УДК 517.977.58

К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, А.Б. РАГИМОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИСТЕМОЙ НА КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПАРАМЕТРАХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Ключевые слова: *неточная информация, начальные условия, параметр объекта, кусочно-постоянное управление, интервал постоянства.*

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при управлении реальными процессами исходная информация о начальном состоянии и параметрах, от которых зависит поведение управляемой системы, может быть неточной. Для широкого класса задач априорная неопределенность может быть сведена к параметрической, когда вероятностные законы распределения для исследуемых ситуаций, величин и наблюдаемых процессов известны с точностью до конечного числа параметров. В работах [1–9] в условиях, когда известны функции распределения реализации неизвестных параметров и начальных условий, задача оптимального управления объектами с сосредоточенными и распределенными параметрами рассматривается относительно усредненного значения критерия качества. В настоящей статье рассматривается аналогичная задача оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений при неточной исходной информации о начальных условиях и параметрах, но на классе кусочно-постоянных управляющих функций. Следует отметить также, что границы интервалов постоянства управляющих воздействий неизвестны и оптимизируются. В статье получены необходимые условия оптимальности и формулы для градиента функционала в пространстве оптимизируемых параметров, позволяющие для решения задач оптимального управления использовать численные методы конечномерной оптимизации первого порядка. Исследован также случай, когда число интервалов постоянства управляющих воздействий не задано, а оптимизируется. Рассмотрен алгоритм по определению оптимального числа переключений. Приводятся результаты численных экспериментов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что *m*-вектор y из компактного множества $Y \subset E^m$ имеет распределение на нем, заданное функцией распределения $\wp_Y(y)$. При каждом значении вектора y, $y \in Y$, управляемый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, u, y),\ t \in (0, T],\quad x(0) = x_0 \in X_0 \subset E^n,\ y \in Y. \tag{1}$$

Здесь начальный вектор x_0 принимает значения из заданного компактного множества X_0 и имеет распределение на множестве X_0, заданное функцией распределения $\wp_{X_0}(x_0)$; $x = x(t) \in E^n$, $t \in [0, T]$, — фазовый вектор; $u = u(t) \in E^r$, $t \in [0, T]$, — управление. Каждому допустимому управлению $u(t)$, значениям вектора параметров y и начального вектора x_0 в силу (1) соответствует траектория $x(t) = x(t; u, y, x_0)$, $t \in [0, T]$.

© К.Р. Айда-заде, А.Б. Рагимов, 2012

Управление системой (1) рассматривается на классе кусочно-постоянных функций [10], принимающих постоянные значения на каждом полуинтервале $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 1, \ldots, L$, полученном разбиением отрезка $[0, T]$ $(L-1)$ оптимизируемыми точками τ_j, $j = 1, \ldots, L-1$, т.е.

$$u(t) = v_j = \text{const}\,,\ t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)\,,\ v_j \in E^r,$$

$$\tau_{j-1} \le \tau_j\,,\ j = 1, \ldots, L\,,\ \ \tau_0 = 0\,,\ \tau_L = T, \tag{2}$$

а значения управления $v_j \in E^r$, $j = 1, \ldots, L$, должны принадлежать некоторому заданному допустимому множеству U, в частности параллелепипеду

$$U = \{v: v = (v_1, \ldots, v_L)\,,\ \alpha_j \le v_j \le \beta_j\,,\ v_j\,,\ \alpha_j, \beta_j \in E^r,\ j = 1, \ldots, L\}\,. \tag{3}$$

Задача заключается в нахождении кусочно-постоянных значений управления $u(t)$, т.е. значений конечномерных векторов $v_j \in E^r$, $j = 1, \ldots, L$, и границ интервалов постоянства этих значений, определяемых вектором $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{L-1})$, при которых заданный функционал

$$J(u) = I(v, \tau) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ \int_0^T f^0(x(t; u, x_0, y), u(t))dt + \Phi(x(T; u, x_0, y)) \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) \tag{4}$$

при условиях (1)–(3) принимает минимальное значение, $(v, \tau) \in E^{L(r+1)-1}$. Предполагается, что заданные функции f^0, Φ и вектор-функция f вместе с частными производными непрерывны по своим аргументам.

