УДК 519.7

А.Н. КУРГАНСКИЙ

О МЕРЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ КОЛЛЕКТИВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АВТОМАТОВ В ДИСКРЕТНОЙ СРЕДЕ

Ключевые слова: *коллективы автоматов, теория конечных автоматов, клеточные автоматы, специальная теория относительности.*

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается коллектив автоматов с одним состоянием, взаимодействующих со средой, заданной в виде конечного или бесконечного графа. При этом коллектив представляет единый автоматоподобный вычислительный динамический объект. Для такого «размытого» по среде объекта сложно определить, что является его состоянием. В отличие от конечных автоматов, где мера изменения состояния равна одному состоянию в единицу времени, для распределенного по среде вычислительного динамического объекта возможны разные подходы к определению меры изменения состояния. В настоящей статье предлагается подход, при котором состояние коллектива автоматов определяется их взаимным расположением без учета внутренней сложности самих автоматов. Идея подхода взята из специальной теории относительности. В ее основе лежит понятие относительности в понимании, изложенном в работе [6, с. 338], где Пуанкаре начинает с простого примера изменения всех размеров во Вселенной в одинаковое число раз и продолжает рассмотрением произвольных деформаций, которые должны остаться незамеченными для наблюдателя, поскольку эталоны наблюдателя подвергаются тем же деформациям. Идея этого рассуждения используется в настоящей статье для определения состояния коллектива автоматов на основе принципа, согласно которому без каких-либо изменений в объекте невозможен процесс вычислений этим объектом. Изменение же в объекте определяется изменением взаимного расположения того, из чего состоит объект в среде — его элементарных частей, а скорость этого изменения зависит от скорости элементарных частей относительно среды. Таким образом, в основу вычислений в работе положено движение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пример шахматной доски с несколькими пешками. Пусть пешки могут делать движение на одну клетку в любом направлении в один такт дискретного времени, т.е. скорость пешки всегда равна одной клетке в единицу времени в одном из направлений: вверх, вниз, вправо, влево. Введем на доске естественным образом двухмерную систему координат. Составим из пешек на доске какую-нибудь фигуру, например букву О, и будем считать эти пешки одним цельным объектом. Для него определяем скорость перемещения по шахматной доске как среднюю скорость составляющих его пешек. Пусть теперь объект движется с максимальной скоростью одна клетка в единицу времени в направлении, например, вверх. Может ли объект при перемещении с максимальной скоростью перестроиться из буквы О, например, в букву Т? Очевидно, что нет, т.е. при максимальной скорости в данном примере в объекте невозможны изменения и, с нашей точки зрения, невозможно изменение состояния, а значит, невозможны вычисления. Эта точка зрения формально проиллюстрирована в основной части статьи, где будет рассмотрен простейший вариант одномерной среды и взаимодействующих с ней автоматов с одним состоянием. При этом введенная модель, как нетрудно показать, является универсальной вычислительной моделью, а коллективы автоматов в среде можно рассматривать как автоматоподобные вычислительные объекты, взаимодействующие между собой в среде. По аналогии с машинами Тьюринга, которые могут отвечать на определенные вопросы о свойствах слов на лентах, для рассматриваемых автоматоподобных объектов естественно ставить вопросы: какие свойства среды и других объектов в среде они могут устанавливать. Один из таких вопросов: что может сказать объект о скорости элементарных частей, т.е. автоматов, из которых состоят объекты? Должен ли заметить объект изменение скорости перемещения того, из чего он непосредственно состоит? Этот вопрос подобен вопросу в вышеупомянутом рассказе Пуанкаре об относительности: может ли наблюдатель заметить деформацию пространства, включающую в себя деформацию измерительных эталонов? Имея перед собой отрицательный ответ как цель, мы вводим определение используемой нами вычислительной модели. Эта цель определяет язык (скорость перемещения, собственное время как меру изменения состояния, скорость собственного времени, систему отсчета), на котором происходит взаимодействие между коллективами автоматов, как алгоритмами. Такая договоренность о языке взаимодействия между коллективами (всего лишь одном из возможных языков) отражает конвенциональную точку зрения Пуанкаре на физические законы. Сопоставление полученных результатов со специальной теорией относительности (СТО) [8] показывает, что сформулированные в работе принципы инвариантны относительно физических и информационных языковых средств выражения. Другими словами, семантическая схожесть использованного нами исходного принципа движения в формировании языка представленной в работе дискретной модели с принципами языка специальной теории относительности привела к синтаксической близости этих языков (формула преобразования систем координат, формула сложения скоростей, формула сокращения/увеличения линейных размеров). Однако в силу дискретности модели есть отличия, например длины двигающихся объектов (в статье для удобства рассматриваются не длины, а расстояния между объектами) могут как уменьшаться, так и увеличиваться относительно покоящейся системы отсчета. Сопоставление по аналогии полученных формул с формулами СТО также позволяет обнаружить разный физический смысл множителя Лоренца в формулах сокращения длины и замедления времени.

