УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

О ТОЧНОСТИ ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ[1]

Ключевые слова: *квадратичная задача, двойственная лагранжевая оценка, положительно-определенная матрица, функционально избыточные ограничения.*

ДВОЙСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ. ОБЩИЙ ПОДХОД

Рассмотрим квадратичную задачу

$$f^* = \inf_{x \in T \subseteq \mathcal{R}^n} f_0(x), \tag{1}$$

где допустимое множество значений $T = \{x: f_i(x) \le 0,\ i \in I,\ f_i(x) = 0,\ i \in J;\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{R}^n\}$, $f_i(x) = x^T K_i x + b_i^T x + c_i$, $i \in \{0\} \cup I \cup J$, — квадратичные функции, определенные в n-мерном пространстве, с симметричной $n \times n$-матрицей K_i, вектором $b_i \in \mathcal{R}^n$ и константой $c_i \in \mathcal{R}^1$; $m = |I| + |J|$ — общее количество ограничений. О важности даного класса задач свидетельствует тот факт, что к ним относятся или сводятся выпуклые и невыпуклые задачи квадратичного программирования, задача линейной дополнительности, полиномиальные экстремальные задачи (в которых целевая функция и все функции ограничений представляют собой полиномы), решение систем полиномиальных уравнений с вещественными и комплексными переменными, экстремальные задачи на графах и т.д. Обобщая, можно сказать, что к виду квадратичной задачи сводятся все задачи, представимые как рациональные экстремальные задачи (в которых целевая функция и все функции ограничений рациональные, т.е. представляют собой дроби, в числителе и знаменателе которых стоят полиномы).

В общем случае задача (1) — многоэкстремальна и относится к классу *NP*-трудных задач, поэтому актуально нахождение оценок для данной задачи за «приемлемое» (полиномиальное) время. Для получения нижних оценок ψ^* оптимального значения целевой функции f^* задачи (1) ($\psi^* \le f^*$) академик Н.З. Шор предложил и исследовал двойственный подход [1, 2], основанный на использовании функции Лагранжа:

$$\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u) \le \inf_{x \in T} f_0(x) = f^*, \tag{2}$$

где

$$\psi(u) = \inf_{x \in \mathcal{R}^n} L(x, u); \tag{3}$$

$L(u, x) = x^T K(u) x + b^T(u) x + c(u)$ — функция Лагранжа для задачи (1), в которой

$$K(u) = K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i, \quad b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i, \quad c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^m u_i c_i,$$

U^+ — область определения вектора множителей Лагранжа $u \in \mathcal{R}^m$, учитывающая наличие ограничений в виде неравенств: $U^+ = \{u: u_i \ge 0,\ i \in I\}$;

[1]Работа выполнена частично в рамках проекта №IZ73ZO_127962 (SNSF, Швейцария).

D — множество переменных $u \in \mathcal{R}^m$, при которых матрица $K(u)$ положительно определена.

Неравенство (2) следует из того, что при любых $x \in T$ и $u \in U^+$ имеет место $L(u,x) \le f_0(x)$, с учетом чего $\psi(u) = \inf\limits_x L(u,x) \le \inf\limits_{x \in T} L(u,x) \le \inf\limits_{x \in T} f_0(x) = f^*$ при любом $u \in U^+$, откуда $\psi^* = \sup\limits_{u \in D \cap U^+} \psi(u) \le f^*$.

На випуклом множестве $D \cap U^+$ функция $\psi(u)$ вогнута и непрерывно дифференцируема, при этом ее градиент вычисляется по формуле $\psi'_{u_i} = f_i(x(u))$, $i = \overline{1, m}$. Здесь $x(u)$ является решением безусловной задачи минимизации квадратичной функции (3), которое при $u \in D$ однозначно определяется из системы уравнений $L'_x(u,x) = 2K(u)x + b(u) = 0$ — $x(u) = -K^{-1}(u)b(u)/2$. Таким образом, нахождение двойственной оценки ψ^* относится к «хорошим» задачам выпуклого программирования, но остается вопрос о ее точности. Для улучшения двойственных лагранжевых оценок предлагается использовать расширение исходной квадратичной постановки задачи путем добавления к ней функционально избыточных ограничений. Под такими ограничениями понимают ограничения, которые выступают логическими следствиями имеющихся ограничений задачи (кроме их линейных комбинаций, которые ничего не дают при работе с функцией Лагранжа, меняя лишь значения двойственных переменных). Эти ограничения не несут никакой дополнительной информации с точки зрения исходной задачи, но изменяют функцию Лагранжа и расширяют область определения двойственных переменных (имеется в виду, что если при наличии m ограничений $(u_1, \ldots, u_m)^T \in D \subset \mathcal{R}^m$, то после добавления нового ограничения первые m компонент расширенного вектора $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1})^T \in \widetilde{D} \subset \mathcal{R}^{m+1}$ при определенных значениях u_{m+1} могут и не принадлежать множеству D). В результате в ряде случаев лагранжевая двойственная оценка для новой «расширенной» квадратичной постановки может оказаться более точной, чем для исходной, или даже равной f^*.

