УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, В.В. КОРОТКОВ

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ МИНИМАКСНОГО РИСКА СЭВИДЖА[1]

Ключевые слова: *векторная булева задача, инвестиционная задача, множество Парето, эффективный портфель, критерий минимаксного риска Сэвиджа, критерий «узкого места», радиус устойчивости.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время резко возрос интерес к процессам принятия многоцелевых решений в условиях неопределенности и риска (задачи теории игр, математической экономики, оптимального управления, инвестиционного анализа, банковской сферы, страхового бизнеса и т. д.). Широкое распространение дискретных оптимизационных моделей привлекло внимание многих специалистов к исследованию разнообразных аспектов устойчивости, а также проблем параметрического и постоптимального анализа как скалярной (однокритериальной), так и векторной (многокритериальной) дискретной оптимизации (монографии [1–3], обзоры [4–6], аннотированные библиографии [7, 8]).

Один из известных подходов к исследованию проблем устойчивости векторных задач дискретной оптимизации ориентирован на получение количественных характеристик устойчивости состоит в нахождении предельного уровня возмущений исходных данных задачи, не приводящих к появлению новых Парето-оптимальных решений. Большинство результатов в этом направлении связано с получением формул или оценок для радиуса устойчивости векторных задач булева и целочисленного программирования с линейными критериями [6, 9–12]. В настоящей статье получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости векторной булевой задачи с критериями «узкого места», т.е. задачи портфельной оптимизации с критериями минимаксного риска Сэвиджа. (Частично результаты этой статьи были анонсированы в [13].)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим векторный вариант задачи управления финансовыми инвестициями, основанный на портфельной теории Марковица [14]. Для этого введем следующие обозначения: $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — активы (акции, облигации предприятий, недвижимость и т.п.); N_m — возможные состояния финансового рынка; N_s — риски (финансовые, имущественные, производственные и т.п.); R — трехиндексная матрица рисков (упущенных возможностей) размера $m \times n \times s$ с элементами r_{ijk} из пространства $\mathbf{R}$; r_{ijk} — величина риска, которому подвергается инвестор, выбирая актив $j \in N_n$ по критерию (виду риска) $k \in N_s$, в том случае, если финансовый рынок находится в состоянии $i \in N_m$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$ — портфель активов инвестора (инвестиционный портфель), где $\mathbf{E} = \{0, 1\}$,

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если инвестор выбирает актив } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

[1]Работа выполнена в рамках совместного проекта НАН Украины и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф11К-095 «Исследование устойчивости и разработка методов решения многокритериальных задач дискретной оптимизации».

Наряду с трехиндексной матрицей $R=[r_{ijk}]\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$ будем использовать ее двухмерные сечения $R_k\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $k\in N_s$.

Предполагается, что каждый портфель инвестора из заданного набора X обеспечивает ему ожидаемый суммарный доход и не превышает суммы имеющегося у него капитала. Пусть эффективность выбираемого портфеля $x\in X$, $|X|\geq 2$, оценивается векторной целевой функцией

$$f(x,R)=(f_1(x,R_1),f_2(x,R_2),\ldots,f_s(x,R_s)),$$

состоящей из критериев минимаксного риска (крайнего пессимизма) Сэвиджа [15]

$$f_k(x,R_k)=\max_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n}r_{ijk}x_j\to\min_{x\in X},\quad k\in N_s.$$

Под векторной (s-критериальной) инвестиционной задачей $Z^s(R)$, $s\geq 1$, будем понимать булеву задачу поиска множества Парето $P^s(R)$, состоящего из эффективных портфелей,

$$P^s(R)=\{x\in X: P^s(x,R)=\varnothing\},$$

где

$$P^s(x,R)=\{x'\in X: x\underset{R}{\succ}x'\},$$

символ $\underset{R}{\succ}$ обозначает бинарное отношение, задаваемое на множестве X формулой

$$x\underset{R}{\succ}x'\Leftrightarrow g(x,x',R)\geq\mathbf{0}\ \&\ g(x,x',R)\neq\mathbf{0}.$$

