УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

НОВЫЕ БЫСТРЫЕ ГИБРИДНЫЕ АЛГОРИТМЫ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Ключевые слова: *линейная алгебра, гибридные алгоритмы умножения матриц, алгоритм Лейдермана для умножения* (3×3)*-матриц.*

В настоящее время разработаны быстрые гибридные алгоритмы для умножения $(n\times n)$-матриц [1, 2], при построении которых использовались алгоритмы Штрассена для умножения (2×2)-матриц [3], Винограда–Штрассена для умножения (2×2)-матриц [4] и Винограда [5]. В указанных гибридных алгоритмах в отличие от известных, например широко применяемых на практике алгоритмов [3–5], впервые достигнута одновременная минимизация мультипликативной и аддитивной сложностей, что обусловливает их наименьшую общую вычислительную сложность.

Цель настоящей работы — оптимизация вычислительной сложности гибридных алгоритмов умножения матриц. В данной статье рассматриваются новые быстрые гибридные алгоритмы для умножения $(n\times n)$-матриц, при построении которых используются алгоритмы Лейдермана для умножения (3×3)-матриц [6] и Винограда [5], что приводит к минимизации мультипликативной, аддитивной и общей сложностей по сравнению с известными гибридными алгоритмами.

БЫСТРЫЙ ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ ПОРЯДКА $n=3\mu$ $(\mu>1)$

Алгоритм умножения двух квадратных матриц $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ указанного порядка n построен с использованием восходящей схемы вычислений [7], где в качестве внутреннего алгоритма применяется алгоритм Лейдермана для умножения (3×3)-матриц [6]. При этом привлекаются свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения. Основным вычислительным ядром предлагаемого алгоритма являются следующие регулярные вычисления:

$$s_{ij}^1=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^1\cdot b_{3k-1,3j-1},\qquad s_{ij}^8=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^6\cdot\beta_{kj}^6,$$

$$s_{ij}^2=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^2\cdot\beta_{kj}^1,\qquad s_{ij}^9=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^7\cdot\beta_{kj}^7,$$

$$s_{ij}^3=\sum_{k=1}^{m}a_{3i-1,3k-1}\cdot\beta_{kj}^2,\qquad s_{ij}^{10}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^8\cdot b_{3k-1,3j},$$

$$s_{ij}^4=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^3\cdot\beta_{kj}^3,\qquad s_{ij}^{11}=\sum_{k=1}^{m}a_{3i,3k-1}\cdot\beta_{kj}^8,$$

$$s_{ij}^5=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^4\cdot\beta_{kj}^4,\qquad s_{ij}^{12}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^9\cdot\beta_{kj}^9,$$

$$s_{ij}^6=\sum_{k=1}^{m}a_{3i-2,3k-2}\cdot b_{3k-2,3j-2},\qquad s_{ij}^{13}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^{10}\cdot\beta_{kj}^{10},$$

$$s_{ij}^7=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^5\cdot\beta_{kj}^5,\qquad s_{ij}^{14}=\sum_{k=1}^{m}a_{3i-2,3k}\cdot b_{3k,3j-2},$$

$$s_{ij}^{15} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}^{11} \cdot \beta_{kj}^{11}, \qquad s_{ij}^{20} = \sum_{k=1}^{m} a_{3i-1,3k} \cdot b_{3k,3j-1},$$

$$s_{ij}^{16} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}^{12} \cdot \beta_{kj}^{12}, \qquad s_{ij}^{21} = \sum_{k=1}^{m} a_{3i-1,3k-2} \cdot b_{3k-2,3j}, \tag{1}$$

$$s_{ij}^{17} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}^{13} \cdot \beta_{kj}^{13}, \qquad s_{ij}^{22} = \sum_{k=1}^{m} a_{3i,3k-2} \cdot b_{3k-2,3j-1},$$

$$s_{ij}^{18} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}^{14} \cdot \beta_{kj}^{14}, \qquad s_{ij}^{23} = \sum_{k=1}^{m} a_{3i,3k} \cdot b_{3k,3j},$$

$$s_{ij}^{19} = \sum_{k=1}^{m} a_{3i-2,3k-1} \cdot b_{3k-1,3j-2},$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, m;\quad m = n/3$.