В 80-х годах прошлого века Н.З. Шор предлагал следующий путь расширения задачи.

А. Добавление в исходную задачу квадратичных ограничений, которые вводят новые переменные $R(\alpha^{(i)}) = R(\alpha^{(j)}) R(\alpha^{(k)})$, $\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)} + \alpha^{(k)}$, где неотрицательный целочисленный вектор $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)})^T \le \overline{\alpha}$ определяет переменную $R(\alpha^{(r)})$, которой в исходном пространстве $\mathcal{R}^n$ соответствует моном $R(\alpha^{(r)}) = x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$. Вектор $\overline{\alpha}$, который теоретически может выбираться каким угодно, ограничивает количество этих переменных. Само по себе такое добавление новых переменных не дает дивидендов, но в совокупности с ограничениями вида $R(\alpha^{(i)}) R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)}) R(\alpha^{(l)}) = 0$ при $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$, задающими различные связи между ними (с помощью ограничений такого вида учитывается неоднозначность представления монома $x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$, $\alpha^{(r)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$ в новых переменных), можно рассчитывать на уточнение двойственной оценки.

(В [1, 2] введение новых переменных использовалось для понижения степени полинома при сведении его к квадратичной функции при квадратичных ограничениях. Однако понятно, что любую квадратичную функцию (полином) можно рассматривать как полином более высокой степени, коэффициенты которого при старших степенях равны нулю.)

Б. Добавление ограничений, полученных перемножением ограничений задачи во всех возможных сочетаниях (по два, по три и т.д.), т.е. ограничений вида $\prod_{i \in L} f_i(x) = 0$ (для случая, если $\exists\, i \in L$ такое, что $i \in J$) и $-\prod_{i \in L}(-f_i\ \ (x)) \le 0$ (в противном случае, т.е. когда $L \subseteq I$) для всех возможных $L \subseteq I \cup J$. Отметим, что здесь множество J включает и ограничения исходной задачи (1), и ограничения, определяющие новые переменные (см. п. А). Полученные ограничения, содержащие мономы, степень которых не позволяет представлять их в виде квадратичной формы (с учетом новых переменных), исключаются. Но тогда включаются их линейные комбинации степени не больше двух. Например, если задача имеет ограничения $x_1^2 = (a_1, x) + b_1$, $x_2^2 = (a_2, x) + b_2$, $x_1 x_2 = (a_3, x) + b_3$, то ограничения $x_1^2 x_2^2 = ((a_1, x) + b_1)((a_2, x) + b_2)$ и $x_1^2 x_2^2 = ((a_3, x) + b_3)^2$ игнорируются, но $((a_1, x) + b_1)((a_2, x) + b_2) = ((a_3, x) + b_3)^2$ добавляется в задачу.

Обобщая изложенный в пп. А и Б процесс расширения квадратичной задачи (1), подчеркнем, что в качестве функционально избыточных ограничений могут выступать **любые** квадратичные ограничения (как с исходными переменными, так и с произвольными новыми), которые не влияют на допустимую область исходной квадратичной задачи (теоретически достаточно, чтобы глобальный экстремум оставался в допустимой области, но априори нам неизвестно допустимое сужение области, иначе оно использовалось бы в исходной задаче). Это могут быть, например, ограничения вида $f_i(x) * P(x) = 0$ для любого $i \in J$ и произвольного полинома $P(x)$ (при условии введения достаточного количества новых переменных для приведения ограничения к квадратичному виду), или вида $f_i(x) * P(x) \le 0$ для любого $i \in I$ и произвольного полинома $P(x)$, который принимает неотрицательные значения на области T, или ограничения какого-либо иного типа (например, в [3] для бинарных переменных в качестве функционально избыточных ограничений предложены ограничения вида $\left(\sum_{i=1}^{2k+1} \pm x_i\right)^2 \ge 1$ и $\left(1 + \sum_{i=1}^{2k} \pm x_i\right)^2 \ge 1$). Главное, чтобы они включали активные ограничения, позволяющие «полезно» изменить функцию Лагранжа и расширить область определения двойственных переменных в задаче (2). Для иллюстрации сказанного приведем следующий (правда, несколько искусственный) пример: если в произвольную квадратичную задачу добавить ограничение $y^2 - K_0(x) + f^* = 0$, то двойственная оценка ψ^* (2) будет точной.

КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК

Применение техники квадратичных двойственных оценок Н.З. Шора при решении различных классов задач показало ее практическую эффективность. Однако при этом приобретает важное значение вопрос их точности, а в связи с этим и вопрос выбора для исходной задачи соответствующей квадратичной постановки, на базе которой следует искать двойственную оценку (в том числе, какие семейства функционально избыточных ограничений использовать, чтобы не вводить слишком много дополнительных как прямых, так и двойственных переменных).

На сегодняшний день известны следующие теоретические результаты для частных случаев, когда двойственная оценка совпадает с точным значением минимума целевой функции.

1. Квадратичная задача (1) для случая, когда двойственная оценка достигается во внутренней точке области положительной определенности матрицы $K(u)$ функции Лагранжа.

Лемма 1 [1, с. 90]. Если $\psi^* = \sup\limits_{u \in D \cap U^+} \psi(u)$ достигается на множестве D, то $\psi^* = f^*$.

Следствие 1. Произвольная задача выпуклого квадратичного программирования обладает Ω-свойством.

(Считается, что квадратичная задача обладает Ω-свойством, если двойственная оценка для нее точная [1].)

Отметим, что в этом случае мы получаем также и одну из точек минимума задачи (1).

2. Задача нахождения глобального минимума ограниченного снизу полинома. Описанная выше схема А–Б построения функционально избыточных ограничений применялась для построения квадратичной задачи, соответствующей задаче нахождения глобального минимума полинома $P_0(x)$ ($x \in \mathcal{R}^n$, ms — максимальная суммарная степень монома полинома $P_0(x)$, s — вектор старших степеней полинома $P_0(x)$):

1) для всех $\alpha^{(i)} \le \overline{\alpha} = s/2$ вводятся переменные $R(\alpha^{(i)}) = R(\alpha^{(j)})R(\alpha^{(k)})$, $\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)} + \alpha^{(k)}$, $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_n^{(r)})^T \le \overline{\alpha}$, в результате получаем полный набор переменных, покрывающих все мономы степени $\alpha^{(i)} \le \overline{\alpha}$, а полином $P_0(x)$ представим в виде квадратичной функции $f_0(R)$ (отметим, что все компоненты вектора s четные, в противном случае полином не ограничен снизу);

2) к квадратичным ограничениям, определяющим новые переменные, добавляется полное семейство ограничений вида $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0$ для всех $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$, т.е. с помощью их линейной комбинации можно получить все представления (степени меньше или равно двух) любого монома $x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \dots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$ степени $\alpha^{(r)} \le s$, а значит, и полинома $P_0(x)$, в новых переменных.

В результате задача $f^* = \min\limits_{x \in R^n} P_0(x)$ сведена к квадратичной задаче

$$f^* = \min_R f_0(R) \tag{4}$$

при ограничениях

$$R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0, \quad \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)},$$

$$0 \le \alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_n^{(r)})^T \le s/2\,. \tag{5}$$

Теорема 1 [1, с. 141]. Для того чтобы квадратичная задача (4), (5) обладала Ω-свойством, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_0(x) - f^*$ был представим в виде суммы квадратов полиномов.

Следствие 2. $\psi^* = f^*$, если: 1) либо $n \le 2$, ms — произвольное; 2) либо n — произвольное; 3) либо $ms = 2$; $n = 3$, $ms = 4$.

3. Задача минимизации квадратичной функции на положительном ортанте. Рассматривается задача (1), где $f_i(x) = -x_i$ $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ и $J = \{\varnothing\}$. Расширим ее семейством функционально избыточных ограничений вида $-x_i x_j \le 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

Теорема 2 [1, с. 117]. Если $f^* > -\infty$, то ψ^* для расширенной квадратичной задачи совпадает с f^* тогда и только тогда, когда матрица $\bar{K}_r = \begin{pmatrix} K_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & r \end{pmatrix}$ для некоторого $r > 0$ представима в виде суммы неотрицательной и неотрицательно-определенной матрицы.

Следствие 3. При $n \le 3$ имеем $\psi^* = f^*$.

4. Задача минимизации квадратичной формы при одном квадратичном ограничении. Можно считать, что ограничение задано в виде равенства, поскольку любое ограничение-неравенство $f_1(x) \le 0$ с помощью введения в функцию квадрата дополнительной переменной можно заменить на ограничение-равенство $f_1(x) + y^2 = 0$, причем согласно доказанному в [4] утверждению значения двойственных оценок полученной и исходной задач совпадают.