Чтобы отметить физические аналогии в предлагаемой модели, в статье используется слово «тело» как синоним для «коллектива автоматов». Мера изменения состояния коллектива автоматов, введенная в этой работе, названа собственным временем коллектива.

Таким образом, настоящая статья затрагивает три большие области исследования: 1) коллективы автоматов в теории конечных автоматов и сложность взаимодействия между ними; 2) дискретные модели физических процессов и проецирование физического мира в информационный мир символов и языков с целью компьютерного моделирования физического мира; 3) изучение понятия времени. По всем трем направлениям существуют обширные списки литературы [1, 3, 4, 7], свидетельствующие об интересе к этому вопросу.

Настоящая статья состоит из введения, раздела с основными определениями, разделов, посвященных понятию внешнего и внутреннего состояния, а также исследованию динамических свойств тел. В этих разделах рассматриваются только инерциальные тела и одномерная среда с целью иллюстрации изложенного во введении. В заключительном разделе даются некоторые обобщения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДЫ И ТЕЛА

Обозначим N, Z и R соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел, T и X — области изменения соответственно времени и координат. В данном случае полагаем, что T и X совпадают с Z, но далее в статье T и X будут явно расширены до R.

Примером одномерной среды будем считать бесконечный ориентированный граф с множеством вершин $V = \{x/2 | x \in Z\}$ и дуг $E = \{(x - i/2,\ x + i/2) | x \in Z,$ $i \in \{-1,1\}\}$. Дуги пронумерованы целыми числами в естественном порядке: дуга $(x - i/2,\ x + i/2)$, $i \in \{-1,1\}$, имеет пространственную абсолютную координату x и направление i. Абсолютную координату дуги e обозначаем $x(e)$, а направление дуги — $r(e)$. Дугу e также обозначаем через $x(e)^{r(e)}$. Окрестностью дуги x^i назовем пару дуг x^i и $(x+i)^{-i}$. Дуги x^i и $(x+i)^{-i}$ разного направления, ведущие в одну вершину, назовем встречными, а дуги x^i и x^{-i} с равными координатами, но разными направлениями, назовем противоположными. На рис. 1 представлена среда с указанием координат вершин, а также координат с направлениями дуг. Выбор такой среды обусловлен простотой и удобством для иллюстрации подхода, кратко сформулированного во введении.

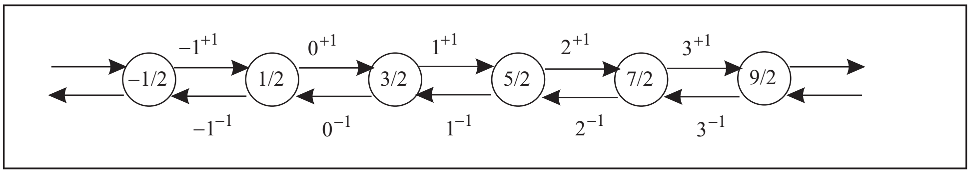


Рис. 1

Для примера двухмерной среды, рассмотренного в заключительной части статьи, используем декартово произведение двух одномерных сред. Множествами вершин и дуг двухмерной среды соответственно будут $V \times V$ и $E \times E$. Понятен смысл в контексте двухмерных сред таких слов, как пространственная абсолютная координата и направление дуги. В основной части статьи рассматривается только одномерный случай.

Элементарным телом назовем взаимодействующий со средой автомат с одним состоянием, которое назовем внутренним состоянием элементарного тела. Считаем, что изоморфные элементарные тела имеют одинаковые цвета, неизоморфные — разные. Со средой может взаимодействовать произвольное число элементарных тел одного цвета. Предполагаем, что используются r различных цветов, пронумерованных целыми от 1 до r. В каждый момент времени t элементарное тело b находится на какой-либо одной дуге $b(t)$ среды. Входным сигналом элементарного тела, находящегося на дуге x^i, является упорядоченный набор чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_r)$, который назовем состоянием окрестности дуги x^i, где p_k и q_k — число элементарных тел цвета k, находящихся на дугах x^i и $(x+i)^{-i}$ соответственно, $1 \le k \le r$. Выходом элементарного тела является прямолинейное движение или поворот. Если выходом автомата, находящегося в момент t на дуге x^i, является прямолинейное движение, то в следующий момент $t+1$ он находится на дуге $b(t+1) = (x+i)^i$. Тогда говорим, что он не сменил или сохранил свое внешнее состояние. Если выходом автомата является поворот, то $b(t+1) = x^{-i}$, и тогда говорим, что он сменил свое внешнее состояние.

