УДК 517.9

**Н.В. ЗАДОЯНЧУК, П.О. КАСЬЯНОВ**

# ДИНАМИКА РЕШЕНИЙ КЛАССА АВТОНОМНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Ключевые слова:** *вязкоупругость, эволюционное включение, глобальный аттрактор, траекторный аттрактор, псевдомонотонное отображение.*

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для эволюционной тройки $(V;H;V^*)$, многозначного (в общем случае) отображения $A_0: V \rightrightarrows V^*$, однозначного отображения $B_0: V \to V^*$ и внешней силы $f_0 \in V^*$ рассмотрена задача исследования динамики при $t \to +\infty$ всех слабых решений нелинейного автономного дифференциально-операторного включения второго порядка

$$y''(t) + A_0(y'(t)) + B_0(y(t)) \ni f_0, \qquad (1)$$

заданных при $t \geq 0$. Здесь параметры задачи удовлетворяют условиям:

- $(H_1)$ $V$ — гильбертово пространство;
- $(A_1)$ $\exists c > 0$: $\forall u \in V$, $\forall d \in A_0(u)$ $\|d\|_{V^*} \leq c(1+\|u\|_V)$;
- $(A_2)$ $\exists \alpha, \beta > 0$: $\forall u \in V$, $\forall d \in A_0(u)$ $\langle d, u\rangle_V \geq \alpha \|u\|_V^2 - \beta$;
- $(A_3)$ $A_0 = A_1 + A_2$, где $A_1: V \to V^*$ — линейный, самосопряженный, положительный оператор, $A_2: V \rightrightarrows V^*$ имеет следующие свойства: существует такое гильбертово пространство $Z$, что вложение $V \subset Z$ — плотное и компактное, а вложение $Z \subset H$ — плотное и непрерывное; для любого $u \in Z$ множество $A_2(u)$ является непустым, выпуклым и слабо компактным в $Z^*$; $A_2: Z \rightrightarrows Z^*$ — ограниченное отображение, т.е. $A_2$ переводит ограниченные множества из $Z$ в ограниченные множества в пространстве $Z^*$, и демизамкнутое отображение, т.е. если $u_n \to u$ в $Z$, $d_n \to d$ слабо в $Z^*$, $n \to +\infty$, и $d_n \in A_2(u_n)$ $\forall n \geq 1$ то $d \in A_2(u)$;
- $(B_1)$ $B_0: V \to V^*$ — линейный, самосопряженный оператор;
- $(B_2)$ $\exists \gamma > 0$: $\langle B_0 u, u\rangle_V \geq \gamma \|u\|_V^2$.

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_V: V^* \times V \to \mathbb{R}$ — спаривание в $V^* \times V$, совпадающее на $H \times V$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ в гильбертовом пространстве $H$.

**Замечание 1.** Из отождествления $H \equiv H^*$ и условия $(A_3)$ имеем цепочку плотных и непрерывных вложений $V \subset Z \subset H \subset Z^* \subset V^*$.

**Замечание 2.** Из $(A_1)-(A_3)$, а также [1, 2] следует, что отображение $A_0$ удовлетворяет такому условию: $(A_3)'$ $A_0: V \rightrightarrows V^*$ — $\lambda_0$-псевдомонотонное (обобщенно $\lambda_0$-псевдомонотонное), т.е.

- для любого $u \in V$ множество $A_0(u)$ является непустым, выпуклым и слабо компактным в $V^*$;
- если $u_n \to u$ слабо в $V$, $n \to +\infty$, $d_n \in A_0(u_n)$ $\forall n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle d_n, u_n - u\rangle_V \leq 0$,

то $\forall \omega \in V$ $\exists d(\omega) \in A_0(u)$:

$$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \langle d_n, u_n - \omega\rangle_V \geq \langle d(\omega), u - \omega\rangle_V;$$

• отображение $A_0$ является полунепрерывным сверху как такое, что действует из произвольного конечномерного подпространства из $V$ в $V^*$, снабженного слабой топологией.

**Замечание 3.** Далее без потери общности на пространстве $V$ рассмотрим эквивалентную норму $||u||_V = \sqrt{\langle B_0 u, u\rangle_V}$, $u \in V$. Данная норма порождается скалярным произведением $(u, v)_V = \langle B_0 u, v\rangle_V$, $u, v \in V$.

**Определение 1.** Под слабым решением эволюционного включения (1) на отрезке $[\tau, T]$ понимаем элемент $u(\cdot)$ пространства $L_2(\tau, T; V)$ такой, что $u'(\cdot) \in L_2(\tau, T; V)$ и для некоторого $d(\cdot) \in L_2(\tau, T; V^*)$

$$d(t) \in A_0(u'(t)) \text{ для почти всех } t \in (\tau, T),$$

$$-\int_\tau^T (\zeta'(t), u'(t))dt + \int_\tau^T \langle d(t), \zeta(t)\rangle_V \, dt +$$

$$+\int_\tau^T \langle B_0 u(t), \zeta(t)\rangle_V \, dt = \int_\tau^T \langle f_0, \zeta(t)\rangle_V \quad \forall \zeta \in C_0^\infty([\tau, T]; V), \tag{2}$$

где $u'$ — производная элемента $u(\cdot)$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}^*([\tau, T]; V^*)$.

Вопрос об абстрактном существовании решений задачи типа (1) при приведенных выше условиях рассмотрен в [1–26]. В настоящей статье при выполнении подобных условий с помощью теории глобальных и траекторных аттракторов [1, 3, 5–9, 12, 14, 15] исследована многозначная динамика всех слабых решений (при $t \to +\infty$) в фазовых и расширенных фазовых пространствах, в частности, изучены структурные свойства глобальных и траекторных аттракторов. В качестве одного из возможных приложений рассмотрена задача из нелинеаризированной теории вязкоупругости с многомерными суперпотенциальными законами. Отметим, что ряд конструктивных методов обоснования существования решений, а также их свойств при значительно более слабых условиях на параметры задачи был рассмотрен в [24, 25].

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для фиксированных $\tau < T$ рассмотрим

$$X_{\tau,T} = L_2(\tau, T; V), \ X^*_{\tau,T} = L_2(\tau, T; V^*), \ W_{\tau,T} = \{u \in X_{\tau,T} \mid u' \in X^*_{\tau,T}\},$$

$$A_{\tau,T} : X_{\tau,T} \rightrightarrows X^*_{\tau,T}, \ A_{\tau,T}(y) = \{d \in X^*_{\tau,T} \mid d(t) \in A_0(y(t))$$

$$\text{для почти всех } t \in (\tau, T)\},$$

$$B_{\tau,T} : X_{\tau,T} \to X^*_{\tau,T}, \ B_{\tau,T}(y)(t) = B_0(y(t)) \text{ для почти всех } t \in (\tau, T),$$

$$f_{\tau,T} \in X^*_{\tau,T}, \ f_{\tau,T}(t) = f_0 \text{ для почти всех } t \in (\tau, T).$$

Отметим, что пространство $W_{\tau,T}$ является гильбертовым пространством с нормой графика производной [2, утверждение 4.2.1]:

$$||u||^2_{W_{\tau,T}} = ||u||^2_{X_{\tau,T}} + ||u'||^2_{X^*_{\tau,T}}, \quad u \in W_{\tau,T}. \tag{3}$$

Из [1, Lemma 7] и условий $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)'$ следует, что $A_{\tau,T} : X_{\tau,T} \rightrightarrows X^*_{\tau,T}$ удовлетворяет условиям:

$(N_1)$ $\exists C_1 > 0 : ||d||_{X^*_{\tau,T}} \le C_1(1 + ||y||_{X_{\tau,T}}) \ \forall y \in X_{\tau,T}, \ \forall d \in A_{\tau,T}(y)$;

$(N_2)$ $\exists C_2, C_3 > 0: \langle d, y\rangle_{X_{\tau,T}} \geq C_2 \|y\|^2_{X_{\tau,T}} - C_3 \quad \forall y \in X_{\tau,T}, \ \forall d \in A_{\tau,T}(y);$

$(N_3)$ $A_{\tau,T}: X_{\tau,T} \rightrightarrows X^*_{\tau,T}$ — $w_\lambda$-псевдомонотонный (обобщенно $w_\lambda$-псевдомонотонный) на $W_{\tau,T}$, т.е.