Коэффициенты $\alpha_{ik}^{1}, \ldots, \alpha_{ik}^{14}$ и $\beta_{kj}^{1}, \ldots, \beta_{kj}^{14}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_{ik}^{1} &= a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-2,3k-1} + a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k-2} - \\
&\quad - a_{3i-1,3k-1} - a_{3i,3k-2} - a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^{2} &= a_{3i-2,3k-2} - a_{3i-1,3k-2}, \\
\alpha_{ik}^{3} &= -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-1,3k-2} + a_{3i-1,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^{4} &= a_{3i-1,3k-2} + a_{3i-1,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^{5} &= -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i,3k-2} + a_{3i,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^{6} &= -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i,3k-2}, \\
\alpha_{ik}^{7} &= a_{3i,3k-2} + a_{3i,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^{8} &= a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-2,3k-1} + a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k-1} - \\
&\quad - a_{3i-1,3k} - a_{3i,3k-2} - a_{3i,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^{9} &= -a_{3i-2,3k} + a_{3i,3k-1} + a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^{10} &= a_{3i-2,3k} - a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^{11} &= a_{3i,3k-1} + a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^{12} &= -a_{3i-2,3k} + a_{3i-1,3k-1} + a_{3i-1,3k}, \\
\alpha_{ik}^{13} &= a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k}, \\
\alpha_{ik}^{14} &= a_{3i-1,3k-1} + a_{3i-1,3k},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $i, k = 1, 2, \ldots, m;\quad m = n/3$;

$$\begin{aligned}
\beta_{kj}^{1} &= -b_{3k-2,3j-1} + b_{3k-1,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{2} &= -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j-1} + b_{3k-1,3j-2} - b_{3k-1,3j-1} - \\
&\quad - b_{3k-1,3j} - b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j}, \\
\beta_{kj}^{3} &= b_{3k-2,3j-2} - b_{3k-2,3j-1} + b_{3k-1,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{4} &= -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{5} &= b_{3k-2,3j-2} - b_{3k-2,3j} + b_{3k-1,3j}, \\
\beta_{kj}^{6} &= b_{3k-2,3j} - b_{3k-1,3j}, \\
\beta_{kj}^{7} &= -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{kj}^{8} &= -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j} + b_{3k-1,3j-2} - b_{3k-1,3j-1} - \\
&\qquad\qquad\qquad - b_{3k-1,3j} - b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{9} &= b_{3k-1,3j-1} + b_{3k,3j-2} - b_{3k,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{10} &= b_{3k-1,3j-1} - b_{3k,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{11} &= -b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j-1}, \\
\beta_{kj}^{12} &= b_{3k-1,3j} + b_{3k,3j-2} - b_{3k,3j}, \\
\beta_{kj}^{13} &= b_{3k-1,3j} - b_{3k,3j}, \\
\beta_{kj}^{14} &= -b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $j, k = 1, 2, \ldots, m;\ m = n/3$.

Элементы результирующей матрицы $C = \{c_{ij}\}$ вычисляются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
c_{3i-2,3j-2} &= s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{19}, \\
c_{3i-2,3j-1} &= s_{ij}^{1} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15}, \\
c_{3i-2,3j} &= s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{10} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{18}, \\
c_{3i-1,3j-2} &= s_{ij}^{2} + s_{ij}^{3} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17}, \\
c_{3i-1,3j-1} &= s_{ij}^{2} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{20}, \\
c_{3i-1,3j} &= s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17} + s_{ij}^{18} + s_{ij}^{21}, \\
c_{3i,3j-2} &= s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{11} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14}, \\
c_{3i,3j-1} &= s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15} + s_{ij}^{22}, \\
c_{3i,3j} &= s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{23},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, m;\ m = n/3$.

Выполним оценку вычислительной сложности гибридного алгоритма (1)–(4). Мультипликативная сложность вычислений (1) составляет

$$W_{\text{м}}^{(1)} = 23m^3 = 23\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \frac{23}{27}n^3 \approx 0{,}85n^3 \ \ \text{(операций умножения)}.$$

Аддитивная сложность вычислений (1) находится следующим образом:

$$W_{\text{а}}^{(1)} = 23[m^2(m-1)] = 23\left(\frac{n}{3}\right)^3 - 23\left(\frac{n}{3}\right)^2 \approx 0{,}85n^3 - 2{,}56n^2 \ \ \text{(операций сложения)}.$$

Суммарная аддитивная сложность вычислений (2), (3) и (4) определяется как

$$W_{\text{а}}^{(2),(3),(4)} = W_{\text{а}}^{(2)} + W_{\text{а}}^{(3)} + W_{\text{а}}^{(4)} = 28m^2 + 28m^2 + 42m^2 = 98\left(\frac{n}{3}\right)^2 \approx 10{,}89n^2$$

(операций сложения).