Обозначим $\tau_b(t)$ число изменений внешнего состояния тела b, состоявшихся к моменту времени t. Тогда $1=\tau_b(t+1)-\tau_b(t)+|x(b(t+1))-x(b(t))|$ и $t=\tau_b(t)-\tau_b(0)+s_b(t)$, где $s_b(t)=\sum_{i=1}^{t}|x_b(i)-x_b(i-1)|$ — путь, пройденный b за время t, $t\in Z$. Другими словами, каждое элементарное тело использует единицу абсолютного времени как «ресурс» либо на изменение на единицу пространственной координаты, либо на изменение своего внешнего состояния. Схематично сказанное имеет вид формулы $t=s+\tau$, проиллюстрированной на рис. 2, *а*. На рис. 2, *б* проиллюстрирована аналогичная по смыслу формула $t^2=s^2+\tau^2$, которую следовало бы ожидать в пространстве с евклидовой метрикой и которая используется в СТО для выражения так называемого интервала $\tau^2=s^2-t^2$, являющегося инвариантом преобразования Лоренца.

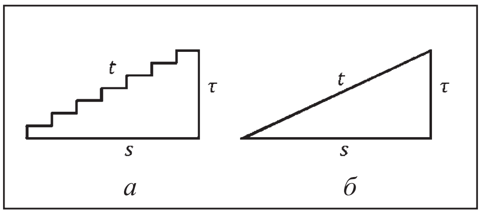


Рис. 2

В е л и ч и н у $\tau_b(t)$ н а з о в е м с о б с т в е н н ы м в р е м е н е м т е л а b, а $w_b(t)=$ $=\tau_b(t+1)-\tau_b(t)$ — скоростью собственного времени тела b. Обозначим $x_b(t)=x(b(t))$. Величину $v_b(t)=x_b(t+1)-x_b(t)$ назовем абсолютной скоростью перемещения b в момент времени t. Скорость считается равномерной, если $v_b(t)$ — константа.

Элементарное тело однозначно определяется множеством входных символов, меняющих его внешнее состояние. При этом предполагаем, что элементарное тело не может изменить своего внешнего состояния, если встречная дуга пуста, т.е. взаимодействие между элементарными телами происходит только при встрече в вершинах среды.

Пару пространственных координат x и времени t называем координатами в абсолютной системе отсчета $O=X\times T$ и обозначаем вектор-столбцами. Будем называть O также пространством событий.

Определение 1. Телом называется произвольная конечная совокупность элементарных тел.

Различные тела могут иметь общие части. Одно тело может включать другое тело как подмножество. Если элементарное тело принадлежит телу, то будем говорить о нем, как об элементарной части этого тела. Элементарное тело может быть элементарной частью различных тел одновременно.

Рассмотрим два примера тел для иллюстрации последующих определений. В каждом примере элементарные тела меняют внешнее состояние тогда и только тогда, когда встречная дуга не пуста. Таким образом, все элементарные тела изоморфны. Считаем, что в каждом примере элементарные тела пронумерованы целыми числами.

Пример 1. В момент абсолютного времени $t=0$ элементарное тело с номером $x\in Z$ находится на дуге x^{+1}, если x четное, и на дуге x^{-1} в противном случае. Определим тело A_1 как множество элементарных тел $\{0, 1, 2\}$, т.е. $A_1=\{0, 1, 2\}$ (см. рис. 3).

Пример 2. Элементарное тело с номером $x\in Z$ в момент времени $t=0$ имеет координату $4\cdot\lfloor x/3\rfloor+(x \bmod 3)$. При этом если $(x \bmod 3)=1$, то элементарное тело находится на дуге направления -1, в противном случае — на дуге направления $+1$. Обозначим $A_2=\{0, 1, 2\}$.

