УДК 517.97

Н.С. ИБРАГИМОВ

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ТИПА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ

Ключевые слова: *уравнения квазиоптики, задача идентификации, принцип максимума Понтрягина*.

Задачи идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики часто возникают в нелинейной оптике при изучении процессов распространения светового пучка в неоднородной среде, в которых неизвестными функциями обычно являются показатели преломления и поглощения среды, а также начальная фаза излученной волны [1]. Отметим, что ранее задачи идентификации определения фазы излученной волны для стационарного уравнения квазиоптики были изучены, например в [1, 2], а задачи идентификации определения вещественнозначного коэффициента, т.е. коэффициента преломления среды в стационарном уравнении квазиоптики (в нестационарном уравнении Шредингера) ранее исследованы, например в [3–7] и др.

В данной работе рассмотрено необходимое условие типа принципа максимума Понтрягина в задаче идентификации определения комплекснозначного коэффициента нестационарного уравнения квазиоптики, где вещественная часть коэффициента является показателем преломления, а мнимая часть — показателем поглощения. Следует отметить, что относительно задачи идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики подобный вопрос впервые был изучен в [8]. Однако приведенная ниже задача по постановке и по классу решений отличается от предыдущей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — ограниченная область n-мерного евклидова пространства E^n; Γ — граница области D, которая предполагается достаточно гладкой, например $\Gamma \subset C^2$; $T>0$, $L>0$ — заданные числа, $0 \le t \le T$, $0 \le z \le L$; $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная точка области D, $\Omega_t = D\times(0,t)$, $\Omega_z = D\times(0,z)$, $\Omega_{tz} = D\times(0,t)\times$ $\times(0,z)$, $\Omega = \Omega_{TL}$, $S_{tz} = \Gamma\times(0,t)\times(0,z)$; $S = S_{TL}$; $C^k([0,T],B)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k \ge 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_p(D)$ — лебегово пространство функций, суммируемых в области D со степенью $p \ge 1$; $W_p^k(D)$, $W_p^{k,m}(Q)$, $p \ge 1$, $k \ge 0$, $m \ge 0$, — соболевы пространства, которые определены в [9]; $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x,t,z)$ из $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ из пространства $L_2(\Omega)$, в котором скалярное произведение и норма определяются равенствами

$$(u_1, u_2)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u_1 \bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} \right) dx dt dz,$$

$$||u||_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}} < +\infty;$$

$W_2^{2,0,0}(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x,t,z)$ пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_p}$, $j, p = \overline{1,n}$, из пространства $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами

$$(u_1, u_2)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u_1 \bar{u}_2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_j} + \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_p} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_j \partial x_p} \right) dx dt dz,$$

$$||u||_{W_2^{2,0,0,}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega)$; $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^{2,1,1}(\Omega)$, элементы которого обращаются в нуль на $S = \Gamma \times (0,T) \times (0,L)$; символ $\overset{0}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим c_j, $j = 0,1,2,\ldots$

Рассмотрим задачу идентификации, которая формулируется как проблема минимизации функционала

$$J_\alpha(v) = \beta_0 ||\psi(\cdot,T,\cdot) - y_0||^2_{L_2(\Omega_L)} + \beta_1 ||\psi(\cdot,\cdot,L) - y_1||^2_{L_2(\Omega_T)} + \alpha ||v - \omega||^2_H \quad (1)$$

на множестве $V \equiv \{v = (v_0, v_1),\ v_m \in L_2(D),\ |v_m(x)| \le b_m,\ \overset{0}{\forall} x \in D,\ m = 0,1\}$ при условиях:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} \right) +$$

$$+ a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi = f(x,t,z),\ \ (x,t,z) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\psi(x,0,z) = \varphi_0(x,z),\ \ (x,z) \in \Omega_L, \quad (3)$$

$$\psi(x,t,0) = \varphi_1(x,t),\ \ (x,t) \in \Omega_T, \quad (4)$$

$$\psi|_S = 0, \quad (5)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $\psi = \psi(x,t,z)$ — волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля световой волны (светового пучка), распространяющаяся вдоль оси z; $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $\alpha \ge 0$, $\beta_0 \ge 0$, $\beta_1 \ge 0$ — заданные числа, такие, что $\beta_0 + \beta_1 \ne 0$; $a_{jp}(x)$, $j, p = \overline{1,n}$, $a(x)$ — заданные вещественнозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$a_{jp}(x)=a_{pj}(x),\ \ j,\,p=1,2,\ldots,n,\ \ \mu_0\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\le\sum_{j,p=1}^{n}a_{jp}(x)\xi_j\,\bar{\xi}_p\le$$

$$\le\mu_1\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\quad\forall\,\xi_j\in\mathbf{C},\ \ j=1,2,\ldots,n,\ \ \forall\,x\in\overset{0}{D},\ \ \mu_0,\mu_1=\text{const}>0\,;\tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l}\right|\le\mu_2\quad\forall\,x\in\overset{0}{D},\ \ j,\,p,\,l=\overline{1,n},\ \ \mu_2=\text{const}>0\,;\tag{7}$$

$$0\le a(x)\le\mu_3\quad\forall\,x\in\overset{0}{D},\ \ \mu_3=\text{const}>0\,;\tag{8}$$

$\varphi_0(x,z),\ \varphi_1(x,t),\ f(x,t,z),\ y_0(x,z),\ y_1(x,t)$ — заданные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_0\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L),\ \ \varphi_1\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T),\ \ f\in W_2^{0,1,1}(\Omega),\ \ y_0\in L_2(\Omega_L),\ \ y_1\in L_2(\Omega_T);\tag{9}$$

$\omega=(\omega_0,\omega_1)\in H$ — заданный элемент, $H\equiv L_2(D)\times L_2(D)$.