• для любого $y \in X_{\tau,T}$ множество $A_{\tau,T}(y)$ является непустым, выпуклым и слабо компактным в $X^*_{\tau,T}$;

• $A_{\tau,T}$ — полунепрерывное сверху как такое, что действует из произвольного конечномерного подпространства $X_{\tau,T}$ в $X^*_{\tau,T}$, снабженного слабой топологией;

• если $y_n \to y$ слабо в $W_{\tau,T}$, $d_n \in A_{\tau,T}(y_n)$ $\forall n \geq 1$, $d_n \to d$ слабо в $X^*_{\tau,T}$ и $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \langle d_n, y_n - y\rangle_{X_{\tau,T}} \leq 0$, то $d \in A_{\tau,T}(y)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle d_n, y_n\rangle_{X_{\tau,T}} = \langle d, y\rangle_{X_{\tau,T}}$.

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_{\tau,T}}: X^*_{\tau,T} \times X_{\tau,T} \to \mathbb{R}$ — спаривание в $X^*_{\tau,T} \times X_{\tau,T}$, совпадающее на $L_2(\tau,T;H) \times X_{\tau,T}$ со скалярным произведением в $L_2(\tau,T;H)$, т.е.

$$\forall u \in L_2(\tau,T;H), \ \forall v \in X_{\tau,T} \quad \langle u, v\rangle_{X_{\tau,T}} = \int_\tau^T (u(t), v(t))\, dt.$$

Заметим также [4, теорема IV.1.17], что вложение $W_{\tau,T} \subset C([\tau,T];H)$ — непрерывно и плотно, более того

$$\forall u, v \in W_{\tau,T} \quad (u(T), v(T)) - (u(\tau), v(\tau)) = \int_\tau^T [\langle u'(t), v(t)\rangle_V + \langle v'(t), u(t)\rangle_V]\, dt. \quad (4)$$

Из определения производной в смысле $\mathcal{D}([\tau,T]; V^*)$ и равенства (2) непосредственно следует такое утверждение.

**Лемма 1.** Каждое слабое решение $y(\cdot)$ задачи (1) на отрезке $[\tau,T]$ принадлежит пространству $C([\tau,T];V)$. Более того, $y'(\cdot) \in W_{\tau,T}$ и

$$y'' + A_{\tau,T}(y') + B_{\tau,T}(y) \ni f_{\tau,T}. \quad (5)$$

Наоборот, если $y(\cdot) \in C([\tau,T]; V)$, $y' \in W_{\tau,T}$, и $y$ удовлетворяет (5), то $y$ является слабым решением (1) на $[\tau,T]$.

Слабое решение задачи (1) с начальными условиями

$$y(\tau) = a, \quad y'(\tau) = b \quad (6)$$

на отрезке $[\tau,T]$ существует для любых $a \in V$, $b \in H$. Это следует из [1, Theorem 11]. Таким образом, справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** Для любых $\tau < T$, $a \in V$, $b \in H$ задача Коши (1), (6) имеет слабое решение $y \in X_{\tau,T}$, $y' \in X_{\tau,T}$. Более того, каждое слабое решение $y$ задачи Коши (1), (6) на отрезке $[\tau,T]$ принадлежит пространству $C([\tau,T];V)$, его производная $y'$ — пространству $W_{\tau,T}$ и $y$ удовлетворяет (5).

**Замечание 4.** Поскольку $W_{\tau,T} \subset C([\tau,T];H)$, начальные условия (6) имеют смысл.

Введем обозначения: $E = V \times H$ $\forall \varphi_\tau = (a,b)^T \in E$,

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y'(\cdot) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} y \text{ — слабое решение (1) на } [\tau, T], \\ y(\tau) = a, \ y'(\tau) = b. \end{array} \right\}.$$

Из леммы 2 следует, что $\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset C([\tau,T]; V) \times W_{\tau,T} \subset C([\tau,T];E)$.

Проверим, является ли трансляция и конкатенация слабых решений также слабым решением.

**Лемма 3.** Если $\tau < T$, $\varphi_\tau \in E$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$, то $\psi(\cdot) = \varphi(\cdot + s) \in \mathcal{D}_{\tau-s,T-s}(\varphi_\tau)\ \forall s$. Если $\tau < t < T, \varphi_\tau \in E, \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,t}(\varphi_\tau)$ и $\psi(\cdot) \in \mathcal{D}_{t,T}(\varphi(t))$, то

$$\theta(s) = \begin{cases} \varphi(s), s \in [\tau, t], \\ \psi(s), s \in [t, T] \end{cases}$$

принадлежит $\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$.

Доказательство повторяет доказательство аналогичного утверждения из [17].

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗРЕШАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

**Лемма 4.** Существуют постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ такие, что для любого конечного интервала $[\tau, T]$ и для каждого слабого решения задачи (1) на $[\tau, T]$ справедливы оценки: $\forall t \ge s,\ t, s \in [\tau, T]$

$$\| y'(t)\|_H^2 + \| y(t)\|_V^2 + \alpha \int_s^t \| y'(\xi)\|_V^2\, d\xi \le$$

$$\le \| y'(s)\|_H^2 + \| y(s)\|_V^2 + c_4 (t-s)(\| f\|_{V^*}^2 + 1), \tag{7}$$

$$\| y'(t)\|_H^2 + \| y(t)\|_V^2 \le c_1 (\| y'(s)\|_H^2 + \| y(s)\|_V^2)\, e^{-c_2(t-s)} + c_3 (1 + \| f\|_{V^*}^2). \tag{8}$$

**Доказательство.** Неравенство (7) очевидно следует из леммы 1 и из условия $(A_2)$.

Докажем теперь (8). Зафиксируем произвольный конечный временной интервал $[\tau, T]$ и произвольное слабое решение $y$ задачи (1) на $[\tau, T]$. Заметим, что $y \in C([\tau, T]; V)$, $y' \in W_{\tau,T}$. Для любого $t \in [\tau, T]$ положим

$$Y(t) = \frac{1}{2}\| y'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\| y(t)\|_V^2 + \varepsilon(y'(t), y(t)),$$

где $\varepsilon = \dfrac{2\lambda_1 \alpha}{5 + 2\lambda_1 c^2} > 0$, $\lambda_1 > 0$, такое, что выполняется неравенство

$$\lambda_1 \|u\|_H^2 \le \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V. \tag{9}$$

Проверим неравенство

$$\frac{dY(t)}{dt} \le -\alpha_1 Y(t) + \alpha_2 \quad \text{для почти всех } t \in (\tau, T), \tag{10}$$

где $\alpha_1 = \dfrac{\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{2(\varepsilon + 2\sqrt{\lambda_1})} > 0$, $\alpha_2 = \beta + 2\varepsilon c^2 + \| f\|_{V^*}^2 \left(\dfrac{1}{2\alpha} + 2\varepsilon\right) > 0$.

Из условий $(A_1)$, $(A_2)$, замечания 3 и определения слабого решения задачи (1) на $[\tau, T]$ получим

$$\frac{dY(t)}{dt} = (y''(t), y'(t)) + \langle B_0 y(t), y'(t)\rangle_V + \varepsilon(y''(t), y(t)) +$$

$$+ \varepsilon \| y'(t)\|_H^2 \le -\alpha \| y'(t)\|_V^2 - \varepsilon \| y(t)\|_V^2 + \varepsilon \| y'(t)\|_H^2 + \| f\|_{V^*} \| y'(t)\|_V +$$

$$+ \varepsilon \| y(t)\|_V (c + \| f\|_{V^*}) + \varepsilon c \| y'(t)\|_V \| y(t)\|_V + \beta. \tag{11}$$

Заметим, что

$$c\| y'(t)\|_V \| y(t)\|_V \le \frac{c^2}{2}\| y'(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\| y(t)\|_V^2,$$

$$\| y(t)\|_V (c + \| f\|_{V^*}) \le \frac{\| y(t)\|_V^2}{4} + (c + \| f\|_{V^*})^2 \le \frac{\| y(t)\|_V^2}{4} + 2c^2 + 2\| f\|_{V^*}^2,$$

$$\| f\|_{V^*} \| y'(t)\|_V \le \frac{\alpha \| y'(t)\|_V^2}{2} + \frac{\| f\|_{V^*}^2}{2\alpha}.$$

Применяя рассмотренные неравенства к правой части (11), с помощью (9) получим

$$\frac{dY(t)}{dt} \le -\frac{\varepsilon}{4}(\|y'(t)\|_H^2 + \|y(t)\|_V^2) + \beta + 2\varepsilon c^2 + \|f\|_{V^*}^2 \left(\frac{1}{2\alpha} + 2\varepsilon\right). \quad (12)$$

Отметим, что

$$|(y'(t), y(t))| \le \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}}(\|y'(t)\|_H^2 + \|y(t)\|_V^2). \quad (13)$$

Следовательно, из неравенств (12), (13) имеем (10).