Таким образом, полная аддитивная сложность алгоритма (1)–(4) составляет

$$W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(1)} + W_{\text{а}}^{(2),(3),(4)} \approx 0{,}85n^3 - 2{,}56n^2 + 10{,}89n^2 = 0{,}85n^3 + 8{,}33n^2$$

(операций сложения).

Следовательно, общая вычислительная сложность рассмотренного алгоритма определяется как

$$W_{\text{общ}} = W_{\text{м}}^{(1)} + W_{\text{а}} \approx 0{,}85n^3 + 0{,}85n^3 + 8{,}33n^2 = 1{,}70n^3 + 8{,}33n^2$$

(операций сложения / умножения).

В алгоритме (1)–(4) достигнута одновременная минимизация мультипликативной, аддитивной и общей вычислительной сложности относительно традиционного алгоритма [8]. При этом выигрыш по мультипликативной сложности составляет 15% при всех значениях *n*. Процент минимизации аддитивной и общей сложностей зависит от *n*. Выигрыш по аддитивной сложности начинается при $n = 63$ и достигает максимума 15% при $n \geq 10^4$. Выигрыш по общей вычислительной сложности начинается при $n = 32$ и достигает 15% при $n \geq 10^3$. По сравнению с гибридным алгоритмом [1] предложенный алгоритм (1)–(4) обладает уменьшенной на 2,6% мультипликативной сложностью при всех значениях *n*. Что касается выигрыша по аддитивной сложности, то последний увеличивается, начиная с $n = 275$, и принимает максимальное значение 2,6% при $n \geq 10^4$. Сравниваемые гибридные алгоритмы имеют равную общую вычислительную сложность при $n = 125$. С увеличением *n* процент минимизации общей сложности повышается, достигая максимума 2,6% при $n > 10^3$.

БЫСТРЫЙ ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ ПОРЯДКА $n = 6\mu$ $(\mu > 0)$

Рассматриваемый алгоритм построен на основе алгоритма (1)–(4) путем преобразования его структуры информационных связей по методу Винограда [5], что дает возможность минимизировать мультипликативную сложность. Для этого каждая из двадцати трех формул выражения (1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&s_{ij}^1 = \theta_{ij}^1 - h_i^1 - g_j^1, && s_{ij}^5 = \theta_{ij}^5 - h_i^5 - g_j^5,\\
&s_{ij}^2 = \theta_{ij}^2 - h_i^2 - g_j^2, && s_{ij}^6 = \theta_{ij}^6 - h_i^6 - g_j^6,\\
&s_{ij}^3 = \theta_{ij}^3 - h_i^3 - g_j^3, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{ij}^4 = \theta_{ij}^4 - h_i^4 - g_j^4, && s_{ij}^{23} = \theta_{ij}^{23} - h_i^{23} - g_j^{23}, \ i, j = 1, 2, \ldots, m; \ m = n/3,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\theta_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^1 + b_{6k-1,3j-1})(b_{6k-4,3j-1} + \alpha_{i,2k}^1),$$

$$\theta_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^2 + \beta_{2k,j}^1)(\beta_{2k-1,j}^1 + \alpha_{i,2k}^2),$$

$$\theta_{ij}^3 = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i-1,6k-4} + \beta_{2k,j}^2)(\beta_{2k-1,j}^2 + a_{3i-1,6k-1}),$$

$$\theta_{ij}^4 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^3 + \beta_{2k,j}^3)(\beta_{2k-1,j}^3 + \alpha_{i,2k}^3),$$

$$\theta_{ij}^5 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^4 + \beta_{2k,j}^4)(\beta_{2k-1,j}^4 + \alpha_{i,2k}^4),$$