При каждом $v\in V$ задачу определения функции $\psi=\psi(x,t,z)\equiv\psi(x,t,z;v)$ из условий (2)–(5) будем называть прямой задачей для нестационарного уравнения квазиоптики (2). Под решением прямой задачи будем понимать функцию $\psi(x,t,z)$ из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям (2)–(5) для почти всех $(x,t,z)\in\Omega$, т.е. уравнению (2) для $\forall\,(x,t,z)\in\overset{0}{\Omega}$, условиям (3) и (4) для $\forall(x,z)\in\overset{0}{\Omega}_L$, $\forall(x,t)\in\overset{0}{\Omega}_T$ соответственно и краевому условию (5) для $\forall(\xi,t,z)\in\overset{0}{S}$.

Следует отметить, что прямая задача типа (2)–(4) ранее была предметом исследования в [8], где было доказано существование и единственность слабого обобщенного решения из пространства $C^0([0,T],L_2(\Omega_L))\cap C^0([0,L],L_2(\Omega_T))$ при более слабых условиях для данных задач. В настоящем случае класс решений прямой задачи (2)–(4) является пространством $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и данные задачи являются более гладкими функциями. Поэтому, используя теорию вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве [10, 11] и метод Галеркина, можем установить справедливость утверждения.

Теорема 1. Пусть функции $a_{jp}(x),\ j,\,p=\overline{1,n},\ a(x),\ \varphi_0(x,z),\ \varphi_1(x,t),\ f(x,t,z)$ удовлетворяют условиям (6)–(9) соответственно. Тогда прямая задача (2)–(5) при каждом $v\in V$ имеет единственное решение из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right).\tag{10}$$

Наряду с теоремой 1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Кроме того, функции $y_0(x,t),\ y_1(x,t)$ удовлетворяют условиям (9), а $\omega\in H$ — заданный элемент. Тогда задача идентификации (1)–(5) имеет хотя бы одно решение.

Основной целью данной работы является установление необходимого условия типа принципа максимума Понтрягина.

Изучим вопрос о необходимом условии для решения задачи идентификации (1)–(5). Пусть $\varphi = \varphi(x, t, z)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \sum_{p,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) +$$

$$+a(x)\varphi + v_0(x)\varphi - iv_1(x)\varphi = 0,\ \ (x, t, z) \in \Omega, \tag{11}$$

$$\varphi(x, T, z) = -2i\beta_0(\psi(x, T, z) - y_0(x, z)),\ \ (x, z) \in \Omega_L, \tag{12}$$

$$\varphi(x, t, L) = -\frac{2i\beta_1}{a_0}(\psi(x, t, L) - y_1(x, t)),\ \ (x, t) \in \Omega_T, \tag{13}$$

$$\varphi|_S = 0, \tag{14}$$

где $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ — решение прямой задачи при $v \in V$.

Под решением сопряженной задачи будем понимать функцию $\varphi = \varphi(x, t, z)$ из пространства $B_0 \equiv C^0([0, T], L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \varphi\left(-i\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial t} - ia_0\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial x_p}\right) +\right.$$

$$\left. + a(x)\overline{\eta}_1 + v_0(x)\overline{\eta}_1 - iv_1(x)\overline{\eta}_1\right) dxdtdz =$$

$$= -2\beta_0\int_{\Omega_L}(\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\overline{\eta}_1(x, T, z)\,dxdz -$$

$$-2\beta_1\int_{\Omega_T}(\psi(x, t, L) - y_1(x, t))\overline{\eta}_1(x, t, L)\,dxdt +$$

$$+i\int_{\Omega_L}\varphi(x, 0, z)\overline{\eta}_1(x, 0, z)\,dxdz + ia_0\int_{\Omega_T}\varphi(x, t, 0)\overline{\eta}_1(x, t, 0)\,dxdt \tag{15}$$

для любой функции $\eta_1 = \eta_1(x, t, z)$ из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$.

С помощью замены $\tau = T - t$, $\theta = L - z$ сопряженную задачу (11)–(14) можно свести к начально-краевой задаче типа комплексно сопряженной прямой задачи (2)–(4). Поэтому, используя методику сглаживания данных [9] и теорему 1, можем установить справедливость утверждения о том, что сопряженная задача (11)–(14) имеет единственное решение из пространства B_0 и справедлива оценка

$$||\varphi(., t, .)||^2_{L_2(\Omega_L)} + ||\varphi(., ., z)||^2_{L_2(\Omega_T)} \le$$

$$\le c_1(||\psi(., T, .) - y_0||^2_{L_2(\Omega_L)} + ||\psi(., ., L) - y_1||^2_{L_2(\Omega_T)}) \tag{16}$$

для $\forall t \in [0, T]$, $\forall z \in [0, L]$.

Введем функцию

$$\mathrm{H}(x, \psi(x, ., .), v_0(x), v_1(x), \overline{\varphi}(x, ., .)) = \int_Q \mathrm{Re}\,(\psi(x, t, z)\overline{\varphi}(x, t, z))dtdzv_0(x) -$$

$$-\int_Q \mathrm{Im}\,(\psi(x, t, z)\overline{\varphi}(x, t, z))\,dtdzv_1(x) - \alpha[(v_0(x) - \omega_0(x))^2 + (v_1(x) - \omega_1(x))^2], \tag{17}$$

которую будем называть функцией Гамильтона–Понтрягина для задачи идентификации (1)–(5). Здесь $Q \equiv (0, T) \times (0, L)$.