Теорема 3 [5]. Задача минимизации квадратичной функции на квадратичной поверхности, для которой $D \ne \{\varnothing\}$, обладает Ω-свойством.

5. Задача о максимальном взвешенном устойчивом множестве графа. Наибольшее количество результатов о точности двойственных оценок получено для различных квадратичных постановок задачи нахождения взвешенного числа устойчивости графа. Например, предлагались разные квадратичные постановки (с использованием разных семейств функционально избыточных ограничений), для которых двойственная оценка, как было доказано, точная для графов: перфектных в [2, с. 251], [6, 7], h- и t- перфектных [2, с. 254], [2, 7], w- и w_p- перфектных [8].

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ

Сформулируем и докажем общее условие точности двойственной оценки для произвольной квадратичной задачи.

Теорема 4. Для того чтобы квадратичная задача (1) с $f^* > -\infty$ обладала Ω-свойством, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор множителей Лагранжа u^*, при котором функция $L(u^*, x) - f^*$ была представима в виде суммы квадратов линейных форм:

$$\exists\, u^* : L(u^*, x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x) . \qquad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\psi^* = f^*$. При $u \to u^*$, где $u^* = \arg \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u)$, решение внутренней задачи (3) $x(u) = -K^{-1}(u) b(u)/2$ ($K(u)$ — невырожденная матрица при $u \in D \cap U^+$) стремится к некоторой точке x^* из области, задаваемой системой линейных уравнений $L_x(u^*, x) = 2K(u^*)x + b(u^*) = 0$ (причем x^* необязательно является точкой минимума исходной задачи). Поскольку

$$L(u, x) = x^T K(u) x + b(u)^T x + c(u) =$$

$$= (x - x(u))^T K(u)(x - x(u)) + c(u) - x(u)^T K(u) x(u),$$

при u^* имеем

$$L(u^*, x) = (x - x^*)^T K(u^*)(x - x^*) + c(u^*) - x^{*T} K(u^*) x^* =$$

$$= (x - x^*)^T K(u^*)(x - x^*) + \psi^* =$$

$$= (x - x^*)^T K(u^*)(x - x^*) + f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* (\xi_i^*, x - x^*)^2 + f^*,$$

где λ_i^* — собственные числа, а ξ_i^* — собственные векторы матрицы $K(u^*)$. (Отметим, что в случае вырожденности матрицы $K(u^*)$ линейные члены отсутствуют, поскольку в противном случае $\psi(u^*) = -\infty$.) Так как все собственные числа матрицы $K(u^*)$ неотрицательны ($u^* \in \overline{D}$), искомое разложение получено.

Достаточность. Пусть существует такое $\widetilde{u} \in U^+$, что $L(\widetilde{u}, x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x)$, где $l_i(x)$ — линейные формы. Тогда $\psi(\widetilde{u}) = \min_x L(\widetilde{u}, x) = \min_x \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x) + f^* \geq f^*$. Но по определению функция $\psi(u)$ является оценкой снизу f^* для всех $u \in D \cap U^+$, т.е. $\psi(\widetilde{u}) = f^*$, причем $\widetilde{u} = u^*$ и $l_i(x^*) = 0$, $i = \overline{1, k}$.

Доказательство достаточности условия (6) и теоремы 4 в целом завершено.

Из теоремы видно, что пример из разд. 1 с функционально избыточным ограничением $y^2 - K_0(x) + f^* = 0$ не совсем «искусственный». Фактически, смысл двойственных оценок, предложенных Н.З. Шором, заключается в построении семейства ограниченных снизу на $\mathcal{R}^n$ квадратичных функций от переменных x (т.е. они выпуклы и, более того, представимы в виде суммы квадратов линейных форм и значения минимума квадратичной функции), каждая из которых соответствует некоторому $u \in U^+$ и ее минимальное значение не больше, чем f^* исходной задачи (1). Если среди них найдется хотя бы одна функция с минимумом, равным f^*, то оценка точная. Таким образом, можно говорить об «овыпуклении» исходной задачи, тем более, что при $x \in T$ функции этого семейства «аппроксимируют» снизу целевую функцию $f_0(x)$ задачи (1), а роль функционально избыточных ограничений в технике двойственных оценок Н.З. Шора заключается в расширении этого семейства функций.