Из (10) и леммы Гроноулла–Беллмана получим, что

$$\forall \tau \le s \le t \le T \quad Y(t) \le Y(s) e^{-\alpha_1 (t-s)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1 + \|f\|_{V^*}^2).$$

Таким образом, в силу (13) имеет место неравенство

$$\forall t \in [\tau, T] \ \|y'(t)\|_H^2 + \|y(t)\|_V^2 \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\lambda_1} + \varepsilon}{\sqrt{\lambda_1} - \varepsilon} \left( (\|y'(s)\|_H^2 + \|y(s)\|_V^2) e^{-\alpha_1 (t-s)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1 + \|f\|_{V^*}^2) \right).$$

Заметим, что $\sqrt{\lambda_1} > \varepsilon$ в силу того, что $\alpha \le c$ и $2\lambda^2 - 2\lambda + 5 \ge 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, в частности для $\lambda = \sqrt{\lambda_1} c$. Положив $c_1 = \dfrac{\sqrt{\lambda_1} + \varepsilon}{\sqrt{\lambda_1} - \varepsilon} > 0$, $c_2 = \alpha_1$, $c_3 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot c_1 > 0$, получим необходимое неравенство.

**Теорема 1.** Пусть $\tau < T$, $\{u_n\}_{n \ge 1}$ — произвольная последовательность слабых решений (1) на $[\tau, T]$ такая, что $u_n(\tau) \to u_\tau$ слабо в $V$, $u'_n(\tau) \to u'_\tau$ слабо в $H$. Тогда существуют $\{u_{n_k}\}_{k \ge 1} \subset \{u_n\}_{n \ge 1}$ и $(u, u')^T \in \mathcal{D}_{\tau, T}((u_\tau, u'_\tau)^T)$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0, T - \tau) \quad \max_{t \in [\tau + \varepsilon, T]} \|u'_{n_k}(t) - u'(t)\|_H \to 0, \ k \to +\infty, \quad (14)$$

$$u_{n_k}(t) \to u(t) \text{ слабо в } V, \text{ равномерно на } [\tau, T], \ k \to +\infty. \quad (15)$$

Если дополнительно $(u_n(\tau), u'_n(\tau))^T \to (u_\tau, u'_\tau)^T$ в $E$, $n \to +\infty$, то $(u_{n_k}(\cdot), u'_{n_k}(\cdot))^T \to (u(\cdot), u'(\cdot))^T$ в $C([\tau, T]; E)$, $k \to +\infty$.

**Доказательство.** В условиях теоремы благодаря лемме 1 для любого $n \ge 1$ $\varphi_n = (u_n, u'_n)^T \in C([\tau, T]; E)$. Более того, из лемм 2, 4 получим, что

$$\forall n \ge 1 \ \exists d_n \in A_{\tau, T}(u'_n):$$

$$u''_n(t) + d_n(t) + B_0 u_n(t) = f \text{ для почти всех } t \in (\tau, T); \quad (16)$$

$$\exists C > 0: \forall n \ge 1 \ \|u'_n\|_{X_{\tau,T}} + \|u''_n\|_{X^*_{\tau,T}} +$$

$$+ \|u'_n\|_{C([\tau,T]; H)} + \|d_n\|_{X^*_{\tau,T}} + \|u_n\|_{C([\tau,T]; V)} \le C. \quad (17)$$

Отметим, что $\forall n \ge 1$, $\forall t \in [\tau, T]$ $u_n(t) = v_n(t) + u_{\tau, n}$, где $v_n(t) = \int_\tau^t u'_n(s) ds$, $(u_{\tau,n}, u'_{\tau,n})^T = \varphi_{\tau,n}$. При этом

$$\forall n \ge 1, \forall t, s \in [\tau, T] \ \|v_n(t) - v_n(s)\|_V \le C|t - s|^{\frac{1}{2}}, v_n(0) = \bar{0}. \quad (18)$$

Следовательно, из (16) – (18), непрерывности вложения $W_{\tau,T} \subset C([\tau,T];H)$, компактности вложения $W_{\tau,T} \subset L_2(\tau,T;H)$, рефлексивности пространств $W_{\tau,T}$, $X_{\tau,T}$, $X^*_{\tau,T}$ получим, что существует подпоследовательность $\{u_{n_k}, d_{n_k}\}_{k\ge1} \subset$ $\subset \{u_n, d_n\}_{n\ge1}$ и для некоторых $u \in C([\tau,T];V)$, $u' \in W_{\tau,T}$, $d \in X^*_{\tau,T}$ имеют место такие сходимости:

$$
\begin{gathered}
v_{n_k} \to v \text{ в } C([\tau,T];V),\ u_{n_k}(t) \to u(t) \text{ слабо в } V\ \forall t \in [\tau,T],\\
u'_{n_k} \to u' \text{ слабо в } X_{\tau,T},\quad u''_{n_k} \to u'' \text{ слабо в } X^*_{\tau,T},\\
d_{n_k} \to d \text{ слабо в } X^*_{\tau,T},\ u'_{n_k} \to u' \text{ слабо в } C([\tau,T];H),\\
u'_{n_k} \to u' \text{ в } L_2(\tau,T;H),\ u'_{n_k}(t) \to u'(t) \text{ в } H\\
\text{для почти всех } t \in (\tau,T), k \to +\infty,
\end{gathered} \tag{19}
$$

где $v(\cdot) = u(\cdot) - u_\tau$. Завершим доказательство теоремы в несколько шагов.

**Шаг 1.** Покажем, что

$$u'' = f_{\tau,T} - d - B_{\tau,T}(u). \tag{20}$$

Дествительно, $\forall k \ge 1$, $\forall \zeta \in C_0^\infty([\tau,T];V)$

$$
-\langle \zeta', u'_{n_k}\rangle_{X_{\tau,T}} + \langle d_{n_k}, \zeta\rangle_{X_{\tau,T}} + \langle B_{\tau,T}(v_{n_k}), \zeta\rangle_{X_{\tau,T}} + \\
+ \int_\tau^T \langle B_0 u_{n_k,\tau}, \zeta(t)\rangle_V\, dt = \langle f_{\tau,T}, \zeta\rangle_{X_{\tau,T}}. \tag{21}
$$

Далее из (21), перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$
\forall \zeta \in C_0^\infty([\tau,T];V)\quad -\langle \zeta', u'\rangle_{X_{\tau,T}} + \langle d, \zeta\rangle_{X_{\tau,T}} + \\
+ \langle B_{\tau,T}(v), \zeta\rangle_{X_{\tau,T}} + \int_\tau^T \langle B_0 u_\tau, \zeta(t)\rangle_V\, dt = \langle f_{\tau,T}, \zeta\rangle_{X_{\tau,T}}.
$$

Таким образом, используя свойства интеграла Бохнера, $\forall \varphi \in C_0^\infty([\tau,T])$, $\forall h \in V$

$$
\begin{aligned}
-\left(\int_\tau^T u'(s)\varphi'(s)ds, h\right)_H &= -\int_\tau^T (h, u'(s))_H\, \varphi'(s)ds = \\
&= \int_\tau^T \langle f - d(s) - B_0 v(s) - B_0 u_\tau, h\rangle_H\, \varphi(s)ds = \\
&= \left\langle \int_\tau^T [f_{\tau,T}(s) - d(s) - B_{\tau,T}(u)(s)]\varphi(s)ds, h\right\rangle_V.
\end{aligned}
$$

Окончательно соотношение (20) следует из определения производной элемента $u'$ в смысле $\mathcal{D}^*([\tau,T];V^*)$.