Рассмотрим приращение функционала (1) на любом элементе $v \in V$. Используя (1), приращение функционала можно представить в виде

$$\Delta J_0(v) = J_0(v + \Delta v) - J_0(v) = 2\beta_0 \int_{\Omega_L} \mathrm{Re}\,[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\Delta\overline{\psi}(x, T, z)]dxdz +$$

$$+2\beta_1 \int_{\Omega_T} \mathrm{Re}\,[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t))\Delta\overline{\psi}(x, t, L)]dxdt + 2\alpha \int_D (v_0(x) - \omega_0(x))\Delta v_0(x)dx +$$

$$+2\alpha \int_D (v_1(x) - \omega_1(x))\Delta v_1(x)dx + \beta_0 \|\Delta\psi(\cdot, T, \cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} +$$

$$+\beta_1 \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, L)\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \alpha \|\Delta v\|^2_H \quad \forall v \in V, \tag{18}$$

где $\Delta v \in B$ — приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \Delta v \in V$, $B \equiv L_\infty(D) \times L_\infty(D)$; $\Delta\psi = \Delta\psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v + \Delta v) - \psi(x, t, z; v)$, $\psi(x, t, z) \equiv$ $\equiv \psi(x, t, z; v)$ — решение прямой задачи (2)–(5) при $v \in V$. Ясно, что функция $\Delta\psi = \Delta\psi(x, t, z)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial\Delta\psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_p}\right) + a(x)\Delta\psi +$$

$$+(v_0(x) + \Delta v_0(x))\Delta\psi + i(v_1(x) + \Delta v_1(x))\Delta\psi =$$

$$= -\Delta v_0(x)\psi - i\Delta v_1(x)\psi, \quad (x, t, z) \in \Omega, \tag{19}$$

$$\Delta\psi(x, 0, z) = 0, \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad \Delta\psi(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad \Delta \le \psi|_S = 0. \tag{20}$$

Оценим решение этой задачи. С этой целью обе части уравнения (19) умножим на функцию $\Delta\overline{\psi} = \Delta\overline{\psi}(x, t, z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_{tz}. В результате, из полученного равенства, вычитая его комплексное сопряжение, имеем

$$\int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial z}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau d\theta = -2\int_{\Omega_{tz}} (v_1 + \Delta v_1)|\Delta\psi|^2\, dxd\tau d\theta -$$

$$-2\int_{\Omega_{tz}} \mathrm{Im}\,(\Delta v_0 \psi \Delta\overline{\psi})\, dxd\tau d\theta - 2\int_{\Omega_{tz}} \mathrm{Re}\,(\Delta v_1 \psi \Delta\overline{\psi})\, dxd\tau d\theta \quad \forall\, t \in [0, T], \quad \forall\, z \in [0, L].$$

С помощью оценки (10) и принятых условий из этого равенства можем установить справедливость оценки

$$\|\Delta\psi(\cdot, t, \cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, z)\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_2 (\|\Delta v_0\|^2_{L_\infty(D)} + \|\Delta v_1\|^2_{L_\infty(D)}) \tag{21}$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L].$$

Для преобразования приращения функционала в дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Справедливо соотношение

$$2\beta_0 \int_{\Omega_L} \mathrm{Re}\,[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\Delta\overline{\psi}(x, T, z)]dxdz +$$

$$+2\beta_1 \int_{\Omega_T} \mathrm{Re}\,[(\psi(x, t, L) - y_1(x, z))\Delta\overline{\psi}(x, t, L)]dxdt =$$

$$= \int_{\Omega} \mathrm{Re}\,[(\psi(x,t,z)\overline{\varphi}(x,t,z))\Delta v_0(x)]\,dxdtdz -$$

$$-\int_{\Omega} \mathrm{Im}\,[(\psi(x,t,z)\overline{\varphi}(x,t,z))\Delta v_1(x)]\,dxdtdz +$$

$$+\int_{\Omega} \mathrm{Re}\,[(\Delta\psi(x,t,z)\overline{\varphi}(x,t,z))\Delta v_0(x)]\,dxdtdz -$$

$$-\int_{\Omega} \mathrm{Im}\,[(\Delta\psi(x,t,z)\overline{\varphi}(x,t,z))\Delta v_1(x)]\,dxdtdz. \qquad (22)$$

Доказательство этой леммы проводится с помощью сопряженной задачи (11)–(14) и начально-краевой задачи (19), (20).

Теперь установим необходимое условие в виде приципа максимума Л.С. Понтрягина [12] для решения задачи идентификации (1)–(5). При получении необходимого условия будем использовать методику В.И. Плотникова [13, 14].

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Для того чтобы $v^* \in V$ была решением задачи идентификации (1)–(5), необходимо выполнение условия

$$\mathrm{H}(x,\psi^*(x,.,.), v_0^*(x), v_1^*(x), \overline{\varphi}^*(x,.,.)) =$$

$$= \sup_{v_m \in [-b_m, b_m],\, m=0,1} \mathrm{H}(x,\psi^*(x,.,.), v_0^*(x), v_1^*(x), \overline{\varphi}^*(x,.,.)) \qquad (23)$$

для почти всех $x \in D$, где $\psi^*(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z;v^*)$, $\varphi^*(x,t,z) \equiv \varphi(x,t,z;v^*)$ соответственно решения прямой и сопряженной задач при $v^* \in V$.