$$\theta_{ij}^6 = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i-2,6k-5} + b_{6k-2,3j-2})(b_{6k-5,3j-2} + a_{3i-2,6k-2}),$$

$$\theta_{ij}^7 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^5 + \beta_{2k,j}^5)(\beta_{2k-1,j}^5 + \alpha_{i,2k}^5),$$

$$\theta_{ij}^8 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^6 + \beta_{2k,j}^6)(\beta_{2k-1,j}^6 + \alpha_{i,2k}^6),$$

$$\theta_{ij}^9 = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^7 + \beta_{2k,j}^7)(\beta_{2k-1,j}^7 + \alpha_{i,2k}^7),$$

$$\theta_{ij}^{10} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{8} + b_{6k-1,3j})(b_{6k-4,3j} + \alpha_{i,2k}^{8}),$$

$$\theta_{ij}^{11} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i,6k-4} + \beta_{2k,j}^{8})(\beta_{2k-1,j}^{8} + a_{3i,6k-1}),$$

$$\theta_{ij}^{12} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{9} + \beta_{2k,j}^{9})(\beta_{2k-1,j}^{9} + \alpha_{i,2k}^{9}),$$

$$\theta_{ij}^{13} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{10} + \beta_{2k,j}^{10})(\beta_{2k-1,j}^{10} + \alpha_{i,2k}^{10}),$$

$$\theta_{ij}^{14} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i-2,6k-3} + b_{6k,3j-2})(b_{6k-3,3j-2} + a_{3i-2,6k}),$$

$$\theta_{ij}^{15} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{11} + \beta_{2k,j}^{11})(\beta_{2k-1,j}^{11} + \alpha_{i,2k}^{11}),$$

$$\theta_{ij}^{16} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{12} + \beta_{2k,j}^{12})(\beta_{2k-1,j}^{12} + \alpha_{i,2k}^{12}), \qquad (6)$$

$$\theta_{ij}^{17} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{13} + \beta_{2k,j}^{13})(\beta_{2k-1,j}^{13} + \alpha_{i,2k}^{13}),$$

$$\theta_{ij}^{18} = \sum_{k=1}^{m/2} (\alpha_{i,2k-1}^{14} + \beta_{2k,j}^{14})(\beta_{2k-1,j}^{14} + \alpha_{i,2k}^{14}),$$

$$\theta_{ij}^{19} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i-2,3k-1} + b_{6k-1,3j-2})(b_{6k-4,3j-2} + a_{3i-2,6k-1}),$$

$$\theta_{ij}^{20} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i-1,6k-3} + b_{6k,3j-1})(b_{6k-3,3j-1} + a_{3i-1,6k}),$$

$$\theta_{ij}^{21} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i-1,6k-5} + b_{6k-2,3j})(b_{6k-5,3j} + a_{3i-1,6k-2}),$$

$$\theta_{ij}^{22} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i,6k-5} + b_{6k-2,3j-1})(b_{6k-5,3j-1} + a_{3i,6k-2}),$$

$$\theta_{ij}^{23} = \sum_{k=1}^{m/2} (a_{3i,6k-3} + b_{6k,3j})(b_{6k-3,3j} + a_{3i,6k}),$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$; $k = 1, 2, \ldots, m/2$;

$$h_i^1 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{1} \alpha_{i,2k}^{1}, \qquad g_j^1 = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k-1,3j-1} b_{6k-4,3j-1},$$

$$h_i^2 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{2} \alpha_{i,2k}^{2}, \qquad g_j^2 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{1} \beta_{2k-1,j}^{1},$$

$$h_i^3 = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i-1,6k-4} a_{3i-1,6k-1}, \qquad g_j^3 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{2} \beta_{2k-1,j}^{2},$$

$$h_i^4 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{3} \alpha_{i,2k}^{3}, \qquad g_j^4 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{3} \beta_{2k-1,j}^{3},$$

$$h_i^5 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{4} \alpha_{i,2k}^{4}, \qquad g_j^5 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{4} \beta_{2k-1,j}^{4},$$

$$h_i^6 = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i-2,6k-5} a_{3i-2,6k-2}, \qquad g_j^6 = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k-2,3j-2} b_{6k-5,3j-2},$$

$$h_i^7 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^5 \alpha_{i,2k}^5, \qquad g_j^7 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^5 \beta_{2k-1,j}^5,$$