**Шаг 2.** Из (19) следует, что $\exists \{\varepsilon_j\}_{j\ge1} \subset (\tau,T)$:

$$\varepsilon_j \searrow 0+,\ j \to +\infty,\ \forall j \ge 1\ \ u'_{n_k}(\tau+\varepsilon_j) \to u'(\tau+\varepsilon_j) \text{ в } H,\ k \to +\infty. \tag{22}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in \{\varepsilon_j\}_{j\ge1}$ и покажем, что

$$d(t) \in A_0(u'(t)) \text{ для почти всех } t \in (\tau+\varepsilon, T), \tag{23}$$

используя псевдомонотонность $A_{\tau+\varepsilon,T}$ на $W_{\tau+\varepsilon,T}$.

Рассмотрим ограничения для $u_{n_k}(\cdot)$, $d_{n_k}(\cdot)$, $u(\cdot)$, $d(\cdot)$ на отрезок $[\tau+\varepsilon, T]$. Для простоты изложения обозначим ограничения теми же символами. Из (19) следует, что

$$u'_{n_k} \to u' \text{ слабо в } W_{\tau+\varepsilon,T},\ d_{n_k} \to d \text{ слабо в } X^*_{\tau+\varepsilon,T},\ k \to +\infty. \tag{24}$$

Покажем, что

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \langle d_{n_k}, u'_{n_k} - u' \rangle_{X_{\tau+\varepsilon,T}} \le 0. \tag{25}$$

Действительно,

$$\forall\, k \ge 1 \ \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle\, d_{n_k}(s), u'_{n_k}(s) - u'(s)\rangle_V\, ds =$$

$$= \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle f_0, u'_{n_k}(s) - u'(s)\rangle_V\, ds + \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle u''_{n_k}(s), u'(s) - u'_{n_k}(s)\rangle_V\, ds +$$

$$+ \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle B_0 u_{\tau,n_k}, u'(s) - u'_{n_k}(s)\rangle_V\, ds + \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle B_0 v_{n_k}, u'(s) - u'_{n_k}(s)\rangle_V\, ds :=$$

$$:= I_{1,k} + I_{2,k} + I_{3,k} + I_{4,k}. \tag{26}$$

Из (24) следует, что

$$I_{1,k} \to 0,\ k \to +\infty. \tag{27}$$

Вследствие (4), (19) и (22) получим, что

$$\forall k \ge 1\ I_{2,k} = \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle u''_{n_k}(s), u'(s)\rangle_V\, ds - \frac{1}{2}(\|u'_{n_k}(T)\|_H^2 - \|u'_{n_k}(\tau+\varepsilon)\|_H^2),$$

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} I_{2,k} \le \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle u''(s), u'(s)\rangle_V\, ds - \frac{1}{2}(\|u'(T)\|_H^2 - \|u'(\tau+\varepsilon)\|_H^2) = 0. \tag{28}$$

В силу (18), (19) и свойств интеграла Бохнера будем иметь, что $\forall\, k \ge 1$

$$I_{3,k} = \langle B_0 u_{\tau,n_k}, v(T) - v(\tau+\varepsilon) - v_{n_k}(T) + v_{n_k}(\tau+\varepsilon)\rangle_V \to 0,\ k \to +\infty; \tag{29}$$

$$|I_{4,k}| \le \left| \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \langle B_0 v(s), u'(s) - u'_{n_k}(s)\rangle_V\, ds \right| +$$

$$+ \|B_0\|_{\mathcal{L}(V;V^*)} \|v_{n_k} - v\|_{C([\tau,T];V)} \cdot 2C \cdot (T-\tau-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \to 0,\ k \to +\infty. \tag{30}$$

Таким образом, переходя в (26) к верхнему пределу при $k \to +\infty$, в силу (27)–(30) получим (25).

Далее благодаря (16), (24), (25) и псевдомонотонности $A_{\tau+\varepsilon,T}$ на $W_{\tau+\varepsilon,T}$ получим (23).

**Шаг 3.** Из (22), произвольности $\varepsilon \in \{\varepsilon_j\}_{j\ge1}$, соотношения (23) и определения $A_{\tau,T}(u')$ получим, что $(u, u')^T \in \mathcal{D}_{\tau,T}((u_\tau, u'_\tau)^T)$.

**Шаг 4.** Из (19) непосредственно следует (15).

**Шаг 5.** Проверим (14) от противного. Предположим, что $\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\, L > 0$, $\exists \{u_{k_j}\}_{j\ge1} \subset \{u_{n_k}\}_{k\ge1}$, тогда

$$\forall j \ge 1\ \max_{[\tau,T]} \|u'_{k_j}(t) - u'(t)\|_H = \|u'_{k_j}(t_j) - u'(t_j)\|_H \ge L.$$

Не теряя общности, можем считать, что $t_j \to t_0 \in [\tau, T]$, $j \to +\infty$. Следовательно, в силу непрерывности $u' : [\tau, T] \to H$

$$\underline{\lim_{j\to+\infty}} \|u'_{k_j}(t_j) - u'(t_0)\|_H \ge L. \tag{31}$$

Однако покажем, что

$$u'_{k_j}(t_j) \to u'(t_0) \text{ в } H, j \to +\infty. \tag{32}$$

**Шаг 5.1.** Сначала докажем, что

$$u'_{k_j}(t_j) \to u'(t_0) \text{ слабо в } H, j \to +\infty. \tag{33}$$

Для фиксированого $h \in V$ из (19) следует, что последовательность действительных функций $(u'_{n_k}(\cdot), h)\colon [\tau, T] \to \mathbb{R}$ равномерно ограниченна и равностепенно непрерывна. Принимая во внимание (19) и плотность вложения $V \subset H$, получим, что $u'_{n_k}(t) \to u'(t)$ слабо в $H$ и равномерно на $[\tau, T]$, $k \to +\infty$, откуда следует (33).

**Шаг 5.2.** Докажем, что

$$\overline{\lim_{j \to +\infty}} \| u'_{k_j}(t_j) \|_H \le \| u'(t_0) \|_H . \tag{34}$$

Отметим, что благодаря (16) и условию $(A_2)$ получим, что

$\forall\, j \ge 1$ для почти всех $t \in (\tau, T)$

$$\frac{d}{dt}(\| u'_{k_j}(t) \|_H^2 + 2 \langle B_0 u_{\tau, k_j}, v_{k_j}(t) \rangle_V + \| v_{k_j}(t) \|_V^2) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\| u'_{k_j}(t) \|_H^2 + \| u_{k_j}(t) \|_V^2) \le \beta + \frac{\| f \|_{V^*}^2}{4\alpha} =: \bar{\beta}.$$

Аналогично для почти всех $t \in (\tau, T)$

$$\frac{d}{dt}(\| u'(t) \|_H^2 + 2 \langle B_0 u_\tau, v(t) \rangle_V + \| v(t) \|_V^2) \le \bar{\beta}.$$

Таким образом, действительные функции $\{ J_j \colon [\tau, T] \to \mathbb{R} \mid j \ge 0 \}$,

$$J_j(t) = \| u'_{k_j}(t) \|_H^2 + \| v_{k_j}(t) \|_V^2 + 2 \langle B_0 u_{\tau, k_j}, v_{k_j}(t) \rangle_V - \bar{\beta} t, \tag{35}$$

$$J_0(t) = \| u'(t) \|_H^2 + \| v(t) \|_V^2 + 2 \langle B_0 u_\tau, v(t) \rangle_V - \bar{\beta} t, \quad t \in [\tau, T], \tag{36}$$

являются монотонно невозрастающими, непрерывными и благодаря (19) для почти всех $t \in (\tau, T)$

$$J_j(t) \to J_0(t), \; j \to +\infty. \tag{37}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Из (37) и непрерывности $J_0$ следует, что

$$\exists\; \bar{t} \in (\tau, t_0)\colon J_j(\bar{t}) \to J_0(\bar{t}), j \to +\infty, \text{ и } | J_0(\bar{t}) - J_0(t_0) | < \varepsilon_1.$$

Тогда для достаточно больших $j \ge 1$

$$J_j(t_j) - J_0(t_0) \le J_j(\bar{t}) - J_0(\bar{t}) + | J_0(\bar{t}) - J_0(t_0) | < | J_j(\bar{t}) - J_0(\bar{t}) | + \varepsilon_1.$$

Из произвольности $\varepsilon_1 > 0$ будем иметь $\overline{\lim\limits_{j \to +\infty}} J_j(t_j) \le J_0(t_0)$. Следовательно, принимая во внимание (19), получим (34).