Доказательство. Зафиксируем внутри области D точку Лебега (правильную точку, см. [12, стр. 86]) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ всех функций, имеющихся в задачах (1)–(5) и (11)–(14). Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, для которого имеет место соотношение

$$\Pi_\varepsilon \equiv \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sigma_j - \frac{\varepsilon}{2} < x_j < \sigma_j + \frac{\varepsilon}{2},\ j = 1, 2, \dots, n \right\} \subset D. \qquad (24)$$

Построим импульсную вариацию решения $v^*(x) = (v_0^*(x), v_1^*(x))$ из множества V задачи идентификации (1)–(5) в виде

$$v_m^\varepsilon(x) = \begin{cases} w_m, & x \in \Pi_\varepsilon, \\ v_m^*(x), & x \notin \Pi_\varepsilon, \end{cases} \quad m = 0, 1, \qquad (25)$$

где w_m, $m = 0, 1$, — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $|w_m| \le b_m$, $m = 0, 1$. Тогда ясно, что импульсная вариация, определенная формулой (25), т.е. $v^\varepsilon = v^\varepsilon(x) = (v_0^\varepsilon(x), v_1^\varepsilon(x))$ принадлежит множеству V. Поэтому, используя определение точки Лебега, нетрудно доказать, что для варьированных функций выполняются условия

$$v_m^\varepsilon \to v_m^* \ \text{в}\ L_p(D) \ \text{при}\ \varepsilon \to 0,\ 1 \le p < +\infty,\ m = 0, 1. \qquad (26)$$

Пусть $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z;v^\varepsilon)$ — решение прямой задачи (2)–(5) при $v^\varepsilon \in V$. Тогда функция $\Delta\psi_\varepsilon = \Delta\psi_\varepsilon(x,t,z) = \psi_\varepsilon(x,t,z) - \psi^*(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z;v^\varepsilon) -$ $-\psi(x,t,z;v^*)$ будет решением начально-краевой задачи (19), (20), когда вместо функций $v_m(x)$, $v_m(x)+\Delta v_m(x)$, $m=0,1$, подставлены функции $v_m^*(x)$, $v_m^\varepsilon(x)$, $m=0,1$, где $\psi^*(x,t,z)\equiv\psi(x,t,z;v^*)$ — решение прямой задачи (2)–(5) при $v^*\in V$. В этом случае для решения начально-краевой задачи (19), (20) можно установить справедливость оценки

$$||\Delta\psi_\varepsilon(\cdot,t,\cdot)||^2_{L_2(\Omega_L)}+||\Delta\psi_\varepsilon(\cdot,\cdot,z)||^2_{L_2(\Omega_T)}\le c_3(||\Delta v_{0\varepsilon}\psi^*+i\Delta v_{1\varepsilon}\psi^*||^2_{L_2(\Omega)}) \quad (27)$$

для $\forall t\in[0,T]$, $\forall z\in[0,L]$, $\Delta v_{m\varepsilon}(x)=v_m^\varepsilon(x)-v_m^*(x)$, $m=0,1$. Применяя определение точки Лебега в правой части этой оценки, получим следующее неравенство:

$$||\Delta\psi_\varepsilon(\cdot,t,\cdot)||^2_{L_2(\Omega_L)}+||\Delta\psi_\varepsilon(\cdot,\cdot,z)||^2_{L_2(\Omega_T)}\le O_\sigma(\varepsilon^n)$$

$$\forall t\in[0,T],\ \forall z\in[0,L]. \quad (28)$$

Рассмотрим следующую квазисопряженную систему [13, 14]:

$$i\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t}+ia_0\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial z}-\sum_{p,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)+a(x)\varphi_\varepsilon+v_0^\varepsilon(x)\varphi_\varepsilon-iv_1^\varepsilon(x)\varphi_\varepsilon=0,$$

$$(x,t,z)\in\Omega, \quad (29)$$

$$\varphi_\varepsilon(x,T,z)=-2i\beta_0\left(\psi^*(x,T,z)-y_0(x,z)+\frac{1}{2}\Delta\psi_\varepsilon(x,T,z)\right),\ (x,z)\in\Omega_L, \quad (30)$$

$$\varphi_\varepsilon(x,t,L)=-\frac{2i\beta_1}{a_0}\left(\psi^*(x,t,L)-y_0(x,t)+\frac{1}{2}\Delta\psi_\varepsilon(x,t,L)\right),\ (x,z)\in\Omega_L, \quad (31)$$

$$\varphi_\varepsilon|_S=0, \quad (32)$$

где $\psi^*(x,t,z)\equiv\psi(x,t,z;v^*)$ — решение прямой задачи при $v^*\in V$, а $\Delta\psi_\varepsilon(x,t,z)=\psi_\varepsilon(x,t,z)-\psi^*(x,t,z)$. С помощью замечаний, сделанных относительно решения сопряженной задачи, можем утверждать, что квазисопряженная система также имеет единственное решение из пространства B_0 и справедлива оценка

$$||\varphi_\varepsilon(.,t,.)||^2_{L_2(\Omega_L)}+||\varphi_\varepsilon(.,.,z)||^2_{L_2(\Omega_T)}\le$$

$$\le c_4(||\psi^*(.,T,.)-y_0+(1/2)\Delta\psi_\varepsilon(.,T,.)||^2_{L_2(\Omega_L)}+$$

$$+||\psi^*(.,.,L)-y_1+(1/2)\Delta\psi_\varepsilon(.,.,L)||^2_{L_2(\Omega_T)})\ \forall t\in[0,T],\ \forall z\in[0,L]. \quad (33)$$