Эту задачу оптимального управления можно отнести к специальному классу задач конечномерной оптимизации, в которой для вычисления целевой функции $J(u) = I(v, \tau)$ требуется решить задачу Коши (1) и вычислить интеграл из (4).

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Для решения задачи (1)–(4), т.е для определения оптимальных значений векторов $v \in E^{Lr}$ и $\tau \in E^{L-1}$, предлагается использовать конечномерные методы оптимизации первого порядка. С этой целью будут получены аналитические формулы градиента целевого функционала $\operatorname{grad} J(u) = \nabla I(v, \tau) = (\nabla_v I(v, \tau), \nabla_\tau I(v, \tau))$.

Рассмотрим следующую функцию Гамильтона–Понтрягина и соответствующую сопряженную систему [1, 2]:

$$H(\psi, x, u, x_0, y) = -f^0(x, u) + \psi^{\mathrm{T}}(t; u, x_0, y) f(x, u, y)\,; \tag{5}$$

$$\dot\psi(t; u, x_0, y) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial x} = \frac{\partial f^0(x, u)}{\partial x} - \frac{\partial f^{\mathrm{T}}(x, u, y)}{\partial x} \psi(t; u, x_0, y)\,,$$

$$\psi(T; u, x_0, y) = -\frac{\partial \Phi(x(T; u, x_0, y))}{\partial x}\,, \tag{6}$$

где $\psi(t) = \psi(t; u, x_0, y) \in E^n$ — решение задачи Коши (6), соответствующее допустимому управлению $u = u(t) \in U$, начальному условию $x_0 \in X_0$ и значению параметра $y \in Y$. Введем следующее обозначение:

$$J_0(u, x_0, y) = \int_0^T f^0(x(t; u, x_0, y), u(t))dt + \Phi(x(T; u, x_0, y))\,.$$

КИСА

Учитывая, что значения управления $u(t)$, начальные условия $x_0 \in X_0$ и значения вектора параметров $y \in Y$ взаимно независимы, имеем

$$\nabla I(v, \tau) = \text{grad } J(u) = \int_Y \int_{X_0} \text{grad } J_0(u; x_0, y) d\wp_{X_0}(x_0) \, d\wp_Y(y).$$

Пусть при каких-либо заданных значениях вектора параметров $y \in Y$ и начального вектора $x_0 \in X_0$ допустимое управление $u(t)$ получило приращение $\Delta u = \Delta u(t)$, причем $u(t) + \Delta u(t) \in U$. Тогда соответствующее приращение функционала (4) можно записать следующим образом [1]:

$$\Delta I(v, \tau) = \Delta J(u) = J(u + \Delta u) - J(u) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} (J_0(u + \Delta u; x_0, y) - J_0(u; x_0, y)) d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) = \tag{7}$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ -\int_0^T \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u(t) dt + o(\| \Delta u(\cdot) \|) \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y),$$

где

$$\| \Delta u(t) \| = \| \Delta u(t) \|_{L_2[0,T]} = \left(\int_0^T \| \Delta u(t) \|^2_{E^r} \, dt \right)^{1/2},$$

$$\lim_{\|\Delta u\| \to 0} \frac{o(\| \Delta u \|)}{\| \Delta u \|} = 0.$$

С целью получения формул для компонентов градиента $\nabla_v I(v, \tau)$, учитывая кусочно-постоянство управления, приращение $\Delta u(t)$ выберем из предположения, что произвольно выбранный *i*-й компонент управления, $i = 1, \ldots, r$, на каком-либо *j*-м интервале постоянства, $j = 1, \ldots, L$, получила приращение Δv_{ij}, т.е.