$$h_i^8 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^6 \alpha_{i,2k}^6, \qquad g_j^8 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^6 \beta_{2k-1,j}^6,$$

$$h_i^9 = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^7 \alpha_{i,2k}^7, \qquad g_j^9 = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^7 \beta_{2k-1,j}^7,$$

$$h_i^{10} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^8 \alpha_{i,2k}^8, \qquad g_j^{10} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k-1,3j} b_{6k-4,3j},$$

$$h_i^{11} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i,6k-4} a_{3i,6k-1}, \qquad g_j^{11} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^8 \beta_{2k-1,j}^8,$$

$$h_i^{12} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^9 \alpha_{i,2k}^9, \qquad g_j^{12} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^9 \beta_{2k-1,j}^9,$$

$$h_i^{13} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{10} \alpha_{i,2k}^{10}, \qquad g_j^{13} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{10} \beta_{2k-1,j}^{10},$$

$$h_i^{14} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i-2,6k-3} a_{3i-2,6k}, \qquad g_j^{14} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k,3j-2} b_{6k-3,3j-2},$$

$$h_i^{15} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{11} \alpha_{i,2k}^{11}, \qquad g_j^{15} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{11} \beta_{2k-1,j}^{11},$$

$$h_i^{16} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{12} \alpha_{i,2k}^{12}, \qquad g_j^{16} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{12} \beta_{2k-1,j}^{12},$$

$$h_i^{17} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{13} \alpha_{i,2k}^{13}, \qquad g_j^{17} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{13} \beta_{2k-1,j}^{13},$$

$$h_i^{18} = \sum_{k=1}^{m/2} \alpha_{i,2k-1}^{14} \alpha_{i,2k}^{14}, \qquad g_j^{18} = \sum_{k=1}^{m/2} \beta_{2k,j}^{14} \beta_{2k-1,j}^{14},$$

$$h_i^{19} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i-2,3k-1} a_{3i-2,6k-1}, \qquad g_j^{19} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k-1,3j-2} b_{6k-4,3j-2}, \tag{7}$$

$$h_i^{20} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i-1,6k-3} a_{3i-1,6k}, \qquad g_j^{20} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k,3j-1} b_{6k-3,3j-1},$$

$$h_i^{21} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i-1,6k-5} a_{3i-1,6k-2}, \qquad g_j^{21} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k-2,3j} b_{6k-5,3j},$$

$$h_i^{22} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i,6k-5} a_{3i,6k-2}, \qquad g_j^{22} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k-2,3j-1} b_{6k-5,3j-1},$$

$$h_i^{23} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{3i,6k-3} a_{3i,6k} \;, \qquad g_j^{23} = \sum_{k=1}^{m/2} b_{6k,3j} b_{6k-3,3j},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$; $k = 1, 2, \ldots, m/2$.

Коэффициенты $\alpha_{ik}^1, \ldots, \alpha_{ik}^{14}$ и $\beta_{kj}^1, \ldots, \beta_{kj}^{14}$ соответственно имеют вид

$$\alpha_{ik}^1 = a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-2,3k-1} + a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k-2} -$$
$$- a_{3i-1,3k-1} - a_{3i,3k-2} - a_{3i,3k},$$

$$\alpha_{ik}^2 = a_{3i-2,3k-2} - a_{3i-1,3k-2},$$

$$\alpha_{ik}^3 = -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-1,3k-2} + a_{3i-1,3k-1},$$

$$\alpha_{ik}^4 = a_{3i-1,3k-2} + a_{3i-1,3k-1},$$

$$\alpha_{ik}^{5} = -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i,3k-2} + a_{3i,3k-1},$$
$$\alpha_{ik}^{6} = -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i,3k-2},$$
$$\alpha_{ik}^{7} = a_{3i,3k-2} + a_{3i,3k-1}, \qquad (8)$$
$$\alpha_{ik}^{8} = a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-2,3k-1} + a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k-1} -$$
$$- a_{3i-1,3k} - a_{3i,3k-2} - a_{3i,3k-1},$$
$$\alpha_{ik}^{9} = -a_{3i-2,3k} + a_{3i,3k-1} + a_{3i,3k},$$
$$\alpha_{ik}^{10} = a_{3i-2,3k} - a_{3i,3k},$$
$$\alpha_{ik}^{11} = a_{3i,3k-1} + a_{3i,3k},$$
$$\alpha_{ik}^{12} = -a_{3i-2,3k} + a_{3i-1,3k-1} + a_{3i-1,3k},$$
$$\alpha_{ik}^{13} = a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k},$$
$$\alpha_{ik}^{14} = a_{3i-1,3k-1} + a_{3i-1,3k},$$