Теперь докажем оценку

$$||\varphi_\varepsilon(.,t,.)-\varphi^*(.,t,.)||^2_{L_2(\Omega_L)}+||\varphi_\varepsilon(.,.,z)-\varphi^*(.,.,z)||^2_{L_2(\Omega_T)}\le O_\sigma(\varepsilon^n)$$

$$\forall t\in[0,T],\ \forall z\in[0,L]. \quad (34)$$

Пусть $\varphi^*(x,t,z)\equiv\varphi(x,t,z;v^*)$ — решение сопряженной задачи при $v^*\in V$, а функция $\varphi_\varepsilon\equiv\varphi_\varepsilon(x,t,z)$ есть решение квазисопряженной системы. Тогда функция $F_\varepsilon(x,t,z)=\varphi_\varepsilon(x,t,z)-\varphi^*(x,t,z)$ будет решением следующей задачи:

$$i\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial t}+ia_0\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial z}-\sum_{p,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_j}\right)+a(x)F_\varepsilon+v_0^\varepsilon(x)F_\varepsilon-iv_1^\varepsilon(x)F_\varepsilon=$$

$$= -\Delta v_{0\varepsilon}(x)\varphi^*(x,t,z) + i\Delta v_{1\varepsilon}(x)\varphi^*(x,t,z),\ (x,t,z)\in\Omega, \tag{35}$$

$$F_\varepsilon(x,T,z) = -i\beta_0\Delta\psi_\varepsilon(x,T,z),\ (x,z)\in\Omega_L, \tag{36}$$

$$F_\varepsilon(x,t,L) = -\frac{i\beta_1}{a_0}\Delta\psi_\varepsilon(x,t,L),\ (x,t)\in\Omega_T, \tag{37}$$

$$F_\varepsilon|_S = 0. \tag{38}$$

С помощью замены $\tau = T - t,\ \theta = L - z$ эту задачу можно свести к начально-краевой задаче, которая является задачей типа комплексно сопряженной прямой задачи (2)–(4). Поэтому, используя методику сглаживания данных [9] и теорему 1, можем установить справедливость утверждения о том, что задача (35)–(38) имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка

$$||F_\varepsilon(.,t,.)||^2_{L_2(\Omega_L)} + ||F_\varepsilon(.,.,z)||^2_{L_2(\Omega_T)} \le$$

$$\le c_5(||\Delta\psi_\varepsilon(.,T,.)||^2_{L_2(\Omega_L)} + ||\Delta\psi_\varepsilon(.,.,L)||^2_{L_2(\Omega_T)} + ||\Delta v_{0\varepsilon}\varphi^* - i\Delta v_{1\varepsilon}\varphi^*||^2_{L_2(\Omega)}) \tag{39}$$

для $\forall t\in[0,T]$, $\forall z\in[0,L]$. Отсюда с помощью (28) и с применением определения точки Лебега в третьем слагаемом правой части получим оценку (34).

Рассмотрим приращение функционала $J_\alpha(v)$ на элементе $v^*\in V$:

$$\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon) = J_\alpha(v^\varepsilon) - J_\alpha(v^*) =$$

$$= 2\beta_0\int_{\Omega_L}\mathrm{Re}\left[(\psi^*(x,T,z) - y_0(x,z) + \frac{1}{2}\Delta\psi_\varepsilon(x,T,z))\Delta\overline{\psi}_\varepsilon(x,T,z)\right]dxdz +$$

$$+2\beta_1\int_{\Omega_T}\mathrm{Re}\left[(\psi^*(x,t,L) - y_1(x,t) + \frac{1}{2}\Delta\psi_\varepsilon(x,t,L))\Delta\overline{\psi}_\varepsilon(x,t,L)\right]dxdt +$$

$$+2\alpha\int_D[(v_0^*(x) - \omega_0(x))\Delta v_{0\varepsilon}(x) + (v_1^*(x) - \omega_1(x))\Delta v_{1\varepsilon}(x)]dx + \alpha||\Delta v_\varepsilon||^2_H, \tag{40}$$

где $\Delta v_\varepsilon = (\Delta v_{0\varepsilon}, \Delta v_{1\varepsilon})$. Используя квазисопряженную систему вместо сопряженной задачи и доказывая аналог леммы 1, приращение функционала можно представить в виде

$$\Delta J_\alpha(v^*,\ \varepsilon) = J_\alpha(v^\varepsilon) - J_\alpha(v^*) =$$

$$= \int_\Omega \mathrm{Re}\,[(\psi^*(x,t,z)\overline{\varphi}_\varepsilon(x,t,z))(v_0^\varepsilon(x) - v_0^*(x))]dx\,dt\,dz -$$

$$-\int_\Omega \mathrm{Im}\,[(\psi^*(x,t,z)\overline{\varphi}_\varepsilon(x,t,z))(v_1^\varepsilon(x) - v_1^*(x))]dx\,dt\,dz +$$

$$+2\alpha\int_D[(v_0^*(x) - \omega_0(x))\Delta v_{0\varepsilon}(x) + (v_1^*(x) - \omega_1(x))\Delta v_{1\varepsilon}(x)]dx + \alpha||\Delta v_\varepsilon||^2_H. \tag{41}$$

Для доказательства необходимого условия сначала докажем соотношение

$$\lim_{\varepsilon_k\to+0}\frac{\Delta J_\alpha(v^*,\ \varepsilon_k)}{\varepsilon_k^n} = \overset{0}{\delta J_\alpha}(v^*)\ \ \forall\sigma\in D, \tag{42}$$