Здесь

$$\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)\in\mathbf{R}^s,$$

$$g(x,x',R)=(g_1(x,x',R_1),g_2(x,x',R_2),\ldots,g_s(x,x',R_s)),$$

$$g_k(x,x',R_k)=f_k(x,R_k)-f_k(x',R_k)=\max_{i\in N_m}R_{ik}x-\max_{i\in N_m}R_{ik}x'=$$

$$=\min_{i'\in N_m}\max_{i\in N_m}(R_{ik}x-R_{i'k}x'),\quad k\in N_s,$$

$R_{ik}=(r_{i1k},r_{i2k},\ldots,r_{ink})$ — i-я строка сечения матрицы $R_k\in\mathbf{R}^{m\times n}$.

В пространстве $\mathbf{R}^d$ произвольной размерности $d\in\mathbf{N}$ зададим чебышевскую норму l_∞:

$$||z||=\max\{|z_j|: j\in N_d\},\quad z=(z_1,z_2,\ldots,z_d)^T\in\mathbf{R}^d.$$

Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из ее элементов. Таким образом, $||R||\geq||R_k||\geq||R_{ik}||$ при любых индексах $i\in N_m$ и $k\in N_s$.

Для любых векторов $x,x'\in X$ и любой матрицы $R_k\in\mathbf{R}^{m\times n}$ очевидны неравенства

$$R_{ik}x-R_{i'k}x'\geq-||R_k||\,||x+x'||^*,\quad i,i'\in N_m,\ k\in N_s, \tag{1}$$

где $||z||^*$ — норма l_1, т.е. $||z||^*=\sum_{j\in N_n}|z_j|$, $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)^{\mathrm{T}}$.

Как обычно [2, 6, 9–11], радиусом устойчивости задачи $Z^s(R)$, $s\geq 1$, к возмущениям параметров векторного критерия назовем число

$$\rho^s(R)=\begin{cases}\sup\Xi, & \text{если}\ \Xi\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если}\ \Xi=\varnothing,\end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall R' \in \Omega(\varepsilon) \quad (P^s(R+R') \subseteq P^s(R))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbf{R}^{m\times n\times s} : \ ||R'|| < \varepsilon\}.$$

Множество $\Omega(\varepsilon)$ будем называть множеством возмущающих матриц, а задачу $Z^s(R+R')$ — возмущенной.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^s(R) = X$ радиус устойчивости $\rho^s(R)$ равен бесконечности. Поэтому в дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^s(R)$, для которой множество $X \setminus P^s(R)$ непусто, будем называть нетривиальной.

2. ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ

Положим

$$\varphi^s(R) = \min_{x\notin P^s(R)} \max_{x'\in P^s(x,R)} \min_{k\in N_s} \min_{i'\in N_m} \max_{i\in N_m} \frac{R_{ik}x - R_{i'k}x'}{||x+x'||^*},$$

$$\psi^s(R) = \min_{x\notin P^s(R)} \max_{x'\in P^s(x,R)} \min_{k\in N_s} \min_{i'\in N_m} \max_{i\in N_m} \frac{R_{ik}x - R_{i'k}x'}{||x-x'||^*}.$$

Теорема 1. Для радиуса устойчивости $\rho^s(R)$, $s \ge 1$, векторной нетривиальной задачи $Z^s(R)$ справедливы следующие оценки:

$$\varphi^s(R) \le \rho^s(R) \le \psi^s(R).$$

Доказательство. Поскольку для любого портфеля $x \notin P^s(R)$ множество $P^s(x,R)$ непусто, то справедлива формула

$$\forall x \notin P^s(R), \ \forall x' \in P^s(x,R) \quad (x \underset{R}{\succ} x').$$

Поэтому, учитывая неравенства $||x+x'||^* \ge ||x-x'||^* > 0$, получаем, что $\psi^s(R) \ge \varphi^s(R) \ge 0$.