**Шаг 5.3.** Сходимость (32) непосредственно следует из (33), (34) и из [4].

**Шаг 5.4.** Для завершения доказательства (14) отметим, что (32) вступает в противоречие с (31). Следовательно, истинность (14) проверена.

**Шаг 6.** Дополнительно предположим, что

$$(u_n(\tau), u'_n(\tau))^T \to (u_\tau, u'_\tau)^T \text{ в } E, \; k \to +\infty. \tag{38}$$

**Шаг 6.1.** Из (38) и (19) непосредственно следует, что

$$u_{n_k} \to u \text{ в } C([\tau, T], V),\ k \to +\infty. \tag{39}$$

**Шаг 6.2.** Для завершения доказательства осталось проверить, что

$$u'_{n_k} \to u' \text{ в } C([\tau, T]; H). \tag{40}$$

Проверим (40) от противного. Предположим, что $\exists L_1 > 0, \exists \{u_{k_j}\}_{j \ge 1} \subset \{u_{n_k}\}_{k \ge 1}$

$$\forall j \ge 1 \quad ||u'_{k_j} - u'||_{C([\tau,T];H)} = ||u'_{k_j}(t_j) - u'(t_j)||_H \ge L_1. \tag{41}$$

Повторяя рассмотренные выше рассуждения из шага 5 доказательства, принимая во внимание (14), не теряя общности, можем считать, что

$$t_j \to \tau, u'_{k_j}(t_j) \to u'(\tau) \text{ слабо в } H,\ j \to +\infty;\ \varliminf_{j \to +\infty} ||u'_{k_j}(t_j) - u'(\tau)||_H \ge L_1. \tag{42}$$

Рассмотрим последовательность монотонно невозрастающих непрерывных функций $\{J_j\}_{j \ge 0}$, определенных в (35), (36). Поскольку $\forall j \ge 1\ J_j(t_j) - J_0(\tau) \le J_j(\tau) - J_0(\tau)$, в силу (19) получим, что $\varlimsup_{j \to +\infty} J_j(t_j) \le J_0(\tau)$ и, следовательно, $\varlimsup_{j \to +\infty} ||u'_{k_j}(t_j)||_H \le ||u'(\tau)||_H$, что вместе с (42) вступает в противоречие с (41). Теорема доказана.

### СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО АТТРАКТОРА

Рассмотрим конструкции, приведенные в [8]. Обозначим $P(E)$ ($\beta(E)$) совокупность всех непустых (непустых ограниченных) подмножеств пространства $E$. Отметим, что м-полупотоком называется многозначное отображение $G: \mathbb{R} \times E \to P(E)$, для которого $G(0, \cdot) = Id$ (тождественное отображение); $G(t+s, x) \subset G(t, G(s,x))\ \forall x \in E,\ t, s \in \mathbb{R}_+$; м-полупоток строгий, если $G(t+s,x) = G(t, G(s,x))\ \forall x \in E,\ t, s \in \mathbb{R}_+$.

Из лемм 2, 4 следует, что любое слабое решение может быть продолжено до глобального, определенного на $[0, +\infty)$. Для произвольного $\xi_0 = (a, b)^T \in E$ пусть $\mathcal{D}(\xi_0)$ состоит из пар функций $(u(\cdot), u'(\cdot))^T$, определенных на $[0, +\infty)$, где $u(\cdot)$ — любое слабое решение (определенное на $[0, +\infty)$) задачи (1) с начальными данными $u(0) = a,\ u'(0) = b$.

Определим м-полупоток $G$ так: $G(t, \xi_0) = \{\xi(t) \mid \xi(\cdot) \in \mathcal{D}(\xi_0)\}$.

**Лемма 5.** М-полупоток $G$ является строгим м-полупотоком.

Доказательство повторяет доказательство аналогичного утверждения из [17].

Напомним, что множество А называется глобальным аттрактором $G$, если

- А — отрицательно полуинвариантное (т.е. $\mathrm{A} \subset G(t, \mathrm{A})\ \forall t \ge 0$);
- А — притягивающее множество, т.е.

$$\operatorname{dist}(G(t, B), \mathrm{A}) \to 0,\ t \to +\infty\ \ \forall B \in \beta(E), \tag{43}$$

где $\operatorname{dist}(C, D) = \sup_{c \in C} \inf_{d \in D} ||c - d||_E$ — полуметрика Хаусдорфа;

- для любого замкнутого множества $Y \subset H$, удовлетворяющего (43), следует, что $\mathrm{A} \subset Y$ (минимальность).

Глобальный аттрактор называется инвариантным, если $\mathrm{A} = G(t, \mathrm{A})\ \forall t \ge 0$.

Докажем существование инвариантного компактного глобального аттрактора.

**Теорема 2.** М-полупоток $G$ обладает инвариантным компактным в фазовом пространстве $E$ глобальным аттрактором А.

**Доказательство.** Из леммы 4 следует, что $\exists R, \overline{\alpha}, \overline{\beta} > 0$:

$$\forall \xi_0 \in E,\ \forall \xi(\cdot) \in \mathcal{D}(\xi_0),\ \forall t \ge 0\ \ ||\xi(t)||_E^2 \le \overline{\beta} ||\xi_0||_E^2\, e^{-\widetilde{\alpha} t} + \frac{R^2}{2}. \qquad (44)$$

Таким образом, шар $B_0 = \{u \in E \mid ||u||_E \le R\}$ является абсорбирующим множеством, т.е. $\forall B \in \beta(E)\, \exists T(B) > 0 : \forall t \ge T(B)\ G(t, B) \subset B_0$. В частности, из (44) следует, что множество $\bigcup_{t \ge 0} G(t, B)$ — ограничено в $E$ $\forall B \in \beta(E)$. Отметим также, что из теоремы 1 следует, что отображение $G(t, \cdot): E \to \beta(E)$ принимает компактные значения.

Полунепрерывность сверху отображения $u_0 \to G(t, u_0)$ в [10, Definition 1.4.1] следует из того, что данное отображение принимает компактные значения и из [17, теорема 1]. Проверим теперь ассимптотическую полукомпактность сверху м-полупотока $G$ [8, Definition 4]. Пусть $\xi_n \in G(t_n, \upsilon_n)$, $\upsilon_n \in B \in \beta(E)$, $n \ge 1$, $t_n \to +\infty$, $n \to +\infty$. Проверим предкомпактность $\{\xi_n\}_{n \ge 1}$ в $E$. Для этого без потери общности достаточно выделить из $\{\xi_n\}_{n \ge 1}$ сходящуюся в $E$ подпоследовательность.