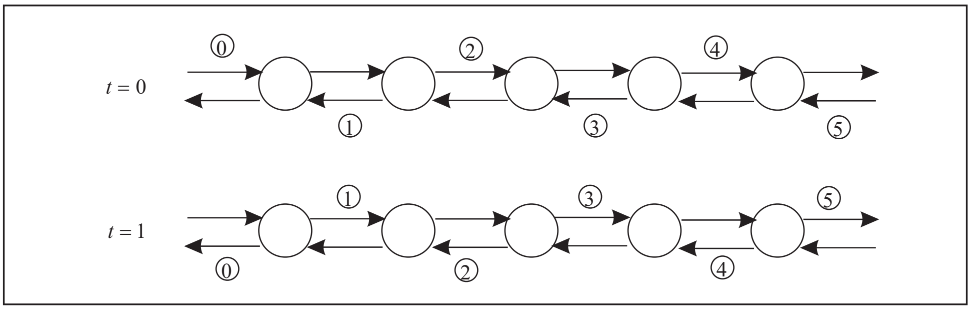


Рис. 3

Пусть конечное тело B состоит из n элементарных тел, пронумерованных числами $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда абсолютной (средней) координатой тела B в момент абсолютного времени t назовем величину $x_B(t) = (x_1(t) + \ldots + x_n(t)) / n$. Величина $v_B(t) = x_B(t+1) - x_B(t)$ называется абсолютной скоростью перемещения тела B в момент времени t. Тела A_1 и A_2 имеют соответственно равномерные абсолютные скорости перемещения $v_1 = 0$ и $v_2 = 1/3$. Из определений следует, что максимально возможные положительная и отрицательная скорости тела соответственно равны 1 и -1.

Координаты тела в общем случае не являются целыми числами. Поэтому расширим абсолютную систему отсчета O, координаты которой брались из множества $Z \times Z$, до множества координат $R \times R$. Пусть $t \in Z$ и $-1/2 < \Delta \leq 1/2$. Тогда считаем, что элементарное тело b в момент времени $t + \Delta$ имеет пространственную координату $x_b(t+\Delta) = x_b(t) + r(b(t)) \cdot \Delta$, скорость $v_b(t+\Delta) = v_b(t)$ и находится на дуге $b(t+\Delta) = b(t)$. Если $\Delta = 1/2$, то также считаем, что тело находится в момент времени $t + \Delta$ в вершине $x_b(t+\Delta)$ среды. Из определения следует, что состояния окрестности дуги $b(t')$ в моменты времени $t' = t + \Delta$ совпадают для всех Δ, $-1/2 < \Delta \leq 1/2$, при $t \in Z$. В частности, состояния дуги $b(t')$ в моменты времени $t' = t$ и $t' = t + 1/2$ совпадают, $t \in Z$, и, таким образом, поведение элементарных тел полностью определяется в вершинах графа среды, в которых происходит встреча элементарных тел. Если элементарные тела назвать точками, то можно упомянуть следующее замечание Эйнштейна, как еще один мотив наших определений: «Только те из утверждений относительно этих точек могут претендовать на физическую реальность, которые касаются встреч этих точек» [8, с. 188].

Мировой линией элементарного тела в интервале времени от $t' \in R$ до $t'' \in R$ назовем множество $b(t' : t'') = \{[x_b(t), t] \mid t' \leq t \leq t'', t \in R\}$. Если движению элементарного тела в промежутке времени от t' до t'' соответствует прямая мировая линия, т.е. за это время элементарное тело не изменяло внешнего состояния, то такое движение назовем элементарным.

ВНЕШНЕЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА

Тело, взаимодействуя с другими телами, испытывает влияние с их стороны и само влияет на них. Чтобы охарактеризовать это влияние, естественно ввести понятие состояния тела. Наше определение состояния тела основано на взаимном расположении в среде его элементарных частей. Если с течением времени взаимное расположение частей тела не изменяется, то не изменяется и состояние тела. Характер изменения взаимного расположения частей может быть различным, поскольку изменения могут затронуть все тело целиком или только его часть. Отсюда возникает вопрос и о мере изменения состояния тела. Перед тем как дать определение состояния тела, которое назовем внешним, обозначим $\tau = \tau_B(t)$ меру изменения внешнего состояния тела B с течением абсолютного времени t. В образной интерпретации $\tau_B(t)$ придается смысл «возраста» тела B в момент t. Назовем меру $\tau_B(t)$ собственным временем тела B в момент t.

Величину $w_B(t) = \tau_B(t+1) - \tau_B(t)$ назовем скоростью собственного времени тела B в момент абсолютного времени $t \in Z$.

Определение 2. Для любого тела B $w_B(t) = 1 \Leftrightarrow \forall_{b \in B} w_b(t) = 1$.

Определение 3. Для любого тела B $w_B(t) = 0 \Leftrightarrow \forall_{b \in B} w_b(t) = 0$.