Для доказательства теоремы 1 вначале убедимся в справедливости неравенства $\rho^s(R) \ge \varphi^s(R)$. Это неравенство очевидно, если $\varphi^s(R) = 0$. Пусть $\varphi^s(R) > 0$. Согласно определению числа $\varphi^s(R)$ для любого портфеля $x \notin P^s(R)$ существует такой портфель $x' \in P^s(x,R)$, что

$$\min_{i'\in N_m} \max_{i\in N_m} (R_{ik}x - R_{i'k}x') \ge \varphi^s(R)||x+x'||^*, \quad k \in N_s. \tag{2}$$

Далее, с учетом неравенства (1) для любой матрицы $R' \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ и всякого индекса $k \in N_s$ имеем

$$g_k(x,x',R_k+R'_k) = \max_{i\in N_m}(R_{ik}+R'_{ik})x - \max_{i'\in N_m}(R_{i'k}+R'_{i'k})x' =$$

$$= \min_{i'\in N_m} \max_{i\in N_m} (R_{ik}x - R_{i'k}x' + R'_{ik}x - R'_{i'k}x') \ge$$

$$\ge \min_{i'\in N_m} \max_{i\in N_m} (R_{ik}x - R_{i'k}x') - ||R'_k|| \, ||x+x'||^*.$$

Отсюда, полагая $R' \in \Omega(\varphi^s(R))$, ввиду (2) получаем

$$g_k(x, x', R_k + R'_k) \geq (\varphi^s(R) - ||R'_k||)||x + x'||^* > 0, \; k \in N_s,$$

т.е. x не является эффективным портфелем возмущенной задачи $Z^s(R + R')$. Это означает, что $\forall R' \in \Omega(\varphi^s(R)) \quad (P^s(R + R') \subseteq P^s(R))$.

Следовательно, справедливо неравенство $\rho^s(R) \geq \varphi^s(R)$.

Далее докажем неравенство $\rho^s(R) \leq \psi^s(R)$. Согласно определению числа $\psi^s(R)$ существует такой портфель $x^0 \notin P^s(R)$, что для любого портфеля $x \in P^s(x^0, R)$ найдется такой индекс $q = q(x) \in N_s$, что

$$\min_{i \in N_m} \max_{i^0 \in N_m} (R_{i^0 q} x^0 - R_{iq} x) \leq \psi^s(R)||x^0 - x||^*. \tag{3}$$

Далее, полагая $\varepsilon > \psi^s(R)$, рассмотрим возмущающую матрицу $R^0 = [r^0_{ijk}] \in \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$, элементы которой определяются следующим образом:

$$r^0_{ijk} = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i \in N_m, \; x^0_j = 1, \; k \in N_s, \\ \delta & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\psi^s(R) < \delta < \varepsilon$. Тогда $||R^0|| = ||R^0_k|| = ||R^0_{ik}|| = \delta$ при $i \in N_m$, $k \in N_s$. Кроме того, все строки матрицы R^0_{ik}, $i \in N_m$, сечения R^0_k одинаковы и состоят из компонентов δ и $-\delta$ для любого индекса $k \in N_s$. Поэтому, обозначив такую строку через B, имеем

$$B(x^0 - x) = -\delta||x^0 - x||^*, \quad ||B|| = \delta. \tag{4}$$

Отсюда, учитывая (3) и строение возмущающей матрицы R^0, выводим, что для любого портфеля $x \in P^s(x^0, R)$ справедливы соотношения

$$g_q(x^0, x, R_q + R^0_q) = \max_{i \in N_m} (R_{iq} + B)x^0 - \max_{i \in N_m} (R_{iq} + B)x =$$

$$= \max_{i \in N_m} R_{iq} x^0 - \max_{i \in N_m} R_{iq} x + B(x^0 - x) = \min_{i \in N_m} \max_{i^0 \in N_m} (R_{i^0 q} x^0 - R_{iq} x) + B(x^0 - x) \leq$$

$$\leq (\psi^s(R) - \delta)||x^0 - x||^* < 0.$$

Поэтому получаем

$$\forall x \in P^s(x^0, R) \;\; (x \notin P^s(x^0, R + R^0)). \tag{5}$$

Пусть теперь портфель $x \notin P^s(x^0, R)$, т. е. бинарное отношение $x^0 \underset{R}{\succ} x$ не выполняется. Тогда возможны следующие два случая.