Из леммы 4 и теоремы 1 получим, что существуют такие $\{\xi_{n_k}\}_{k \ge 1}$ и $\xi \in E$, что

$$\xi_{n_k} \to \xi \text{ слабо в } E,\ ||\xi_{n_k}||_E \to a \ge ||\xi||_E,\ k \to +\infty. \qquad (45)$$

Покажем, что

$$a \le ||\xi||_E . \qquad (46)$$

Зафиксируем произвольное $T_0 > \sqrt{\lambda_1}$, где $\lambda_1 > 0$ — постоянная из (9). Тогда для достаточно больших $k \ge 1$ $G(t_{n_k}, \upsilon_{n_k}) \subset G(T_0, G(t_{n_k} - T_0, \upsilon_{n_k})) \subset G(T_0, B_0)$. Следовательно, $\xi_{n_k} \in G(T_0, \beta_{n_k})$, где $\beta_{n_k} \in G(t_{n_k} - T_0, \upsilon_{n_k})$ и $||\beta_{k_j}||_E \le R$ $\forall j \ge 1$. Из леммы 4, теоремы 1 и (45) для некоторых $\{\xi_{k_j}, \beta_{k_j}\}_{j \ge 1} \subset \{\xi_{n_k}, \beta_{n_k}\}_{k \ge 1}$, $\beta_{T_0} \in E$, получим $\forall j \ge 1$

$$\xi \in G(T_0, \beta_{T_0}),\ \beta_{k_j} \to \beta_{T_0} \text{ слабо в } E,\ j \to +\infty. \qquad (47)$$

Из определения $G$ получим, что $\forall j \ge 1$

$$\xi_{k_j} = \begin{pmatrix} y_j(T_0) \\ y_j'(T_0) \end{pmatrix},\ \beta_{k_j} = \begin{pmatrix} y_j(0) \\ y_j'(0) \end{pmatrix},\ \xi = \begin{pmatrix} y_0(T_0) \\ y_0'(T_0) \end{pmatrix},\ \beta_{T_0} = \begin{pmatrix} y_0(0) \\ y_0'(0) \end{pmatrix},$$

где $y_j \in C([0, T_0]; V)$: $y_j' \in W_{0,T_0}$,

$$y_j'' + d_j + B_{0,T_0} y_j = \overline{0},\ d_j \in A_{0,T_0}(y_j) - f_{0,T_0},\ j \ge 0. \qquad (48)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \sqrt{\lambda_1})$. Из (44) будем иметь

$$\forall j \ge 0,\ \forall t \in [0, T_0]\ \ ||y_j'(t)||_H^2 + ||y_j(t)||_V^2 \le R^2 (\overline{\beta} + 1/2) =: \overline{R}^2. \qquad (49)$$

Из доказательства теоремы 1 получим, что

$$\exists C > 0:\ ||y_j'||_{X_{0,T_0}} + ||y_j''||_{X_{0,T_0}^*} + ||d_j||_{X_{0,T_0}^*} \le C \quad \forall j \ge 0;$$

$$y_j' \to y_0' \text{ в } C([\varepsilon, T_0]; H);$$

$$y_j' \to y_0' \text{ слабо в } W_{0,T_0};$$

$$y_j' \to y_0' \text{ в } L_2(0, T_0; H);$$

$$d_j \to d_0 \text{ слабо в } X_{0,T_0}^*;\quad \upsilon_j \to \upsilon_0 \text{ в } C([0, T_0]; V),\ j \to +\infty, \qquad (50)$$

где $\forall j \ge 0$, $\forall t \in [0, T_0]$ $\upsilon_j(t) = y_j(t) - y_j(0)$.

Введем обозначение:

$$Y_j(t)=\frac{1}{2}[\|y_j(t)\|_V^2+\|y_j'(t)\|_H^2]+\varepsilon(y_j'(t),\ y_j(t)),\ t\in[0,T_0],\ j\geq 0.$$

Тогда $\forall j\geq 0$ и для почти всех $t\in(0,T_0)$

$$\frac{dY_j(t)}{dt}=-2\varepsilon Y_j(t)+2\varepsilon\|y_j'(t)\|_H^2-\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V-$$

$$-\ \varepsilon\langle d_j(t),\ y_j(t)\rangle_V+2\varepsilon^2(y_j'(t),\ y_j(t)).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}[Y_j(t)e^{2\varepsilon t}]=2\varepsilon\|y_j'(t)\|_H^2\ e^{2\varepsilon t}-\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V\ e^{2\varepsilon t}-$$

$$-\varepsilon\langle d_j(t),\ y_j(t)\rangle_V\ e^{2\varepsilon t}+2\varepsilon^2(y_j'(t),\ y_j(t))e^{2\varepsilon t}.$$

Таким образом, $\forall j\geq 0$

$$Y_j(T_0)=Y_j(0)e^{-2\varepsilon T_0}+2\varepsilon\int_0^{T_0}\|y_j'(t)\|_H^2\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt-$$

$$-\int_0^{T_0}\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt-\varepsilon\int_0^{T_0}\langle d_j(t),\ y_j(t)\rangle_V\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt+$$

$$+2\varepsilon^2\int_0^{T_0}(y_j'(t),\ y_j(t))e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt. \tag{51}$$

Из (50) для всех $j\geq 1$ и почти всех $t\in(0,T_0)$ получим

$$2\varepsilon\int_0^{T_0}\|y_j'(t)\|_H^2\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt\to 2\varepsilon\int_0^{T_0}\|y_0'(t)\|_H^2\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt,\ \ j\to+\infty. \tag{52}$$

В силу (48) $\forall\, j\geq 0$ и почти всех $t\in(0,T_0)$

$$\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|y_j(t)\|_V^2+\|y_j'(t)\|_H^2]=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|v_j(t)\|_V^2+2\langle B_0y_j(0),v_j(t)\rangle_V+\|y_j'(t)\|_H^2].$$

Принимая во внимание (50), будем иметь

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\varepsilon^{T_0}\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V\,dt=\int_\varepsilon^{T_0}\langle d_0(t),\ y_0'(t)\rangle_V\,dt.$$

Далее, следуя [18, с. 7–10], из (50) получим, что

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\varepsilon^{T_0}|\langle d_j(t),\ y_j'(t)-y_0'(t)\rangle_V|\,dt=0,$$

$$\int_\varepsilon^{T_0}\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt\to\int_\varepsilon^{T_0}\langle d_0(t),\ y_0'(t)\rangle_V\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt,\ \ j\to+\infty. \tag{53}$$

Из условия $(A_1)$ и (49) имеем

$$\forall j\geq 0\quad\left|\int_0^{\varepsilon}\langle d_j(t),\ y_j'(t)\rangle_V\ e^{-2\varepsilon(T_0-t)}dt\right|\leq c(1+\bar{R})\bar{R}e^{-2\varepsilon(T_0-\varepsilon)}\varepsilon. \tag{54}$$

Из условия $(A_3)$ вытекает, что

$$\forall j \geq 0 \ \ \exists z_j \in L_2(0, T_0; Z^*): \ d_j(\cdot) = A_1 y_j'(\cdot) + z_j(\cdot).$$

Принимая во внимание условие $(A_3)$, (52) и [2], получим, что $y_j \to y_0$ в $L_2(0, T_0; Z)$, $z_j \to z_0$ слабо в $L_2(0, T_0; Z^*)$, $j \to +\infty$. Следовательно,

$$\int_0^{T_0} \langle z_j(t), y_j(t) \rangle_Z \, e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt \to \int_0^{T_0} \langle z_0(t), y_0(t) \rangle_Z \, e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt, \ j \to +\infty,$$

$$-\int_0^{T_0} \langle A_1 y_j'(t), y_j(t) \rangle_V \, e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt = -\int_0^{T_0} e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} \frac{d}{dt} \langle A_1 y_j(t), y_j(t) \rangle_V \, dt =$$

$$= -\langle A_1 y_j(T_0), y_j(T_0) \rangle_V + \langle A_1 y_j(0), y_j(0) \rangle_V \, e^{-2\varepsilon T_0} +$$

$$+ 2\varepsilon \int_0^{T_0} \langle A_1 y_j(t), y_j(t) \rangle_V \, e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt \leq \| A_1 \|_{L(V; V^*)} (R^2 e^{-2\varepsilon T_0} + \overline{R}^{\,2}).$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{j \to +\infty} \left( -\varepsilon \int_0^{T_0} \langle d_j(t), y_j(t) \rangle_V \, e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt \right) \leq$$

$$\leq -\varepsilon \int_0^{T_0} \langle d_0(t), y_0(t) \rangle_V \, e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt + \| A_1 \|_{L(V; V^*)} (R^2 e^{-2\varepsilon T_0} + 2\overline{R}^{\,2}) \varepsilon. \qquad (55)$$