где $i, k = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$;

$$\beta_{kj}^{1} = -b_{3k-2,3j-1} + b_{3k-1,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{2} = -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j-1} + b_{3k-1,3j-2} - b_{3k-1,3j-1} -$$
$$- b_{3k-1,3j} - b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j},$$
$$\beta_{kj}^{3} = b_{3k-2,3j-2} - b_{3k-2,3j-1} + b_{3k-1,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{4} = -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{5} = b_{3k-2,3j-2} - b_{3k-2,3j} + b_{3k-1,3j},$$
$$\beta_{kj}^{6} = b_{3k-2,3j} - b_{3k-1,3j},$$
$$\beta_{kj}^{7} = -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j}, \qquad (9)$$
$$\beta_{kj}^{8} = -b_{3k-2,3j-2} + b_{3k-2,3j} + b_{3k-1,3j-2} - b_{3k-1,3j-1} -$$
$$- b_{3k-1,3j} - b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{9} = b_{3k-1,3j-1} + b_{3k,3j-2} - b_{3k,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{10} = b_{3k-1,3j-1} - b_{3k,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{11} = -b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j-1},$$
$$\beta_{kj}^{12} = b_{3k-1,3j} + b_{3k,3j-2} - b_{3k,3j},$$
$$\beta_{kj}^{13} = b_{3k-1,3j} - b_{3k,3j},$$
$$\beta_{kj}^{14} = -b_{3k,3j-2} + b_{3k,3j},$$

где $j, k = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$.

Элементы результирующей матрицы $C = \{c_{ij}\}$ вычисляются по следующим формулам:

$$c_{3i-2,3j-2} = s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{19},$$
$$c_{3i-2,3j-1} = s_{ij}^{1} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15},$$
$$c_{3i-2,3j} = s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{10} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{18},$$
$$c_{3i-1,3j-2} = s_{ij}^{2} + s_{ij}^{3} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17},$$
$$c_{3i-1,3j-1} = s_{ij}^{2} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{20}, \qquad (10)$$
$$c_{3i-1,3j} = s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17} + s_{ij}^{18} + s_{ij}^{21},$$

$$c_{3i,3j-2} = s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{11} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14},$$
$$c_{3i,3j-1} = s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15} + s_{ij}^{22},$$
$$c_{3i,3j} = s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{23},$$
где $i, j = 1, 2, \ldots, m;\ m = n/3.$

Выполним оценку операционной сложности алгоритма (5)–(10). Аддитивная сложность вычислений (5) определяется следующим образом:

$$W_{\text{а}}^{(5)} = 23 \cdot 2m^2 = 46\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{46}{9}n^2 \approx 5{,}111n^2 \ \text{(операций вычитания).}$$

Мультипликативная и аддитивная сложности вычислений (6) соответственно составляют

$$W_{\text{м}}^{(6)} = 23\left(\frac{m}{2}m^2\right) = 23\left(\frac{n^3}{54}\right) \approx 0{,}426n^3 \quad \text{(операций умножения),}$$

$$W_{\text{а}}^{(6)} = 23\left[m^2\left(\frac{m}{2} - 1\right)\right] + 23 \cdot 2\left(m^2\frac{m}{2}\right) = 69\left(\frac{n^3}{54}\right) - 23\left(\frac{n^2}{9}\right) \approx 1{,}278n^3 - 2{,}556n^2$$
(операций сложения).

Мультипликативная и аддитивная сложности вычислений (7) соответственно равны

$$W_{\text{м}}^{(7)} = 2 \cdot 23\left(\frac{m}{2}m\right) = 23m^2 = 23\left(\frac{n^2}{9}\right) \approx 2{,}556n^2 \ \text{(операций умножения),}$$

$$W_{\text{а}}^{(7)} = 2 \cdot 23\left[m\left(\frac{m}{2} - 1\right)\right] = 23\left(\frac{n^2}{9}\right) - 46\left(\frac{n}{3}\right) \approx 2{,}556n^2 - 15{,}333n$$
(операций сложения).