Случай 1. Пусть $g(x^0, x, R) = \mathbf{0}$. Тогда для любого индекса $k \in N_s$ согласно равенству (4) имеем

$$g_k(x^0, x, R_k + R^0_k) = \max_{i \in N_m} (R_{ik} + B)x^0 - \max_{i \in N_m} (R_{ik} + B)x =$$

$$= g_k(x^0, x, R_k) + B(x^0 - x) = -\delta||x^0 - x||^* < 0.$$

Случай 2. Существует такой индекс $q \in N_s$, что $g_q(x^0, x, R_q) < 0$. Тогда, вновь используя (4), имеем $g_q(x^0, x, R_q + R_q^0) < 0$.

Таким образом, $x \notin P^s(x^0, R + R^0)$, если $x \notin P^s(x^0, R)$. В результате с учетом (5) имеем $P^s(x^0, R + R^0) = \varnothing$, т.е. x^0 является эффективным портфелем возмущенной задачи $Z^s(R + R^0)$. Отсюда ввиду $x^0 \notin P^s(R)$ заключаем

$$\forall \varepsilon > \psi^s(R) \ \exists R^0 \in \Omega(\varepsilon) \ \ (P^s(R + R^0) \not\subseteq P^s(R)).$$

Следовательно, справедливо неравенство $\rho^s(R) \le \psi^s(R)$.

Теорема 1 доказана.

3. ДОСТИЖИМОСТЬ ОЦЕНОК

Верхняя оценка $\psi^s(R)$ радиуса устойчивости $\rho^s(R)$ согласно теореме 1 является достижимой. Действительно, пусть $m = 1$. Тогда данная задача $Z^s(R)$ преобразуется в векторную (s-критериальную) задачу булева программирования с линейными критериями

$$R_k x \to \min_{x \in X}, \quad k \in N_s, \tag{6}$$

а верхняя оценка принимает вид

$$\rho^s(R) \le \psi^s(R) = \min_{x \notin P^s(R)} \ \max_{x' \in P^s(x, R)} \ \min_{k \in N_s} \frac{R_k(x - x')}{||x - x'||^*},$$

где R_k — k-я строка матрицы $R \in \mathbf{R}^{s \times n}$. Как известно [6, 9, 10, 16], правая часть этого соотношения является выражением для радиуса устойчивости нетривиальной задачи (6). Поэтому в случае, когда $m = 1$, имеем $\rho^s(R) = \psi^s(R)$, что свидетельствует о достижимости верхней оценки.

Легко также увидеть, что и нижняя оценка $\varphi^s(R)$ достижима. Действительно, пусть для любых портфелей $x \notin P^s(R)$ и $x' \in P^s(x, R)$ выполняется равенство $||x + x'||^* = ||x - x'||^*$. Тогда $\rho^s(R) = \varphi^s(R) = \psi^s(R)$.

Справедливо также следующая теорема, свидетельствующая о том, что радиус устойчивости задачи $Z^s(R)$ может быть равен нижней положительной оценке $\varphi^s(R)$, не совпадая с верхней оценкой $\psi^s(R)$.

Теорема 2. Существует такой класс нетривиальных задач $Z^s(R)$, $s \ge 1$, что для радиуса устойчивости $\rho^s(R)$ справедливы соотношения

$$0 < \rho^s(R) = \varphi^s(R) < \psi^s(R). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\varphi^s(R) > 0$. Для выполнения неравенства $\varphi^s(R) < \psi^s(R)$ достаточно считать, что $\Delta = ||x + x'||^* - ||x - x'||^* > 0$ для любых портфелей $x \notin P^s(R)$ и $x' \in P^s(x, R)$. А для доказательства равенства $\rho^s(R) = \varphi^s(R)$ согласно теореме 1 достаточно выделить класс задач, для которых $\rho^s(R) \le \varphi^s(R)$. Изложим это более детально.