Определение 4. Если $w_B(t) = 0$, то считаем, что тело B в момент времени t не меняет своего внешнего состояния.

Из определения 4 следует, что тело не изменяет своего внешнего состояния тогда и только тогда, когда все его элементарные части не изменяют своего внешнего состояния. Иными словами, два тела находятся в среде в одном и том же внешнем состоянии, если одно из них может быть получено из другого прямолинейным сдвигом на равное число шагов каждой его элементарной части в соответствующем внешнему состоянию направлении.

Теорема 1. Для любого тела B, если $|v_B(t)| = 1$, выполняется равенство $w_B(t) = 0$.

Доказательство следует из того, что при максимальной скорости перемещения невозможны изменения внешнего состояния элементарных частей тела.

Заметим, что если тело состоит из двух элементарных частей и при этом одна из них движется с максимальной скоростью в одном направлении, а другая — в другом, то, как следует из определения 4, внешнее состояние тела не изменяется, хотя при этом скорость тела равна нулю.

Поскольку отношение быть в одном и том же внешнем состоянии является отношением эквивалентности, то внешними состояниями естественно называть классы эквивалентностей этого отношения. Это касается и понятия внутреннего состояния, которое будет введено ниже.

ВНУТРЕННЕЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА

Определение состояний позволяет рассматривать тела как автоматоподобные модели алгоритмов. Но поскольку два тела с различной абсолютной скоростью заведомо находятся в различных внешних состояниях, то введенное понятие внешнего состояния не позволяет говорить о двух телах, перемещающихся с различной скоростью, как о реализациях одного и того же алгоритма. Для того чтобы иметь возможность говорить о телах, как об одном алгоритме, даже если они перемещаются с различной скоростью, введем понятие системы отсчета, связанной с телом, и понятие изоморфизма тел. Система отсчета, связанная с телом, позволит представить внешнее состояние тела как совокупность двух компонентов: скорости тела и его внутреннего состояния, не зависящего от скорости. Смысл системы отсчета, связанной с телом, заключается в определении языка и правил, позволяющих рассматривать другие тела относительно данного. Примером системы отсчета служит абсолютная система отсчета O, связанная с произвольным телом A таким, что $x_A(t) \equiv 0$, $v_A(t) \equiv 0$, $w_A(t) \equiv 1$, $\tau_A(0) = 0$, и, следовательно, $\tau_A(t) = t$, где τ_A — собственное время тела A. Таким образом, введенные понятия абсолютного времени, координаты и скорости в неявном виде подразумевают некоторое абсолютно покоящееся тело, относительно которого рассматривались объекты. Системы отсчета, связанные с произвольным телом, позволяют сделать эти понятия относительными.

Для произвольных тел A и B обозначим через $x_{AB}(\tau_B)$, $v_{AB}(\tau_B)$, $w_{AB}(\tau_B)$ и $\tau_{AB}(\tau_B)$ соответственно координату, скорость перемещения, скорость собственного времени и собственное время тела A в момент времени τ_B в системе отсчета O_B, связанной с телом B. По определению полагаем $x_{BB}(\tau_B)\equiv 0$, $v_{BB}(\tau_B)\equiv 0$ и $w_{BB}(\tau_B)\equiv 1$.

Определение 5. Тело B назовем инерциальным в системе отсчета тела A, если $v_{BA}(\tau_A)$ и $w_{BA}(\tau_A)$ — константы.

Инерциальность подразумевает равномерность изменения не только пространственных координат, но и временных. Для простоты рассматриваем случай только инерциальных тел.

Определение 6. Система отсчета, связанная с инерциальным телом, называется инерциальной.

Единственным ограничением, накладываемым на инерциальные системы отсчета, является следующее свойство: пространственно-временные координаты одних и тех же событий в разных инерциальных системах отсчета связаны аффинным преобразованием. Отсюда следует, что тело, инерциальное в абсолютной системе отсчета, является инерциальным в любой другой инерциальной системе отсчета.

Для инерциальных тел A и B согласно определениям 5, 6 $\tau_{AB}(\tau_B)=$ $=\tau_{AB}(0)+\tau_B\cdot w_{AB}$ и $x_{AB}(\tau_B)=x_{AB}(0)+\tau_B\cdot v_{AB}$.

Для произвольных инерциальных тел A и B обозначим через $L_{BA}: O_B\to O_A$ аффинное преобразование, связывающее O_B и O_A таким образом, что всякое событие (x,τ_B) в системе отсчета O_B совпадает с событием $L_{BA}(x,\tau_B)$ в системе отсчета O_A.