где $\varepsilon_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ — специальным образом выбранная подпоследовательность, а $\delta J_\alpha(v^*)$ определяется формулой

$$\delta J_\alpha(v^*)=\int_Q \mathrm{Re}\,(\psi^*(\sigma,t,z)\overline{\varphi}^*(\sigma,t,z))dtdz(w_0-v_0^*(\sigma))-$$

$$-\int_Q \mathrm{Im}\,(\psi^*(\sigma,t,z)\overline{\varphi}^*(\sigma,t,z))dtdz(w_1-v_1^*(\sigma))+2\alpha(v_0^*(\sigma)-\omega_0(\sigma))(w_0-v_0^*(\sigma))+$$

$$+2\alpha(v_1^*(\sigma)-\omega_1(\sigma))(w_1-v_1^*(\sigma))+\alpha[(w_0-v_0^*(\sigma))^2+(w_1-v_1^*(\sigma))^2]. \quad (43)$$

Для того чтобы доказать справедливость предельного соотношения (42), достаточно установить, что

$$\left\|\frac{\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)}{\varepsilon^n}-\delta J_\alpha(v^*)\right\|_{L_1(D)}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to+0. \quad (44)$$

Используя формулы (41) и (43), имеем:

$$\left\|\frac{\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)}{\varepsilon^n}-\delta J_\alpha(v^*)\right\|_{L_1(D)}=$$

$$=\int_D\Bigg|\Bigg\{\int_{\Pi_\varepsilon}\Bigg[\int_Q \mathrm{Re}\,(\psi^*(x,t,z)\overline{\varphi}_\varepsilon(x,t,z))dtdz(v_0^\varepsilon(x)-v_0^*(x))\Bigg]dx-$$

$$-\int_{\Pi_\varepsilon}\Bigg[\int_Q \mathrm{Im}\,(\psi^*(x,t,z)\overline{\varphi}_\varepsilon(x,t,z))dtdz(v_1^\varepsilon(x)-v_1^*(x))\Bigg]dx+$$

$$+\int_{\Pi_\varepsilon}\sum_{m=0}^{1}(v_m^*(x)-\omega_m(x))(v_m^\varepsilon(x)-v_m^*(x))dx+\int_{\Pi_\varepsilon}\sum_{m=0}^{1}(v_m^\varepsilon(x)-v_m^*(x))^2\,dx\Bigg\}\varepsilon^{-n}-$$

$$-\int_Q \mathrm{Re}\,(\psi^*(\sigma,t,z)\overline{\varphi}^*(\sigma,t,z))dtdz(w_0-v_0^*(\sigma))-2\alpha(v_0^*(\sigma)-\omega_0(\sigma))(w_0-v_0^*(\sigma))+$$

$$+\int_Q \mathrm{Im}\,(\psi^*(\sigma,t,z)\overline{\varphi}^*(\sigma,t,z))dtdz(w_1-v_1^*(\sigma))-2\alpha(v_1^*(\sigma)-\omega_1(\sigma))(w_1-v_1^*(\sigma))-$$

$$-\ \alpha[(w_0-v_0^*(\sigma))^2+(w_1-v_1^*(\sigma))^2]\Bigg|d\sigma. \quad (45)$$

Группируя соответствующие слагаемые в этом равенстве, оценим их значения в пространстве $L_1(D)$. Тогда можно записать следующее неравенство:

$$\left\|\frac{\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)}{\varepsilon^n}-\delta J_\alpha(v^*)\right\|_{L_1(D)}\le I_1+I_2+I_3, \quad (46)$$

где

$$I_1=\int_D\Bigg|\int_{\Pi_\varepsilon}\Bigg[\int_Q \mathrm{Re}\,(\psi^*(x,t,z)\overline{\varphi}_\varepsilon(x,t,z))dtdz\Delta v_{0\varepsilon}(x)-$$

$$-\int_Q \mathrm{Im}\,(\psi^*(x,t,z)\overline{\varphi}_\varepsilon(x,t,z))dtdz\Delta v_{1\varepsilon}(x)\Bigg]dx\varepsilon^{-n}-$$

$$-\left(\int_Q \operatorname{Re}\,(\psi^*(\sigma,t,z)\overline{\varphi}^*(\sigma,t,z))dtdz(w_0-v_0^*(\sigma))-\right.$$

$$\left.\left.-\int_Q \operatorname{Im}\,(\psi^*(\sigma,t,z)\overline{\varphi}^*(\sigma,t,z))dtdz(w_1-v_1^*(\sigma))\right)\right|d\sigma, \tag{47}$$

$$I_2=\int_D\left|2\alpha\int_{\Pi_\varepsilon}\sum_{m=0}^{1}(v_m^*(x)-\omega_m(x))\Delta v_{m\varepsilon}(x)dx\varepsilon^{-n}-\right.$$

$$\left.-2\alpha\sum_{m=0}^{1}(v_m^*(\sigma)-\omega_m(\sigma))(w_m-v_m^*(\sigma))\right|d\sigma, \tag{48}$$

$$I_3=\int_D\left|\alpha\int_{\Pi_\varepsilon}\sum_{m=0}^{1}(\Delta v_{m\varepsilon}(x))^2dx\varepsilon^{-n}-\alpha\sum_{m=0}^{1}(w_m-v_1^*(\sigma))\right|d\sigma\,. \tag{49}$$