Суммарная аддитивная сложность вычислений (8), (9), (10) составляет

$$W_{\text{а}}^{(8),(9),(10)} = W_{\text{а}}^{(8)} + W_{\text{а}}^{(9)} + W_{\text{а}}^{(10)} = 28m^2 + 28m^2 + 42m^2 = 98\left(\frac{n^2}{9}\right) \approx 10{,}889n^2$$
(операций сложения).

Следовательно, мультипликативная, аддитивная и общая вычислительная сложности алгоритма (5)–(10) соответственно равны

$$W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(6)} + W_{\text{а}}^{(7)} \approx 0{,}426n^3 + 2{,}556n^2 \ \text{(операций умножения),}$$

$$W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(5)} + W_{\text{а}}^{(6)} + W_{\text{а}}^{(7)} + W_{\text{а}}^{(8),(9),(10)} \approx 1{,}278n^3 + 16n^2 - 15{,}333n$$
(операций сложения),

$$W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{а}} \approx 1{,}704n^3 + 18{,}556n^2 - 15{,}333n \ \text{(операций умножения/сложения).}$$

Алгоритм (5)–(10) имеет минимизированную мультипликативную сложность по сравнению с алгоритмом (1)–(4) в 1,25 раза при $n = 10$, в 1,9 раза при $n = 10^2$, в 2 раза при $n \geq 10^3$. В отличие от алгоритма Винограда в нем достигнута одновременная минимизация мультипликативной, аддитивной и общей сложностей. При этом выигрыш по мультипликативной сложности составляет

11,5% при $n=10^2$, 14,5% при $n=10^3$, 14,8% при $n=10^4$ и достигает максимума 15% при $n>10^3$. Выигрыш по аддитивной сложности начинается при $n=63$ и составляет 0,2%, при $n=10^2$ равен 5,5%, при $n=10^3$ увеличивается до 14%, при $n=10^4$ достигает 14,7%. Выигрыш по общей сложности составляет 0,1% при $n=52$, 7% при $n=10^2$, 14% при $n=10^3$, 14,7% при $n=10^4$ и достигает максимума 15% при $n>10^4$. По сравнению с быстрым алгоритмом Штрассена у предложенного алгоритма выигрыша по мультипликативной сложности нет, но по аддитивной вычислительной сложности процент минимизации составляет 16% при $n=10$, 40,5% при $n=10^2$, 18% при $n=10^3$, 2% при $n=4\cdot 10^3$. По общей вычислительной сложности выигрыш составляет 12,5% при $n=10$, 33% при $n=10^2$, 7% при $n=10^3$, 0,8% при $n=2\cdot 10^3$.

Таким образом, рассмотренные алгоритмы (1)–(4) и (5)–(10) совместно с алгоритмами из работ [1, 2] образуют семейство быстрых гибридных алгоритмов, отличающихся от известных наименьшей операционной сложностью. На основе алгоритмов (1)–(4) и (5)–(10) можно построить быстрые алгоритмы для базовой операции клеточных методов линейной алгебры. Эти алгоритмы могут быть также эффективно реализованы на различных параллельных вычислительных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елфимова Л.Д., Капитонова Ю.В. Быстрый алгоритм для умножения матриц и его эффективная реализация на систолических массивах // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 1. — С. 135–150.
2. Елфимова Л.Д. Быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц // Там же. — 2010. — № 4. — С. 49–59.
3. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. — 1969. — **13**. — P. 354–356.
4. Winograd S. On multiplication of 2×2 matrices // Linear Algebra and Its Application. — 1971. — **4**. — P. 381–388.
5. Winograd S.A. A new algorithm for inner product // IEEE Trans. Comp. — 1968. — **C-18**. — P. 693–694.
6. Laderman J.D. A noncommutative algorithm for multiplying 3 x 3 matrices using 23 multiplications // Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — **82**, N 1. — P. 126–128.
7. Modi J.J. Parallel algorithms and matrix computation. — Oxford: Clarendon Press, 1988. — 260 p.
8. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.; Л.: Физматгиз, 1963. — 734 с.

Поступила 23.03.2010