Введенных условий достаточно, чтобы установить функциональную зависимость между координатами одного и того же события в разных системах отсчета. Не ограничивая общности, полагаем $x_{BA}(0)=0$ и $\tau_{BA}(0)=0$. Тогда L_{BA} является линейным преобразованием. Найдем матрицу преобразования, которая имеет вид $L_{BA}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определение 7. Направлением произвольного вектора $\bar{a}$ назовем множество однонаправленных с ним векторов $\{\lambda\cdot\bar{a}\mid\lambda>0\}$.

Лемма 1. Векторы $[1,1]$ и $[-1,1]$ являются собственными векторами преобразования L_{BA}.

Доказательство. Аффинное преобразование может изменить направления осей координат, как виртуальные, воображаемые направления, но направления векторов $[1,1]$ и $[-1,1]$ в абсолютной системе отсчета соответствуют направлениям элементарных перемещений элементарных тел в среде. Эти направления не зависят от систем отсчета и поэтому являются инвариантными относительно преобразований систем отсчета, что и требовалось доказать.

Следствие 1. В матрице преобразования L_{BA} выполняются равенства $a_{11}=a_{22}$ и $a_{12}=a_{21}$.

Доказательство следует из предыдущей леммы в результате простых вычислений.

Заметим, что пространство, состоящее из направлений как вектора $[1,1]$, так и вектора $[-1,1]$, также является собственным преобразования L_{BA}. Оно останется собственным, если позволить преобразованию L_{BA} переставлять эти направления. В этом случае будут выполняться равенства $a_{11}=-a_{22}$ и $a_{12}=-a_{21}$. В физике такие две ситуации представляются соответственно как стандартная и симметричная конфигурации. Здесь рассматривается только стандартная конфигурация, т.е. случай $a_{11}=a_{22}$ и $a_{12}=a_{21}$, поскольку именно она одна в силу леммы 1 удовлетворяет нашим требованиям к инерциальным системам отсчета.

Теорема 2. Справедливо равенство $L_{BA} = \begin{pmatrix} 1/w_{BA} & v_{BA}/w_{BA} \\ v_{BA}/w_{BA} & 1/w_{BA} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Поскольку $L_{BA}\begin{pmatrix} x_{BB}(\tau_{BA}(\tau_A)) \\ \tau_{BA}(\tau_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{BA}(\tau_A) \\ \tau_A \end{pmatrix}$ и $\tau_{BA}(\tau_A) = \tau_A w_{BA}$, $x_{BA}(\tau_A) = v_{BA}\tau_A$, $x_{BB}(\tau_B) \equiv 0$, то $L_{BA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{BA}/w_{BA} \\ 1/w_{BA} \end{pmatrix}$. Отсюда $a_{12} = v_{BA}/w_{BA}$, $a_{22} = 1/w_{BA}$.

Следующие следствия справедливы для любых инерциальных тел A, B, C.

Следствие 2. Справедливы равенства $v_{AB} = -v_{BA}$ и $w_{AB} \cdot w_{BA} = 1 - v_{AB}^2 = 1 - v_{BA}^2$.

Доказательство. Указанные равенства получаются из $L_{AB} \cdot L_{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в результате простых вычислений.

Следствие 3. Справедливо равенство

$$L_{AB} = L_{BA}^{-1} = \begin{pmatrix} w_{BA}/(1-v_{BA}^2) & -v_{BA} w_{BA}/(1-v_{BA}^2) \\ -v_{BA} w_{BA}/(1-v_{BA}^2) & w_{BA}/(1-v_{BA}^2) \end{pmatrix}.$$

Следствие 4. Формула сложения скоростей имеет вид $v_{CA} = \dfrac{v_{BA} + v_{CB}}{1 + v_{BA} v_{CB}}$.

Доказательство. Формула сложения скоростей получается из равенства $L_{CA} = L_{BA} \cdot L_{CB}$ в результате простых вычислений.

Следствие 5. (Формула сокращения/увеличения расстояния.) Пусть инерциальные тела A, B и C такие, что $v_{AC} = v_{BC}$. Пусть также $\Delta x = |x_{AA}(\tau_A) - x_{BA}(\tau_A)|$ — расстояние между A и B в системе отсчета O_A; $\Delta x' = |x_{AC}(\tau_C) - x_{BC}(\tau_C)|$ — расстояние между A и B в системе отсчета O_C. Тогда $\Delta x' = w_{CA} \cdot \Delta x$ (рис. 4).