В силу формулы (47) слагаемое I_1 можем оценить следующим образом:

$$I_1\le\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{0\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi^*(x,t,z)-\varphi^*(\sigma,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma+$$

$$+\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{0\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi_\varepsilon(x,t,z)-\varphi^*(x,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma+$$

$$+\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{0\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)-(w_0-v_0^*(\sigma))\psi^*(\sigma,t,z)|\,|\varphi^*(\sigma,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma+$$

$$+\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{1\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi^*(x,t,z)-\varphi^*(\sigma,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma+$$

$$+\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{1\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi_\varepsilon(x,t,z)-\varphi^*(x,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma+$$

$$+\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{1\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)-(w_1-v_1^*(\sigma))\psi^*(\sigma,t,z)|\,|\varphi^*(\sigma,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma=$$

$$=I_{11}^0+I_{12}^0+I_{13}^0+I_{11}^1+I_{12}^1+I_{13}^1. \tag{50}$$

Сначала оценим слагаемое I_{11}^0, которое имеет вид

$$I_{11}^0=\int_D\varepsilon^{-n}\int_{\Pi_\varepsilon}\left(\int_Q|\Delta v_{0\varepsilon}(x)\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi^*(x,t,z)-\varphi^*(\sigma,t,z)|\,dtdz\right)dxd\sigma. \tag{51}$$

В правой части этого равенства сделаем замену переменных $x=\gamma+\sigma$ и обозначим $\widetilde{\Pi}_\varepsilon$ сдвинутый параллелепипед. Тогда, меняя порядок интегрирования и применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$I_{11}^0 \le \varepsilon^{-n} \int\limits_{\widetilde{\Pi}_\varepsilon} \left\{ \left(\int\limits_{\Omega} |\Delta v_{0\varepsilon}(\gamma+\sigma)\,\psi^*(\gamma+\sigma,t,z)|^2\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{\Omega} |\varphi^*(\gamma+\sigma,t,z)-\varphi^*(\sigma,t,z)|^2 \right)^{1/2} \right\} d\gamma. \tag{52}$$

В силу того, что $\Delta v_{0\varepsilon} \in L_\infty(D)$, $\psi^* \in L_2(\Omega)$ и для функции $\psi^* = \psi^*(x,t,z) \equiv$ $\equiv \psi(x,t,z;v^*)$ справедлива оценка при $v=v^* \in V$, можем установить справедливость неравенства

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\Delta v_{0\varepsilon}(\gamma+\sigma)\,\psi^*(\gamma+\sigma,t,z)|^2\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} \le c_6. \tag{53}$$

По свойству интегральной непрерывности суммируемой функции (каким бы ни было $\delta>0$) найдется $\tilde{\varepsilon}>0$, что при $||\gamma||_{R^n} \le \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ имеет место

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\varphi^*(\gamma+\sigma,t,z)-\varphi^*(\sigma,t,z)|^2\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} < \delta. \tag{54}$$

Тогда для таких ε из (52)–(54) получим справедливость неравенства

$$I_{11}^0 \le \frac{c_6 \delta \operatorname{mes} \widetilde{\Pi}_\varepsilon}{\varepsilon^n}. \tag{55}$$

Используя формулу

$$I_{11}^1 = \int\limits_D \varepsilon^{-n} \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \left(\int\limits_Q |\Delta v_{1\varepsilon}(x)\,\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi^*(x,t,z)-\varphi^*(\sigma,t,z)|\, dt dz \right) dx d\sigma, \tag{56}$$

слагаемое I_{11}^1 аналогично I_{11}^0 можем оценить следующим образом:

$$I_{11}^1 \le \frac{c_7 \delta \operatorname{mes} \widetilde{\Pi}_\varepsilon}{\varepsilon^n}, \tag{57}$$

где $c_7>0$ выбрана из неравенства

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\Delta v_{1\varepsilon}(\gamma+\sigma)\psi^*(\gamma+\sigma,t,z)|^2\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} \le c_7. \tag{58}$$

Аналогичным образом оцениваются слагаемые I_{13}^0 и I_{13}^1:

$$I_{13}^0 \le \frac{c_8 \delta \operatorname{mes} \widetilde{\Pi}_\varepsilon}{\varepsilon^n},\; I_{13}^1 \le \frac{c_9 \delta \operatorname{mes} \widetilde{\Pi}_\varepsilon}{\varepsilon^n}. \tag{59}$$

Теперь оценим слагаемые I_{12}^0 и I_{12}^1:

$$I_{12}^0 = \int\limits_D \varepsilon^{-n} \int\limits_{\Pi_\varepsilon} \left(\int\limits_Q |\Delta v_{0\varepsilon}(x)\,\psi^*(x,t,z)|\,|\varphi_\varepsilon(x,t,z)-\varphi^*(x,t,z)|\, dt dz \right) dx d\sigma. \tag{60}$$

Производя замену переменных $x=\gamma+\sigma$ и меняя порядок интегрирования, а также применяя неравенство Коши–Буняковского в правой части этого равенства, получим следующее неравенство:

$$I_{12}^{0} \le \varepsilon^{-n} \int\limits_{\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}} \left\{ \left(\int\limits_{\Omega} |\Delta v_{0\varepsilon}(\gamma+\sigma)\psi^{*}(\gamma+\sigma,t,z)|^{2}\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{\Omega} |\varphi_{\varepsilon}(\gamma+\sigma,t,z)-\varphi^{*}(\gamma+\sigma,t,z)|^{2}\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} \right\} d\gamma. \qquad (61)$$