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le t < \tau_{j-1}, \tau_j \le t \le T, \\ \Delta_j v_j = \text{const}, \; \tau_{j-1} \le t < \tau_j, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Delta_i v_j = (0, \ldots, 0, \Delta v_{ij}, 0, \ldots, 0)$. Преобразуем соответствующее приращению управления (8) выражение приращения функционала (7):

$$\Delta_v I(v, \tau) = \Delta J(u) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ -\int_0^{\tau_{j-1}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt - \right.$$

$$\left. -\int_{\tau_j}^T \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt + o(\| \Delta u(\cdot) \|) \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ -\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta v_j dt + o(\| \Delta u(\cdot) \|) \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ -\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u_i} \Delta v_{ij} dt \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) + \tag{9}$$

$$+ \int_Y \int_{X_0} o(\| \Delta u(\cdot) \|) d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y).$$

Разделив обе части (9) на Δv_{ij} и перейдя к пределу при $\Delta v_{ij} \to 0$ с учетом того, что в силу (8) и компактности множеств Y, X_0 справедливо

$$\lim_{\Delta v_{ij} \to 0} \int_Y \int_{X_0} \frac{o(\|\Delta u(\cdot)\|)}{\Delta v_{ij}} d\wp_{X_0}(x_0)\, d\wp_Y(y) = 0 ,$$

имеем

$$\frac{dI(v,\tau)}{dv_{ij}} = \int_Y \int_{X_0} \left\{ -\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u_i} dt \right\} d\wp_{X_0}(x_0)\, d\wp_Y(y) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \left[\frac{\partial f^0(x,u,t)}{\partial u_i} - \frac{\partial f^{\mathrm{T}}(x,u,y)}{\partial u_i} \psi(t; u, x_0, y) \right] dt \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y), \quad (10)$$

$$j = 1, \dots, L, \ \ i = 1, \dots, r .$$

Далее получим формулу для $\nabla_\tau I(v,\tau)$. Пусть значение τ_j получило приращение $\Delta\tau_j$, причем $\Delta\tau_j > 0$ и $\tau_j + \Delta\tau_j < \tau_{j+1}$. Такое изменение значения τ_j соответствует случаю, когда управление получит приращение, которое можно записать в виде

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \tau_j, \ \tau_j + \Delta\tau_j \le t \le T, \\ v_j - v_{j+1}, & \tau_j \le t < \tau_j + \Delta\tau_j . \end{cases} \quad (11)$$

Для приращения функционала (7), соответствующего приращению управления (11), имеем

$$\Delta_\tau I(v,\tau) = \Delta J(u) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ -\int_0^{\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt - \int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_j + \Delta\tau_j}^{T} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt + o(\|\Delta u(\cdot)\|) \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) =$$

$$= \int_Y \int_{X_0} \left\{ - \int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} \Delta u dt + o(\|\Delta u(\cdot)\|) \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) = \quad (12)$$

$$= (v_j - v_{j+1})^{\mathrm{T}} \int_Y \int_{X_0} \left\{ - \int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta\tau_j} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(\psi, x, u, x_0, y)}{\partial u} dt \right\} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) +$$

$$+ \int_Y \int_{X_0} o(\|\Delta u(\cdot)\|) d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) .$$

Разделим обе части (12) на $\Delta\tau_j$ и перейдем к пределу $\Delta\tau_j \to 0$. Используя теорему о среднем значении с учетом того, что в силу (11) и компактности множеств Y, X_0 имеет место

$$\lim_{\Delta\tau_j \to 0} \int_Y \int_{X_0} \frac{o(\|\Delta u(\cdot)\|)}{\Delta\tau_j} d\wp_{X_0}(x_0) d\wp_Y(y) = 0 ,$$

К И С А

получим

$$\frac{dI(v,\tau)}{d\tau_j} = (v_j - v_{j+1})\times$$

$$\times\int_Y\int_{X_0}\left\{\left[\frac{\partial f^0(x,u,t)}{\partial u} - \frac{\partial f^{\mathrm{T}}(x,u,t)}{\partial u}\psi(t;u,x_0,y)\right]\Bigg|_{t=\tau_j}\right\} d\wp_{X_0}(x_0)\, d\wp_Y(y), \qquad (13)$$

$$j = 1,\ldots, L-1.$$

Отрицательное приращение $\Delta\tau_j < 0$ для τ_j, когда $\tau_j - |\Delta\tau_j| > \tau_{j-1}$, соответствует тому, что управление $u(t)$ получает приращение

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t < \tau_j - |\Delta\tau_j|, \tau_j \le t \le T, \\ v_{j+1} - v_j,\ \tau_j - |\Delta\tau_j| \le t < \tau_j. \end{cases}$$

Повторив аналогичные формуле (12) выкладки, снова получим формулу (13).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Градиент функционала задачи (1)–(4) в пространстве управляющих параметров $(v,\tau) \in E^{L(r+1)-1}$ при выполнении налагаемых выше условий на функции, участвующие в задаче, определяется формулами (6), (10), (13).