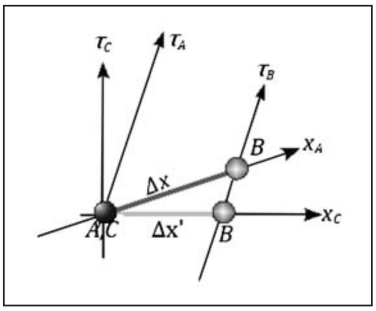


Рис. 4

Доказательство. Заметим, что Δx и $\Delta x'$ — константы. Без ограничения общности положим, что $x_{AC}(0) = 0$, $v_{AC} \geq 0$, $x_{BA} \geq 0$. Тогда $x_{BA}(\tau_A) \equiv \Delta x$ и $x_{BC}(0) = \Delta x'$. Пусть τ_A такое, что события $(x_{BC}(0), 0) = (\Delta x', 0)$ и $(x_{BA}(\tau_A), \tau_A) = (\Delta x, \tau_A)$ совпадают. Тогда формула сокращения линейных размеров $\Delta x' = w_{CA} \cdot \Delta x$ следует из $L_{CA} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \tau_A \end{pmatrix}$ и теоремы 2, что и требовалось доказать.

Дадим определение внутреннего состояния инерциального тела. Пусть для тел A и B есть биекция $\varphi: A \to B$ такая, что любые элементарные тела $b \in A$ и $\varphi(b) \in B$ изоморфны. Будем считать, что A в момент собственного времени τ_A и B в момент собственного времени τ_B аффинно-изоморфны, если $\{(\varphi(b), x_{bA}(\tau_A)) | b \in A\} = \{(b, x_{bB}(\tau_B)) | b \in B\}$.

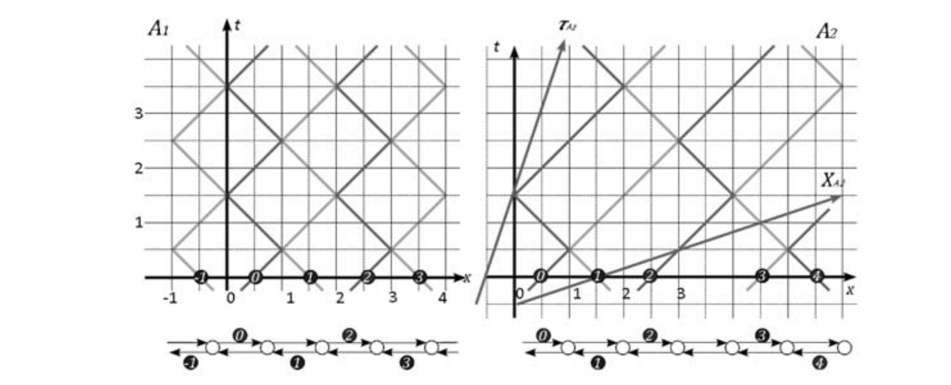
Определение 8. Два инерциальных тела находятся в одном и том же внутреннем состоянии в некоторые моменты своего собственного времени, если они аффинно-изоморфны в эти моменты времени.

Собственное время инерциального тела не зависит от скорости перемещения в абсолютной системе отсчета. Таким образом, внешнее состояние инерциального тела представлено комбинацией двух компонентов: скорости перемещения и его внутреннего состояния. Если теперь рассматривать тело как автоматоподобную систему, состояние которой определяется как внутреннее состояние, то, как следует из рассмотренных определений, тело не может вычислить свою абсолютную скорость. Если в качестве состояния выбрать внешнее состояние, то аналогичной проблемы не будет, поскольку внешнее состояние уже содержит информацию об абсолютной скорости.

Приведем пример изоморфизма тел. Рассмотрим тела A_1 и A_2 из примеров 1 и 2. Эти тела аффинно-изоморфны в силу следующего аффинного преобразования системы отсчета O_{A_2} в O_{A_1} :

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Представим динамику тела A_1 (рис. 5, *а*) и динамику тела A_2 (рис. 5, *б*) в виде их мировых линий, а также иллюстрацию аффинного преобразования. Из значения матрицы преобразования, теоремы 2 и его следствия вытекает, что $v_{21} = -v_{12} = \frac{1}{3}$, $w_{21} = \frac{2}{3}$, $w_{12} = \frac{4}{3}$.



а *б*

Рис. 5

Представляют интерес с точки зрения данной одномерной модели формулы $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ замедления времени и $\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1-(v/c)^2}$ сокращения длины специальной теории относительности. Проводя аналогию между ними и формулами $\tau_{AB}(\tau_B) - \tau_{AB}(0) = \tau_B \cdot w_{AB}$ и $\Delta x' = w_{CA} \cdot \Delta x$ соответственно (следствие 5), можно увидеть благодаря асимметрии в нашем дискретном «мире», что коэффициент $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-(v/c)^2}$, обратный коэффициенту Лоренца γ, имеет разный «физический» смысл в этих формулах. Коэффициент $1/\gamma$ в первой формуле имеет значение коэффициента w_{BA}, а во второй формуле — значение коэффициента w_{AB}, если рассматривать тело B относительно тела A.