Заметим, что ограниченность снизу квадратичных функций $L(u, x)$ достигается не только на области D положительной определенности матрицы $K(u)$, но и в некотором подмножестве множества $\overline{D} \setminus D$. Причем если $u \underset{u \in D}{\to} u^* \in \overline{D} \setminus D$ при решении задачи (2), то $L(u^*, x)$ является именно такой функцией, т.е. можно было бы расширить допустимую область D двойственных переменных до эффективного множества задачи (3) (множества, где функция $\psi(u)$ не равна $-\infty$), и результат при этом не изменится. В принципе можно даже рассматривать задачи (2) и (3) на всем пространстве $\mathcal{R}^m$ двойственных переменных, но тогда внутренняя задача (3) дает тривиальную оценку $-\infty$ при $x(u)$, стремящихся к бесконечности, что не дает никакой полезной информации.

В заключение отметим, что теорему 4 можно использовать для получения частных результатов (в том числе и известных). Покажем, например, как с ее помощью доказать теорему 1 (в отличие от доказательства в [1] здесь не потребуется вспомогательной теоремы о сдвиге). Действительно, необходимое и достаточное условие точности двойственной оценки квадратичной задачи (4), (5) согласно теореме 4 формулируется следующим образом: $\exists\, u^* \colon L(R, u^*) - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(R)$. Подставим вместо переменных $R(\alpha)$ соответствующие выражения в исходных переменных x. При этом линейные формы $l_i(R)$ примут вид полиномов — $l_i(R) = P_i(x)$, а все слагаемые с двойственными переменными обратятся в ноль, поскольку во всех ограничениях $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)})-R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)})=0$, $\alpha^{(i)}+\alpha^{(j)}=\alpha^{(k)}+\alpha^{(l)}$ оба члена представляют собой один и тот же моном, выраженный в разных переменных, т.е. $L(R,u)=P_0(x)$. Таким образом, из условия (6) следует $P_0(x)-f^*=\sum_{i=1}^{k}P_i^2(x)$, и необходимость условия точности двойственной оценки квадратичной задачи (4), (5), сформулированного в теореме 1, доказана. Теперь рассмотрим достаточность условия теоремы 1. Подстановки справедливы и в обратную сторону, т.е. если бы разложение $P_0(x)-f^*=\sum_{i=1}^{k}P_i^2(x)$ было известно, то при построении квадратичной задачи (4), (5) достаточно было бы заменить мономы полиномов $P_i(x)$ на соответствующие переменные $R(\alpha)$, чтобы получить квадратичную задачу с целевой функцией $f_0(R)$, для которой справедливо выражение (6) при $u^*=0$. Поскольку изначально такое разложение неизвестно (а по предположению оно существует), именно для его нахождения (точнее, нахождения $\widetilde{f}_0(R)$) и вводятся ограничения вида $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)})-$ $-R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)})=0$, $\alpha^{(i)}+\alpha^{(j)}=\alpha^{(k)}+\alpha^{(l)}$ — с помощью линейной комбинации этих ограничений в функции Лагранжа мономы изначально произвольно определенной целевой функции $f_0(R)$ ($P_0(x)$ в переменных R определяется неоднозначно) приводятся к необходимому для выделения квадратов виду или, другими словами, функция $f_0(R)$ приводится к виду $\widetilde{f}_0(R)$.

Таким образом, необходимое и достаточное условие точности двойственной оценки из теоремы 4 для квадратичной задачи специального вида (4), (5) эквивалентно условию $P_0(x)-f^*=\sum_{i=1}^{k}P_i^2(x)$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
2. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht: Kluwer, 1998. — 394 p.
3. Стецюк П.И. Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 63–75.
4. Березовский О.А., Стецюк П.И. Об одном способе нахождения двойственных квадратичных оценок Шора // Там же. — 2008. — № 2. — С. 89–99.
5. Шор Н.З., Березовский О.А. Нахождение глобального экстремума квадратичной функции на квадратичной поверхности // Информационные технологии в научных исследованиях и испытаниях. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1991. — С. 30–34.
6. Стецюк П.И., Пардалос П.М Об уточнении лагранжевых двойственных оценок в бинарных и булевых квадратичных задачах // Теория оптимальных решенй. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2006. — С. 145–153.
7. Стецюк П.И., Пардалос П.М., Крошко Д.Л. О новых лагранжевых двойственных оценках для числа устойчивости графа // Компьютерная математика. — 2006. — № 3. — С. 149–158.
8. Стецюк П.И. О новых свойствах оценок Шора для взвешенного числа устойчивости графа // Праці Міжнар. конф. «50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України». — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2008. — С. 164–173.

Поступила 18.05.2011