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ИНТЕРВАЛОВ ПОСТОЯНСТВА УПРАВЛЕНИЯ

Выше предполагалось, что управляющие воздействия в задаче (1)–(4) ищутся на классе кусочно-постоянных функций с заранее заданным числом L переключений управления от одного значения к другому. В практических приложениях число переключений, как правило, заранее не бывает определенным и требуется выбор оптимального их числа.

В связи с этим рассмотрим следующий подход «рационального» выбора числа переключений, основанный на результатах работы [10]. При этом очевидно, что рациональное число переключений управляющих воздействий в какой-то степени должно удовлетворять условию возможной минимальности их числа.

Обозначим $J_L^* = J^*(v^L, \tau^L, L)$ минимальное значение функционала задачи (1)–(4) при заданном числе L интервалов постоянства управления, v^L, τ^L — соответственно оптимальные кусочно-постоянное управление и границы интервалов постоянства. Очевидно, что $J_L^* = J^*(v^L, \tau^L, L)$ как сложная функция третьего аргумента L является невозрастающей, т.е. в общем случае имеет место неравенство

$$J^*(u^*) \le J^*(v^{L_1}, \tau^{L_1}, L_1) \le J^*(v^{L_2}, \tau^{L_2}, L_2) \ \text{при}\ L_1 > L_2, \qquad (14)$$

где $J^* = J^*(u^*)$ — оптимальное значение функционала исходной задачи управления (1)–(4) на классе кусочно-непрерывных управляющих функций. Таким образом, из (14) следует, что при увеличении числа интервалов постоянства оптимальные значения целевого функционала могут лишь уменьшаться и приближаться сколь угодно близко к J^* (рис. 1):

$$\lim_{L\to\infty} J^*(v^L, \tau^L, L) = J^*.$$

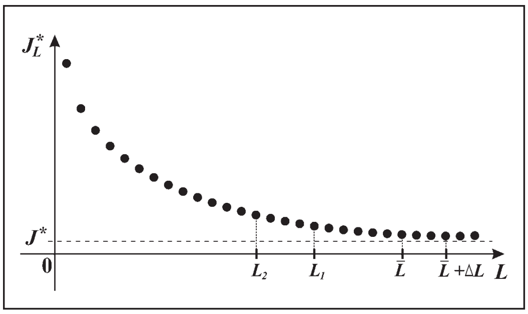

Рис. 1. Зависимость оптимального значения функционала от числа интервалов постоянства управления

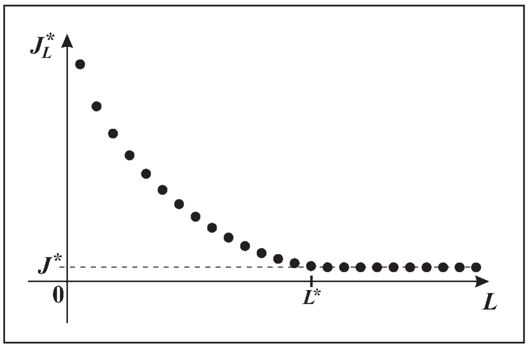

Рис. 2. Зависимость самого оптимального управления от заданного числа L

В случае, если решение задачи оптимального управления (1)–(4) на классе кусочно-непрерывных функций является кусочно-постоянным (релейным, нескользящим) управлением, то существует определенное значение L^*, для которого имеет место равенство (рис. 2)

$$J^*(v^L, \tau^L, L) = J^*(u^*) \text{ при } L > L^*.$$

В качестве рационального («оптимального») числа интервалов постоянства управления предлагается принять такое минимальное значение $\bar{L}$, при котором впервые выполняется одно из следующих неравенств:

$$\Delta J^*(v^{\bar{L}}, \tau^{\bar{L}}, \bar{L}) = |J^*(v^{\bar{L}+\Delta L}, \tau^{\bar{L}+\Delta L}, \bar{L}+\Delta L) - J^*(v^{\bar{L}}, \tau^{\bar{L}}, \bar{L})| \le \delta,$$

$$\Delta J^*(v^{\bar{L}}, \tau^{\bar{L}}, \bar{L}) / J^*(v^{\bar{L}}, \tau^{\bar{L}}, \bar{L}) \le \delta,$$

$$\Delta J^*(v^{\bar{L}}, \tau^{\bar{L}}, \bar{L}) / \Delta L \le \delta,$$

где $\Delta L > 0$ — заданное целое число, определяющее приращение числа интервалов постоянства управлений, δ — заданное положительное число, определяемое с требуемой точностью решения задачи оптимизации числа интервалов постоянства управления.

Для определения искомого рационального числа $\bar{L}$ интервалов постоянства можно использовать какой-либо из алгоритмов одномерного поиска, например метод деления пополам, метод золотого сечения.

По результатам решения задачи управления на классе кусочно-постоянных управляющих воздействий с заранее заданным числом L интервалов постоянства можно рассмотреть вопрос уменьшения числа L, если для оптимальных τ^L и v^L на каких-либо двух последовательных j-м и $(j+1)$-м временных интервалах, $j = 0, \ldots, L-1$, выполнилось одно из условий

$$|\tau_j^L - \tau_{j+1}^L| < \delta_1, \tag{15}$$

$$|v_{ij}^L - v_{ij+1}^L| \le \delta_2 \quad , \; i = 1, \ldots, r, \tag{16}$$

для заданных достаточно малых значений $\delta_1, \delta_2 > 0$. В случае выполнения (15) j-й интервал постоянства управления можно исключить в силу его малости, а в случае (16) j-й и $(j+1)$-й интервалы можно объединить в силу совпадения на них значений управления. Следовательно, в обоих случаях число интервалов L постоянства управления уменьшится на единицу.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

С помощью формул градиента (6), (10), (13) рассмотрим следующий итерационный алгоритм для определения оптимальных значений кусочно-постоянных управлений, основанный на методах оптимизации первого порядка.

Шаг 1. Множества X_0, Y покрываются узлами сеточной области (x_{0i}, y_j), где i, j — номера узлов сетки, используемых в квадратурных формулах для аппроксимации интегралов в (4) по множествам X_0 и Y, относительно которых проводятся последующие вычисления по определению значений компонентов градиента.

Шаг 2. При текущем значении вектора $(v^k, \tau^k) \in E^{L(r+1)-1}$ и для $x_{0i} \in X_0$, $y_j \in Y$ каким-либо численным методом решается прямая задача Коши (1) и определяется $x^k(t; v^k, \tau^k, x_{0i}, y_j)$.

Шаг 3. Для соответствующего решения $x^k(t; v^k, \tau^k, x_{0i}, y_j)$ численным методом находится решение сопряженной задачи Коши (6) $\psi^k(t; v^k, \tau^k, x_{0i}, y_j)$.

Шаг 4. С помощью (10), (13) с использованием какой-либо квадратурный формулы вычисляются слагаемые интегральной суммы для компонентов вектора градиента функционала.

Шаг 5. Применяя численные методы конечномерной оптимизации первого порядка, например итерационный метод проекции градиента на ограничения (2), (3), вычисляется новое приближение

$$(v^{k+1}, \tau^{k+1}) = P_{(2),(3)}[(v^k, \tau^k) - \alpha \nabla I(v^k, \tau^k)],\ k = 0, 1, \ldots,$$

где $P_{(2),(3)}(v, \tau)$ — оператор проектирования вектора (v, τ) на допустимую область параметров, определяемую ограничениями (2), (3); (v^0, τ^0) — некоторое заданное начальное приближение; α — шаг одномерной минимизации. В случае невыполнения условия оптимальности или останова итерационного процесса (например, $|\alpha| \le \varepsilon$ или $|I(v^{k+1}, \tau^{k+1}) - I(v^k, \tau^k)| \le \varepsilon$, ε — заданная точность оптимизации) повторяются шаги 2–5.