ОБОБЩЕНИЕ НА БОЛЕЕ ВЫСОКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Расширим по аналогии введенные определения на более общий случай. Пусть Ω — произвольное множество с топологией, которое назовем пространством событий. Пусть B — множество, элементы которого назовем элементарными телами. Обозначим $x_b : R \to \Omega$ произвольную непрерывную в области определения функцию и назовем ее мировой линией элементарного тела b, $b \in B$.

Пусть F — произвольное конечное множество, которое назовем множеством цветов, при этом зафиксируем некоторую функцию, приписывающую элементарным телам цвет из F. Как и ранее, назовем телом произвольное конечное множество элементарных тел. Рассмотрим произвольное тело A. Зафиксируем некоторое отображение $O_A : \Omega \to R^n \times R$ из Ω в R^{n+1}, $n \geq 1$, и назовем его системой отсчета, связанной с телом A. Считаем, что событие $s \in \Omega$ имеет в системе отсчета O_A координату $O_A(s) = (x_1, \ldots, x_n, \tau)$, где по определению $(x_1, \ldots, x_n)$ называется пространственной координатой события s в системе отсчета, а τ — временной координатой, называемой также собственным временем тела A. Пусть событие s такое, что для некоторого $t \in R$ и элементарного тела $b \in B$ выполняется $x_b(t) = s$. Пусть также $O_A(s) = (x_1, \ldots, x_n, \tau_A)$. Тогда через $x_{bA}(\tau_A)$ обозначим набор $(x_1, \ldots, x_n)$ и будем называть $x_{bA}(\tau_A)$ пространственной координатой элементарного тела b в системе отсчета O_A в момент собственного времени τ_A тела A. Зафиксируем правило P, которое ставит в соответствие произвольному множеству координат одну координату. Им может быть, например, среднее арифметическое. Координатой тела B в системе отсчета O_A в момент времени τ_A назовем координату, полученную по правилу P из соответствующих этому времени координат элементарных тел, составляющих B. Отметим, что система отсчета O_A должна быть по определению такой, чтобы координата тела A в ней была равна нулю.

Рассмотрим произвольные тела A и B, когда есть биекция $\varphi: A \to B$ такая, что элементарные тела $b \in A$ и $\varphi(b) \in B$ имеют один цвет для всех $b \in A$. Как и ранее, A в момент собственного времени τ_A и B в момент собственного времени τ_B изоморфны или находятся в одном внутреннем состоянии, если $\{(\varphi(b), x_{bA}(\tau_A)) | b \in A\} = \{(b, x_{bB}(\tau_B)) | b \in B\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введенное обобщение основных определений позволяет применить аналогичный одномерному случаю подход к определению состояния коллектива автоматов на случаи не рассмотренных здесь конечных одномерных сред, многомерных дискретных сред и неинерциальных тел. Однако можно показать, что для случая двухмерной дискретной среды, определенной в начале статьи, преобразования, связывающие две инерциальные системы отсчета, не могут быть аффинными. Это следует из того, что системы отсчета в этом случае трехмерные, а матрица аффинного преобразования должна иметь ровно четыре собственных вектора — столько элементарных направлений в данной двухмерной дискретной среде (см. лемму 1). Этот факт требует дополнительного развития принятого в статье подхода к определению состояния коллектива автоматов, которое будет отражено в следующей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варшавский В.И. Коллективное поведение автоматов. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
2. Грунский И.С., Курганский А.Н. Динамика коллектива автоматов в дискретной среде // Тр. ИПММ НАНУ. — 2007. — Вып. 15. — С. 50–56.
3. Кандрашова Е.Ю., Литвинцева Л.В., Поспелов Д.А. Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1989. — 328 с.
4. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш.М. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. — 2003. — **15**, № 3. — С. 3–39.
5. Курганский А.Н. Мера изменения внутреннего состояния коллектива автоматов в дискретной среде // Тр. ИПММ НАНУ. — 2008. — Вып. 16. — С. 117–123.
6. Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.
7. Усманов З. Моделирование времени. — М.: Знание, 1991. — 48 с.
8. Эйнштейн А. Теория относительности. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 224 с.

Поступила 25.07.2010