В силу оценки (34) при $\varepsilon\to+0$ выражение

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\varphi_{\varepsilon}(\gamma+\sigma,t,z)-\varphi^{*}(\gamma+\sigma,t,z)|^{2}\, d\sigma dt dz \right)^{1/2} \qquad (62)$$

стремится к нулю. Поэтому при $\varepsilon<\widetilde{\varepsilon}$ оно может быть меньше чем $\delta>0$. Тогда из (61) в силу неравенства (53) имеем

$$I_{12}^{0} \le \frac{c_{6}\delta \,\mathrm{mes}\, \widetilde{\Pi}_{\varepsilon}}{\varepsilon^{n}}. \qquad (63)$$

Аналогично получению этого неравенства из формулы

$$I_{12}^{1} = \int\limits_{D} \varepsilon^{-n} \int\limits_{\Pi_{\varepsilon}} \left(\int\limits_{Q} |\Delta v_{1\varepsilon}(x)\psi^{*}(x,t,z)|\,|\varphi_{\varepsilon}(x,t,z)-\varphi^{*}(x,t,z)|\, dt dz \right) dx d\sigma \qquad (64)$$

в силу неравенства (58) получим справедливость неравенства

$$I_{12}^{1} \le \frac{c_{7}\delta \,\mathrm{mes}\, \widetilde{\Pi}_{\varepsilon}}{\varepsilon^{n}}. \qquad (65)$$

Таким образом, используя неравенства (55), (57), (59), (63) и (65), из неравенства (50) получаем, что

$$I_{1} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to +0. \qquad (66)$$

Аналогично получению этого соотношения для слагаемых I_2 и I_3 с помощью формул (48), (49) заключаем, что

$$I_{2} \to 0, \quad I_{3} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \qquad (67)$$

С учетом предельных соотношений (66), (67) из (46) получим справедливость предельного соотношения (44).

Теперь в предельном соотношении (44) вместо ε возьмем такую последовательность $\{\varepsilon_k\}$, что $\varepsilon_k>0$, $k=1,2,\ldots$, $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда из (44) получаем, что при $k\to\infty$ последовательность $\left\{ \dfrac{\Delta J_{\alpha}(v^{*},\varepsilon_k)}{\varepsilon_k^{n}} \right\}$ сходится к $\delta J_{\alpha}(v^{*})$ в норме пространства $L_1(D)$. Тогда в силу известной теоремы (см. [15, с. 361]) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_l}\}$ в $\{\varepsilon_k\}$ (которую снова обозначим $\{\varepsilon_k\}$) такая, что имеет место предельное соотношение (42).

По предположению $v^* = v^*(x)$ из V является решением задачи идентификации (1)–(5). Поэтому $\Delta J_\alpha(v^*, \varepsilon) \ge 0$. Следовательно,

$$\delta J_\alpha(v^*) \ge 0 \quad \overset{0}{\forall}\, \sigma \in D. \tag{68}$$

Учитывая выражение функции Гамильтона–Понтрягина (17) и формулу (43) для $\delta J_\alpha(v^*)$, получим

$$0 \le \delta J_\alpha(v^*) = \mathrm{H}(\sigma, \psi^*(\sigma,.,.), v_0^*(\sigma), v_1^*(\sigma), \overline{\varphi}^*(\sigma,.,.)) - \\ - \mathrm{H}(\sigma, \psi^*(\sigma,.,.), w, w_1, \overline{\varphi}^*(\sigma,.,.)) \tag{69}$$

для почти всех $\sigma \in D$. В силу того, что $v^* \in V$ является решением задачи идентификации (1)–(5) и $\sigma \in D$ — произвольная точка Лебега, а w_0, w_1 — произвольные числа из $[-b_0, b_0]$, $[-b_1, b_1]$ соответственно, из неравенства (69) получим справедливость утверждения теоремы. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен И.И. Принципы адаптивной оптики. — М.: Наука, 1985. — 335 с.
2. Шамеева Т.Ю. Об оптимизации в задаче о распространении светового пучка в неоднородной среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. математика и кибернетика. — 1985. — № 1. — С. 12–19.
3. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // ДАН СССР. — 1988. — **303**, № 5. — С. 1044–1048.
4. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантовомеханическими системами // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 12. — С. 27–38.
5. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера // Изв. АН Азерб. Сер. физ.–техн. и мат. наук. — 1994. — **15**, № 5–6. — С. 58–61.
6. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференциальные уравнения. — 1997. — **33**, № 12. — С. 1691–1698.
7. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление квантовомеханическим потенциалом // Тр. ИММ АНА. — 1998. — **18**. — С. 75–80.
8. Ягубов Г.Я., Ибрагимов Н.С. Задача оптимального управления для нестационарного уравнения квазиоптики // Проблемы мат. моделирования и оптимального управления. — Баку, 2001. — С. 49–57.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
10. Гохберг И.Н., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967. — 508 с.
11. Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. — Киев: Наук. думка, 1973. — 182 с.
12. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
13. Плотников В.И. О первой вариации и сопряженной задаче в теории оптимального управления // Функциональный анализ и его приложения. — 1976. — Вып. 10, № 4. — С. 95–96.
14. Плотников В.И., Сикорская Е.Р. Оптимизация управляемого объекта, описываемого нелинейной системой гиперболических уравнений // Изв. ВУЗов. Сер. Радиофизика. — 1972. — **15**, № 3. — С. 345–357.
15. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.2. — М.: Наука, 1973.— 392 с.

Поступила 10.02.2011