Приведем численные результаты применения полученных формул в следующих тестовых задачах.

Задача 1. Используя формулы (10), (13), применим предложенный подход к тестовой задаче, в основе которой лежит модельная задача с точно заданными значениями параметра $y = 1$ и начальными условиями $x_0 = (5; 0)$ при известном оптимальном управлении $v^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1; -1; 1)$, $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*) = (0.95; 4.55)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = yu - \sin x_1, \end{cases} \quad x_1(0) \in [4.8; 5.2],\ x_2(0) = 0, \tag{17}$$

$$y \in [0.9;\ 1.1]\ ,\ |u(t)| \le 1,\ t \in [0; 5],$$

$$J(u) = \int_{0.9}^{1.1} \int_{4.8}^{5.2} [x_1^2(5; x_0, y) + x_2^2(5; x_0, y)]\, d\wp_{X_0}(x_0)\, d\wp_Y(y) \to \min_u . \tag{18}$$

Функции распределения $\wp_{X_0}(x_0)$ и $\wp_Y(y)$ выберем равномерными:

$$\wp_{X_0}(x_0) = \frac{1}{0.4}(x_0 - 4.8),\ \wp_Y(y) = \frac{1}{0.2}(y - 0.9),$$

тогда функционал (18) примет вид

$$J(u) = \frac{1}{0.08} \int_{0.9}^{1.1} \int_{4.8}^{5.2} [x_1^2(5; x_0, y) + x_2^2(5; x_0, y)]\, dx_0\, dy \to \min_u . \tag{19}$$

Здесь будем полагать, что число интервалов постоянства кусочно-постоянного управления $u(t)$ есть $L = 3$, т.е. оптимизируется вектор $(\tau, v) = (\tau_1, \tau_2, v_1, v_2, v_3)$.

В произвольно взятой точке $(\tau, v) = (0.78; 3.46; 0.70; -0.60; 0.50)$ вектор градиента, рассчитанный по формулам (10), (13), определяется равенством

$$\operatorname{grad} I(\tau, v) = (-10.8616; -12.7888; -8.5500; 10.3567; 10.9001).$$

Для сравнения использовались также центральная, правая и левая схемы разностных аппроксимаций производных в этой точке:

$$\nabla I(x) = (I(x+h) - I(x-h)) / (2h) + o(h^2), \tag{20}$$

$$\nabla I(x) = (I(x+h) - I(x)) / h + o(h), \tag{21}$$

$$\nabla I(x) = (I(x) - I(x-h)) / h + o(h). \tag{22}$$

Значения компонентов вектора $\nabla I(\tau, v)$, как видно из табл. 1, существенно зависят от h. Наилучшее значение получено с применением центральной схемы при $h = 0.005$ и $h = 0.001$, т.е. оно близко к значению, рассчитанному по формулам (10), (13). Эксперименты показали, что это справедливо и для других значений оптимизирующих параметров.

Таблица 1

h	Значения $\nabla I(\tau, v)$, вычисленные по разностным схемам		
	Центральная (20)	Левая (22)	Правая (21)
0.1	(–10.7143; –12.7849; –8.5426; 10.6442; 10.8991)	(–12.0919; –12.9078; –8.7913; 9.3894; 10.7204)	(–9.3368; –12.6620; –8.2938; 11.8989; 11.0777)
0.05	(–10.7849; –12.8012; –8.5481; 10.4282; 10.8998)	(–11.4715; –12.8623; –8.6723; 9.8072; 10.8105)	(–10.0983; –12.7402; –8.4240; 11.0492; 10.9891)
0.01	(–10.8610; –12.7888; –8.5499; 10.3596; 10.9001)	(–10.9460; –12.7952; –8.5747; 10.2358; 10.8822)	(–10.7760; –12.7824; –8.5251; 10.4834; 10.9179)
0.005	(–10.8615; –12.7888; –8.5500; 10.3574; 10.9001)	(–10.9040; –12.7920; –8.5624; 10.2955; 10.8911)	(–10.8190; –12.7856; –8.5376; 10.4193; 10.9090)
0.001	(–10.8616; –12.7888; –8.5500; 10.3567; 10.9001)	(–10.8701; –12.7894; –8.5525; 10.3444; 10.8983)	(–10.8531; –12.7881; –8.5475; 10.3691; 10.9018)