Из определения числа $\varphi^s(R) > 0$ следует существование такого портфеля $x^0 \notin P^s(R)$, когда для любого $x \in P^s(x^0, R)$ найдется такой индекс $q = q(x) \in N_s$, что

$$0 \le g_q(x^0, x, R_q) \le \varphi^s(R) ||x^0 + x||^*. \tag{8}$$

Рассмотрим класс задач $Z^s(R)$, для которых выполняются условия

$$X = \{x^0, \hat{x}\}, \quad P^s(x^0, R) = \{\hat{x}\},$$

$$(R_{i(x^0)q} - R_{i(\hat{x})q})x^0 > \varphi^s(R)\Delta, \tag{9}$$

где

$$i(\hat{x}) = \arg\max \{R_{iq}\hat{x} : i \in N_m\},$$

$$i(x^0) = \arg\max \{R_{iq}x^0 : i \in N_m\}.$$

Тогда из (8) следует

$$0 \le g_q(x^0, \hat{x}, R_q) \le \varphi^s(R)||x^0 + \hat{x}||^*, \tag{10}$$

а из неравенств (9) и $\varphi^s(R)\Delta > 0$ вытекает, что $i(x^0) \ne i(\hat{x})$.

Для любого числа $\varepsilon > \varphi^s(R)$ элементы возмущающей матрицы $R^0 = [r^0_{ijk}] \in \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ зададим по правилу

$$r^0_{ijk} = \begin{cases} \delta, & \text{если } \ i = i(\hat{x}),\ \hat{x}_j = 1,\ k = q, \\ -\delta, & \text{если } \ i = i(\hat{x}),\ \hat{x}_j = 0,\ k = q, \\ -\delta, & \text{если } \ i \in N_m \setminus \{i(\hat{x})\},\ x^0_j = 1,\ k = q, \\ 0 & \text{в иных случаях,} \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\varphi^s(R) < \delta < \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{\Delta}(R_{i(x^0)q} - R_{i(\hat{x})q})x^0\right\}. \tag{12}$$

Отметим, что последние неравенства корректны благодаря (9).

В силу строения возмущающей матрицы R^0 имеем

$$R^0_{i(\hat{x})q}\hat{x} = \delta||\hat{x}||^*, \tag{13}$$

$$R^0_{iq}x^0 = -\delta\,||x^0||^*, \quad i \in N_m \setminus \{i(\hat{x})\}, \tag{14}$$

$$||R^0_q|| = ||R^0|| = \delta, \ R^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Кроме того, выполняется равенство

$$R^0_{i(\hat{x})q}x^0 = \delta(\Delta - ||x^0||^*). \tag{15}$$

Действительно, пусть

$$Q_1 = \{j \in N_n : x^0_j = \hat{x}_j = 1\},$$

$$Q_2 = \{j \in N_n : x^0_j = 1,\ \hat{x}_j = 0\}.$$

Тогда очевидны равенства

$$|Q_1| = \Delta/2,$$

$$|Q_2| = ||x^0||^* - \Delta/2,$$

$$R^0_{i(\hat{x})q}x^0 = \delta(|Q_1|-|Q_2|),$$

из которых и вытекает (15).

Покажем, что портфель $x^0 \in P^s(R+R^0)$, т.е. $\hat{x} \notin P^s(x^0, R+R^0)$. Согласно (13) имеем

$$f_q(\hat{x}, R_q+R_q^0) = \max_{i\in N_m}(R_{iq}+R_{iq}^0)\hat{x} = f_q(\hat{x}, R_q)+\delta||\hat{x}||^*. \tag{16}$$

Далее убедимся в справедливости равенства

$$f_q(x^0, R_q+R_q^0) = f_q(x^0, R_q)-\delta||x^0||^*. \tag{17}$$

Из (14) следует

$$f_q(x^0, R_q+R_q^0) = \max\left\{(R_{i(x^0)q}+R^0_{i(x^0)q})x^0,\ \max_{i\neq i(x^0)}(R_{iq}+R_{iq}^0)x^0\right\} =$$

$$= \max\left\{f_q(x^0, R_q)-\delta||x^0||^*,\ \max_{i\neq i(x^0)}(R_{iq}+R_{iq}^0)x^0\right\}.$$