В силу (13), (49) имеем $2\varepsilon^2 \left| \int_0^{T_0} (y_j'(t), y_j(t)) e^{-2\varepsilon(T_0 - t)} dt \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{\lambda_1}} \overline{R}^{\,2}$. Окончательно из (13), (51)–(55) получим

$$\varlimsup_{j \to +\infty} Y_j(T_0) \leq R^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \right) e^{-2\varepsilon T_0} +$$

$$+ Y_0(T_0) + \| A_1 \|_{L(V; V^*)} (R^2 e^{-2\varepsilon T_0} + 2\overline{R}^{\,2}) \varepsilon + 2c(1 + \overline{R}) \overline{R} e^{-2\varepsilon(T_0 - \varepsilon)} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \overline{R}^{\,2}.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon \in (0, \sqrt{\lambda_1})$, $\forall T_0 > \sqrt{\lambda_1}$

$$\frac{1}{2} a^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \leq R^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \right) e^{-2\varepsilon T_0} + \frac{1}{2} \| \xi \|_E^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \right) +$$

$$+ \| A_1 \|_{L(V; V^*)} (R^2 e^{-2\varepsilon T_0} + 2\overline{R}^{\,2}) \varepsilon + 2c(1 + \overline{R}) \overline{R} e^{-2\varepsilon(T_0 - \varepsilon)} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \overline{R}^{\,2}.$$

Устремив в последнем неравенстве $T_0 \to +\infty$, получим $\forall \varepsilon \in (0, \sqrt{\lambda_1})$

$$a^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \leq \| \xi \|_E^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \right) + 4 \| A_1 \|_{L(V; V^*)} \overline{R}^{\,2} \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \overline{R}^{\,2}. \qquad (56)$$

Переходя к границе (при $\varepsilon \to 0+$) в неравенстве (56), получим (46). Из (45), (46) следует, что $\xi_{n_k} \to \xi$ в $E$, $k \to +\infty$.

Таким образом, существование глобального аттрактора с требуемыми свойствами непосредственно следует из [8, Theorem 3, Remark 8].

### СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРАЕКТОРНОГО АТТРАКТОРА

Рассмотрим семейство $K_+ = \bigcup_{y_0 \in E} \mathcal{D}(y_0)$ всех слабых решений включения (1), определенных на $[0,+\infty)$. Заметим, что $K_+$ является трансляционно инвариантным, т.е. $\forall u(\cdot) \in K_+$, $\forall h \geq 0$ $u_h(\cdot) \in K_+$, где $u_h(s) = u(h+s)$, $s \geq 0$. На $K_+$ зададим полугруппу трансляций $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, $T(h)u(\cdot) = u_h(\cdot)$, $h \geq 0$, $u \in K_+$. В силу трансляционной инвариантности $K_+$ заключаем, что $T(h)K_+ \subset K_+$ при $h \geq 0$.

Построим аттрактор трансляционной полугруппы $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, действующей на $K_+$, на котором будем рассматривать топологию, индуцированную из пространства Фреше $C^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$. Отметим, что

$$f_n(\cdot) \to f(\cdot) \text{ в } C^{loc}(\mathbb{R}_+; E) \Leftrightarrow \forall M > 0,$$

$$\Pi_M f_n(\cdot) \to \Pi_M f(\cdot) \text{ в } C([0, M]; E),$$

где $\Pi_M$ — оператор ограничения на отрезок $[0, M]$ [7]. Обозначим $\Pi_+$ оператор ограничения на $[0,+\infty)$.

Отметим, что множество $\Sigma \subset C^{loc}(\mathbb{R}_+; E) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется притягивающим для пространства траекторий $K_+$ включения (1) в топологии $C^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$, если для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $\mathcal{B} \subset K_+$ и произвольного числа $M \geq 0$ выполняется соотношение

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];E)}(\Pi_M T(t)\mathcal{B}, \Pi_M \Sigma) \to 0, \ t \to +\infty. \tag{57}$$

Множество $\mathcal{U} \subset K_+$ называется траекторным аттрактором в пространстве траекторий $K_+$ относительно топологии $C^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$ [7, определение 1.2], если $\mathcal{U}$ — компактное в $C^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$; $\mathcal{U}$ — строго инвариантно относительно $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, т.е. $T(h)\mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\forall h \geq 0$; $\mathcal{U}$ — притягивающее множество для пространства траекторий $K_+$ в топологии $C^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$.

Рассмотрим включение (1) на всей числовой прямой. По аналогии с пространством $C^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$ пространство $C^{loc}(\mathbb{R}; E)$ снабжается топологией локальной равномерной сходимости на каждом отрезке $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ [7]. Функция $u \in C^{loc}(\mathbb{R}; E) \cap L_\infty(\mathbb{R}; E)$ называется полной траекторией включения (1), если $\forall h \in \mathbb{R}$ $\Pi_+ u_h(\cdot) \in K_+$ [7]. Пусть K — совокупность всех полных траекторий включения (1). Отметим, что

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall u(\cdot) \in K \ u_h(\cdot) \in K. \tag{58}$$

Существование траекторного аттрактора и его структурные свойства следуют из теоремы.

**Теорема 3.** Пусть A — глобальный аттрактор из теоремы 2. Тогда в пространстве $K_+$ существует траекторный аттрактор $\Sigma \subset K_+$. При этом имеет место формула

$$\Sigma = \Pi_+ K = \Pi_+ \{y \in K \mid y(t) \in A \ \forall t \in \mathbb{R}\}. \tag{59}$$

Доказательство повторяет доказательство соответствующего утверждения [17] и опирается на результаты теорем 1, 2.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим хемивариационное неравенство гиперболического типа с многозначным законом типа «реакции-скорости» [1]. Подчеркнем, что наши результаты относительно многозначной динамики перемещений и скоростей применимы к хемивариационным неравенствам с многомерными суперпотенциальными законами [1].

Рассмотрим линейное вязкоупругое тело, занимающее в недеформированном состоянии ограниченную область $\Omega$ в $\mathbb{R}^N$ $(N=2{,}3)$, находящееся под влиянием объемных и поверхностных сил, соприкасающееся с основой на части $\Gamma_C$ границы $\partial\Omega$. Граница $\partial\Omega$ множества $\Omega$ предполагается регулярной, а координаты точек $x\in\overline{\Omega}$ берутся в некоторой фиксированной декартовой системе координат. Предположим, что тело обладает кратковременной памятью [19], т.е. состояние напряжений в момент времени $t$ зависит только от деформаций в момент времени $t$ и ближайшие предыдущие моменты времени. В этом случае уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{ij}(u)=b_{ijhk}\varepsilon_{kh}(u)+a_{ijhk}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{kh}(u),\ \ i,j=1,\dots,N, \tag{60}$$

где $u{:}\,\Omega\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}^N$ — поле перемещений, $\sigma=\sigma(u)$ — тензор напряжений, $\varepsilon=\varepsilon(u)$ — тензор деформации, $\varepsilon_{hk}(u)=\frac{1}{2}(u_{k,h}+u_{h,k})$. Коэфициенты вязкости $a_{ijhk}$ и коэфициенты упругости $b_{ijhk}$ удовлетворяют известным условиям симметричности и эллиптичности. Динамическое поведение тела описывается с помощью уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(u)+f_i=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i\ \text{ в }\ \Omega\times(0,+\infty), \tag{61}$$

где $f=\{f_i\}_{i=1}^N\in L_2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ — плотность объемной силы.