В табл. 2 приведены результаты численных экспериментов по решению задачи (17), (19) с точностью оптимизации $\varepsilon = 0.001$ при различных начальных значениях (τ^0, v^0) управляющего вектора (τ, v).

Таблица 2

Номер точки	Число итераций	Численные результаты решения задачи (17), (19) при $L = 3$			
		(τ^0, v^0)	$I(\tau^0, v^0)$	(τ^*, v^*)	$I(\tau^*, v^*)$
1	34	(0.78; 3.46; 0.70; – 0.60; 0.50)	33.0325	(0.9651; 4.5500; 1.0000; –1.0000; 1.0000)	13.0587
2	28	(0.78; 3.46; 2.00; – 2.00; 0.50)	7.9791	(0.9709; 4.5500; 1.0000; –1.0000; 1.0000)	13.0591
3	68	(0.52; 2.73; 0.80; – 0.80; 0.40)	44.2627	(0.9659; 4.5485; 1.0000; –1.0000; 1.0000)	13.0595
4	35	(0.28; 3.26; 0.26; – 0.40; 0.32)	43.1466	(0.9690; 4.5500; 1.0000; –1.0000; 1.0000)	13.0589
5	27	(0.64; 2.82; 0.85; – 0.30; 0.40)	43.1901	(0.9668;4.5500; 1.0000; –1.0000; 1.0000)	13.0588

В табл. 3 приведены результаты оптимизации кусочно-постоянных управлений в задаче (17), (19) с пятью ($L=5$) интервалами постоянства управления для двух различных начальных точек итерационного процесса. Используя условия (15), (16), из полученных результатов оптимизации вытекает следующее. Оптимальное решение, полученное из первой начальной точки, имеет компоненты τ_1^*, τ_2^* вектора τ^*, которые удовлетворяют условию (15), а компоненты v_3^*, v_4^* вектора v^* удовлетворяют условию (16). Для оптимального решения, полученного из второй начальной точки, значения компонентов τ_1^*, τ_2^*, τ_3^* вектора τ^* удовлетворяют условию (15). Следовательно, объединяя компоненты с близкими значениями, получим аналогичные табл. 2 результаты, а также $L^*=3$.

Таблица 3

Номер точки	Число итераций	Численные результаты решения задачи (17), (19) при $L=5$			
		(τ^0, v^0)	$I(\tau^0, v^0)$	(τ^*, v^*)	$I(\tau^*, v^*)$
1	16	(0.62; 0.78; 2.26; 3.76; 0.4; 0.5; – 0.6; – 0.8; 0.8)	31.1464	(0.950; 0.971; 1.875; 4.552; 1.00; 0.613; – 1.00; – 1.00; 1.00)	13.0589
2	5	(1.11; 0.76; 0.81; 4.76; 0.45; 0.85; – 0.7; – 0.8; 0.8)	19.1692	(0.983; 0.983; 0.983; 4.550; 1.00; 0.845; – 0.646; – 1.00; 1.00)	13.0774

Задача 2. Применим рассмотренный подход к следующей тестовой задаче, в основе которой лежит модельная задача с точно заданными значениями параметра $y=1$ и начальными условиями $x_0=(1;0)$ при известном оптимальном управлении $v^*=(v_1^*, v_2^*)=(4;1)$, $\tau^*=\tau_1^*=\pi/4$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -yu(t)x_1, \end{cases} \quad x_1(0)\in[0.7;1.2],\ x_2(0)=0, \tag{23}$$

$$y\in[0.9;1.1],\ 1\le u(t)\le 4,\ t\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right];$$

$$J(u)=\int_{0.9}^{1.1}\int_{0.7}^{1.2} x_1\left(\frac{3\pi}{4}; x_0, y\right) d\wp_{X_0}(x_0)\, d\wp_Y(y)\to\min_u . \tag{24}$$

