статистике и стохастического программировании // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 2. — С. 107–120 .
8. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Empirical estimates in Stochastic optimization and identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academ. Publ., 2005. — 250 p.
9. Ермольев Ю.М., Кнопов П.С. Метод эмпирических средних в задачах стохастического программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 773–785.
10. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Properties of empirical estimates in stochastic optimization and identification problems // Annals of Oper. Res. — 1995. — N 56. — P. 225–239.
11. Ermoliev Y.M. and Norkin V.I. On nonsmooth and discontinuous problems of stochastic systems optimization // European J. of Oper. Res. — 1997. — № 2. — P. 230–243.
12. Gaivoronski A. SQG: Software for solving stochastic programming problems with stochastic qusigradient methods / S.W. Wallance and W.T. Ziemba (eds) // Appl. of Stochast. Program., SIAM, MPS, 2005. — P. 38–60
13. Ермольев Ю.М., Норкин В.И. Стохастический обобщенный градиентгый метод для решения невыпуклых негладких задач стохастической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 50–71.
14. Ermoliev Yu.M., Wets R. (eds.) Techniques for stochastic optimization. — Berlin: Springer, 1988. — 571 p.
15. Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987. — 280 с.
16. Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. — М.: Наука, 1990. — 184 с.
17. Нурминский Е.А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. — Киев: Наук. думка, 1979. — 176 с.
18. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
19. Каниовский Ю.М., Кнопов П.С., Некрылова З.В. Предельные теоремы для процессов стохастического программирования. — Киев: Наук. думка, 1980. — 156 с.
20. Ермольев Ю.М., Ермольева Т.Ю., Макдональд Г. Норкин В.И. Проблемы страхования катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 90–110.
21. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value at risk // The Journ. of Risk. — 2000. — **2**, N 3. — P. 21–41.

22. Ermoliev Y., Leonardi G. Some proposals for stochastic facility locations models // Mathematical model. — 1982. — **5**, N. 5. — P. 407–420.

23. Keyzer M., Ermoliev Y. Modeling producer decisions in a spatial continuum // The Theory of Markets / P. Herings, G. Van der Laan, A. Talman (eds.). — Amsterdam; Oxford; New York: North-Holland, 1999. — P. 281–305.

24. Eckstein J., Bertsekas D.P. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators // Mathemat. Program. — 1992. — N 55. — P. 293–318.

25. Flam S.D. Learning equilibrium play: a myopic approach // Comput. Optimiz. and Applic. — 1999. — **14**. — P. 87–100.

26. Cournot A. Researches into the mathematical principles of the theory of wealth (ed. N. Bacon). — New York: Macmillan, 1897.

27. Ermoliev Y., Nedeva C. Stochastic optimization problem with partially known distribution 5 functions. — Laxenburg Austria: Intern. In-t for App. Systems Analysis, 1982. — P. 62–60

28. Ermoliev Yu., Gaivoronski A., Nedeva S. Stochastic optimization problems with incomplete information on distribution functions // SIAM J. Control Optim. — 1985. — **23**, N 56. — P. 697–716.

29. Гупал А.М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач. — Киев: Наук думка, 1979. — 150 с.

30. Norkin V.I., Pflug G.Ch., Ruszczynski A. A branch and bound method for stochastic global optimization // Math. Program. — 1998. — **83**. — P. 425–450.

31. Ermoliev Y.M., Norkin V.I. Stochastic optimization of risk functions / K. Marti, Y. Ermoliev, and G. Pflug (eds.): Dynamic stochastic optimization. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. — P. 225–247.

32. Ermoliev Y.M., Ermolieva T.Y., MacDonald G.J., Norkin V.I. Insurability of catastrophic risks: the stochastic optimization model // Optimization. — 2000. — **47**. — P. 251–265.

33. Ermoliev Y.M., Ermolieva T.Y. MacDonald G., and Norkin V.I. Stochastic optimization of insurance portfolios for managing exposure to catastrophic risks // Annals of Oper. Res. — 2000. — **99**. — P. 207–225.

34. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 155–167.

35. Golodnikov A.N., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Investigation of Bayesian estimates for binomial failure models // Simulation and optimization Methods in Risk and Reliability Theory. Nova Sci. publ. Inc. / P.S. Knopov and P. Pardalos (eds.). — 2009. — P. 173–220.

36. Голодников А.Н., Ермольев Ю.М., Кнопов П.С. оценивание параметров надежности в условиях недостаточной информации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 109–125.

37. Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. — Киев: Наук. думка, 1978. — 164 с.

38. Ермольев Ю.М., Яшкир О.В., Яшкир Ю.М. Методы недифференцируемой и стохастической оптимизации в физических исследованиях. — Киев: Наук. думка. — 1995. — 170 с.

39. Chornei R.K., Daduna H., Knopov P.S. Control of spatially structured random processes and random fields with applications. — New York: Springer, 2006. — 262 p.

40. Marti K, Ermoliev Yu., Pflug G. (eds). Dynamic stochastic optimization // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2003. — 336 p.

41. Marti K., Ermoliev Y., Makowski M., Pflug G. Modeling and policy issues. Lecture Notes in Economics and mathematical Systems. — Berlin: Springer, 2006. — 330 p.

42. Marti K, Ermoliev Yu., Makowski M. Coping with uncertainty. Robust solutions. Lecture Notes in Economics and mathematical Systems. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — 277 p.

Поступила 16.06.2011