Предположим, что граница $\partial\Omega$ разбита на три части $\Gamma_D$, $\Gamma_N$ и $\Gamma_C$. Точнее, пусть $\Gamma_D$, $\Gamma_N$ и $\Gamma_C$ попарно не пересекаются и $\partial\Omega=\overline{\Gamma}_D\cup\overline{\Gamma}_N\cup\overline{\Gamma}_C$. Будем считать, что $\Gamma_C\subset\partial\Omega$ — открытое подмножество положительной поверхностной меры [20]. Пусть на $\Gamma_D$ заданы перемещения

$$u_i=0\ \text{ на }\ \Gamma_D\times(0,+\infty), \tag{62}$$

а на $\Gamma_N$ — поверхностные силы

$$S_i=\sigma_{ij}n_j=F_i\ \ (F_i=F_i(x))\ \text{ на }\ \Gamma_N\times(0,+\infty), \tag{63}$$

где $F=\{F_i\}_{i=1}^N\in L_2(\Gamma_N;\mathbb{R}^N)$ — вектор поверхностной силы, $S=\{S_i\}_{i=1}^N$ обозначает вектор напряжений на $\Gamma_N$, а $n=\{n_i\}_{i=1}^N$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

На $\Gamma_C$ зададим немонотонные многозначные граничные условия типа «реакции–скорости» [21–23, 1 и ссылки к ним]

$$-S\in\partial j\left(x,\frac{\partial u}{\partial t}\right)\ \text{ на }\ \Gamma_C\times(0,+\infty), \tag{64}$$

где $j{:}\,\Gamma_C\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- $j(\cdot,\xi)$ — измерима для всех $\xi\in\mathbb{R}^N$ и $j(\cdot,0)\in L_1(\Gamma_C)$;
- $j(x,\cdot)$ — локально липшицева для всех $x\in\Gamma_C$;
- $\exists\, c>0$: $||\eta||_{\mathbb{R}^N}\le c(1+||\xi||_{\mathbb{R}^N})$ $\forall x\in\Gamma_C$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$, $\forall\eta\in\partial j(x,\xi)$, где для

$x\in\Gamma_C$ $\partial j(x,\xi)=\{\eta\in\mathbb{R}^N\,|\,(\eta,v)_{\mathbb{R}^N}\le j^0(x,\xi;v)\ \ \forall v\in\mathbb{R}^N\}$ — обобщенный градиент функционала $j(x,\cdot)$ в точке $\xi\in^N$, $j^0(x,\xi;v)=\overline{\lim\limits_{\zeta\to\xi,\,t\searrow 0}}\dfrac{j(x,\zeta+tv)-j(x,\zeta)}{t}$ — обобщенная верхняя производная $j(x,\cdot)$ в точке $\xi\in\mathbb{R}^N$ по направлению $v\in\mathbb{R}^N$. Отметим, что все невыпуклые суперпотенциальные графики из [23, Chapter 4.6], в частности функционалы $j$, определенные как минимумы или максимумы квадратичных выпуклых функционалов, удовлетворяют рассмотренным выше условиям на $\Gamma_C$.

Для вариационной постановки задачи (60)–(64) выберем [1]: $H = L_2(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $Z = H^{\delta}(\Omega;^N)$, $V = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)\colon v_i = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$, где $\delta \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. Пусть $\forall\, u, v \in V$

$$\langle f_0, v\rangle_V = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_N} F_i v_i d\sigma(x);$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} a_{ijhk}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx, \;\; b(u,v) = \int_{\Omega} b_{ijhk}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx;$$

$\bar{\gamma}\colon Z \to L_2(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$ — оператор следа; $\bar{\gamma}^*\colon L_2(\partial\Omega;\mathbb{R}^N) \to Z^*$ — сопряженный оператор;

$$\bar{\gamma}^* u(z) = \int_{\partial\Omega} u(x)\bar{\gamma}z(x)d\sigma(x), \;\; z \in Z,\, u \in L_2(\partial\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Рассмотрим локально липшицевый функционал $J\colon L_2(\Gamma_C;\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$,

$$J(z) = \int_{\Gamma_C} j(x, z(x))d\sigma(x), \;\; z \in L_2(\Gamma_C;\mathbb{R}^n).$$

Тогда функции взаимодействия $A_1$, $A_2$ и $B_0$ определяются из соотношений

$$\forall u, v \in V \;\; \langle A_1 u, v\rangle_V = a(u,v), \;\; \langle B_0 u, v\rangle_V = b(u,v),$$

$$\forall z \in Z \;\; A_2(z) = \bar{\gamma}^*(\partial J(\bar{\gamma}z)).$$

Из [1] следует, что условия $(H_1)$, $(A_1)-(A_3)$, $(B_1)$, $(B_2)$ будут иметь место, если дополнительно

$$\forall x \in \Gamma_C,\, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\, \forall \eta \in \partial j(x,\xi) \;\; (\eta,\xi) \ge 0.$$

Под обобщенным решением задачи (60)–(64) понимаем слабое решение (в смысле определения 1) соответствующей задачи (1). Это определение согласуется с определением 3 из [1].

Таким образом, для всех обобщенных решений задачи (60)–(64) выполняются все описанные выше утверждения. В частности, все перемещения и скорости «притягиваются» при $t \to +\infty$ ко всем полным (определенным на всей числовой прямой) глобально ограниченным траекториям соотвествующей «обобщенной» задачи (1), которые принадлежат компактным множествам в соответствующих фазовых и расширенных фазовых пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Migórski S. Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications // J. of Global Optimization. — 2005. — **31**, N 3. — P. 505–533.
2. Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — К.: Наук. думка, 2008. — 464 с.
3. Ball J.M. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier–Stokes equations // J. of Nonlinear Sciences. — 1997. — **7**, N 5. — P. 475–502.
4. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 с.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

6. Л а д ы ж е н с к а я  О . А . Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Физматгиз, 1961. — 288 с.
7. В и ш и к  М . И . ,  Ч е п ы ж о в  В . В . Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье–Стокса // Математические заметки. — 2002. — **71**, № 2. — С. 194–213.
8. M e l n i k  V . S . ,  V a l e r o  J . On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. — 1998. — **6**, N 1. — P. 83–111.
9. V a l e r o  J . ,  K a p u s t y a n  A . V . On the connectedness and asymptotic behaviour of solutions of reaction-diffusion systems // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 2006. — **323**, N 1. — P. 614–633.
10. A u b i n  J . P . ,  F r a n k o w s k a  H . Set-valued analysis. — Boston: Birkhäuser, 1990. — 461 p.
11. A u b i n  J . P . ,  S e l l i n a  A . Set-valued analysis and viability theory. — Berlin: Springer, 1984. — 348 p.
12. S e l l  G . R . ,  Y o u  Y u . Dynamics of evolutionary equations. — New York: Springer, 2002. — 672 p.
13. Д у б и н с к и й  Ю . А . Нелинейные параболические уравнения высокого порядка // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Нов. достиж. — 1990. — **37**. — С. 89–166.
14. C h e p y z h o v  V . V . ,  V i s h i k  M . I . Trajectory attractor for reaction-diffusion system with diffusion coefficient vanishing in time // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2010. — **27**, N 4. — P. 1498–1509.
15. Ч у е ш о в  И . Д . Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. — 1993. — **48**, № 3(291). — С. 135–62.
16. K a s y a n o v  P . O . ,  M e l ' n i k  V . S . ,  T o s c a n o  S . Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued $w_{\lambda_0}$-pseudomonotone maps // J. of Differential Equations. — 2010. — **249**, N 6. — P. 1258–1287.
17. К а с ь я н о в  П . О . Многозначная динамика решений автономного дифференциально-операторного включения с псевдомонотонной нелинейностью // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 5. — С. 150–162.
18. K u t t l e r  K . Non-degenerate implicit evolution inclusions // EJDE. 2000. — **2000**, N 4. — P. 1–20.
19. D u v a u t  G . ,  L i o n s  J . L . Les Inequations en Mecanique et en Physique. — Paris: Dunod, 1972. — 338 p.
20. P a n a g i o t o p o u l o s  P . D . Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions. — Basel: Birkhauser, 1985. — P. 412.
21. G o e l e v e n  D . ,  M i e t t i n e n  M . , P a n a g i o t o p o u l o s  P . D . Dynamic hemivariational inequalities and their applications // J. Optimiz. Theory and Appl. — 1999. — **103**, № 3. — P. 567–601.
22. P a n a g i o t o p o u l o s  P . D . Hemivariational inequalities and Fan-variational inequalities. New applications and results // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 1995. — **XLIII**. — P. 159–191.
23. N a n i e w i c z  Z . ,  P a n a g i o t o p o u l o s  P . D . Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications. — New York: Marcel Dekker, Inc., 1995. — 267 p.
24. З а д о я н ч у к  Н . В . ,  К а с ь я н о в  П . О . Метод Фаедо–Гальоркіна для еволюційних включень II порядку з $W_\lambda$-псевдомонотонними відображеннями // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 2. — С. 195–213.
25. З а д о я н ч у к  Н . В . ,  К а с ь я н о в  П . О . Анализ и управление дифференциальным включением второго порядка з +-коэрцитивным демпфированием // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 2. — С. 152–160.
26. C h i k r i i  A . A . Conflict-controlled processes. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 424 p.

*Поступила 12.08.10*