Функции распределения $\wp_{X_0}(x_0)$ и $\wp_Y(y)$ выберем следующим образом:

$$\wp_{X_0}(x_0)=\frac{1}{0.5}(x_0-0.7),\ \wp_Y(y)=\frac{1}{0.2}(y-0.9).$$

Тогда функционал (24) примет вид

$$J(u)=\frac{1}{0.1}\int_{0.9}^{1.1}\int_{0.7}^{1.2} x_1\left(\frac{3\pi}{4}, x_0, y\right) dx_0\, dy\to\min_u . \tag{25}$$

Здесь будем полагать, что число интервалов постоянства кусочно-постоянного управления $u(t)$ есть $L=2$, т.е. оптимизируется вектор $(\tau, v)=(\tau_1, v_1, v_2)$.

В табл. 4 приведены результаты численного решения задачи (23), (25) для различных начальных значений (τ^0, v^0) управляющего вектора (τ, v).

Таблица 4

Число итераций	Численные результаты решения задачи (23), (25) при $L = 2$			
	(τ^0, v^0)	$I(\tau^0, v^0)$	(τ^*, v^*)	$I(\tau^*, v^*)$
6	(1.231; 3.200; 1.500)	–1.2582	(0.82466; 4.0000; 1.0000)	–1.8908
6	(0.522; 2.850; 1.200)	–1.2410	(0.82467; 4.0000; 1.0000)	–1.8908
5	(0.953; 3.150; 2.430)	–0.8868	(0.82467; 4.0000; 1.0000)	–1.8908
5	(1.847; 3.540; 1.820)	–0.5380	(0.82467; 4.0000; 1.0000)	–1.8908
4	(1.368; 2.180; 1.470)	–1.1169	(0.82467; 4.0000; 1.0000)	–1.8908
5	(2.092; 1.890; 0.750)	–0.9739	(0.82467; 4.0000; 1.0000)	–1.8908

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье получены формулы для градиента функционала в задаче оптимального управления объектами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений на классе кусочно-постоянных функций при неточной информации о начальных условиях и параметрах. Эти формулы для градиента целевого функционала задачи позволяют применить методы оптимизации первого порядка для численного решения задачи оптимального управления.

С учетом технически легкой и возможности достаточно точной реализации кусочно-постоянных управляющих воздействий предлагаемый подход к решению рассмотренной задачи оптимального управления может найти широкое применение в системах автоматизированного и автоматического управления при неточно заданной информации о начальных условиях и параметрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. — М.: Наука и техника, 1974. — 272 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях // Тр. МИАН. — 1995. — Т. 211. — С. 140–152.
3. Третьяков В.Е., Целищева И.В., Шишкин Г.И. Оптимальное управление системами с неполной и неточной информацией // Тр. ИММ. — 1992. — Т. 2. — С. 176–187.
4. Krasovskii N.N., Tarasova S.I., Tretyakov V.E., Shishkin G.I. Control with information deficit // Probl. of Control and Inform. Theory. — 1986. — **15**, N 3. — P. 203–218.
5. Chen S.B. The robust optimal control of uncertain systems-state space method // Automatic Control, IEEE Transactions on Automatic Control. — 1993. — **38**, N 6. — P. 951–957.
6. Ka-Veng Yuen and James L. Beck. Reliability-based robust control for uncertain dynamical systems using feedback of incomplete noisy response measurements // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. — 2003. — **32.** — P. 751–770.
7. Quincampoix M., Veliov V.M. Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances // SIAM J. on Control and Optimization. — 2004. — **43**, N 4. — P. 1373–1399.
8. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — К.: Наук. думка, 1995. — 170 с.
9. Sergienko I.V., Deineka V. S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer, 2005. — 400 p.
10. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций // Автоматика и вычисл. техника. — 2007. — № 1. — С. 27–36.

Поступила 28.12.2010

КИСА