Поэтому, учитывая (согласно (14)) неравенства

$$f_q(x^0, R_q)-\delta||x^0||^* \geq (R_{iq}+R_{iq}^0)x^0,\ \ i\in N_m\setminus\{i(x^0),\ i(\hat{x})\},$$

для доказательства (17) остается убедиться, что

$$f_q(x^0, R_q)-\delta||x^0||^* \geq (R_{i(\hat{x})q}+R^0_{i(\hat{x})q})x^0.$$

Для этого, воспользовавшись (12) и (15), выводим

$$f_q(x^0, R_q)-\delta||x^0||^*-(R_{i(\hat{x})q}+R^0_{i(\hat{x})q})x^0 = (R_{i(x^0)q}-R_{i(\hat{x})q})x^0-$$

$$-\delta||x^0||^*-R^0_{i(\hat{x})q}x^0 > \delta(\Delta-||x^0||^*)-R^0_{i(\hat{x})q}x^0 = 0.$$

Наконец, последовательно применяя (16), (17), (10) и (12), получаем

$$g_q(x^0, \hat{x}, R_q+R_q^0) = g_q(x^0, \hat{x}, R_q)-\delta||x^0+\hat{x}||^* \leq (\varphi^s(R)-\delta)||x^0+\hat{x}||^* < 0.$$

Поэтому $\hat{x} \notin P^s(x^0, R+R^0)$, т.е. с учетом условия $X=\{x^0, \hat{x}\}$ заключаем, что x^0 является эффективным портфелем возмущенной задачи $Z^s(R+R^0)$. Отсюда ввиду $x^0 \notin P^s(R)$ выводим

$$\forall\varepsilon>\varphi^s(R)\ \ \exists R^0\in\Omega(\varepsilon)\ \ (P^s(R+R^0)\not\subseteq P^s(R)).$$

Следовательно, справедливо неравенство $\rho^s(R)\leq\varphi^s(R)$. Резюмируя, убеждаемся, что соотношения (7) верны.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 2.

Пример 1. Пусть $m=2$, $n=3$, $s=1$; $X=\{\hat{x}, x^0\}$, $\hat{x}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $x^0=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$; матрица

$$R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

со строками R_1 и R_2. Тогда $f(\hat{x}, R) = 0$, $f(x^0, R) = 4$, т.е. $\hat{x} \in P^1(R)$, $x^0 \notin P^1(R)$; $\Delta = 2$, $i(\hat{x}) = 1$, $i(x^0) = 2$. Поэтому $\varphi^1(R) = 1$, $\psi^1(R) = 2$ и неравенство (9) принимает вид

$$(R_2 - R_1)x^0 = 3 > 2 = 2\varphi^1(R).$$

При возмущающей матрице

$$R^0 = \begin{pmatrix} \delta & \delta & -\delta \\ 0 & -\delta & -\delta \end{pmatrix}, \quad 1 < \delta < 1.5,$$

построенной по правилу (11), имеем $\|R^0\| = \delta$ и $f(x^0, R + R^0) = 4 - 2\delta < 2\delta = f(\hat{x}, R + R^0)$, т.е. $x^0 \in P^1(R + R^0)$. Следовательно, $\rho^1(R) \le 1$. Поэтому с учетом теоремы 1 заключаем, что $\varphi^1(R) = 1 = \rho^1(R) < 2 = \psi^1(R)$.

4. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Задача $Z^s(R)$, $s \ge 1$, называется устойчивой (T_3-устойчивой по векторному критерию в терминологии [2, 17–19]), если ее радиус устойчивости больше нуля. Введем в рассмотрение множество Слейтера $Sl^s(R)$ (множество слабо эффективных портфелей):

$$Sl^s(R) = \{x \in X : Sl^s(x, R) = \varnothing\},$$

где

$$Sl^s(x, R) = \{x' \in X : \forall k \in N_s \ \ (g_k(x, x', R_k) > 0)\}.$$

Очевидно, что $P^s(R) \subseteq Sl^s(R)$ при любой матрице $R \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$.

Теорема 3. Для нетривиальной задачи $Z^s(R)$, $s \ge 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^s(R)$ устойчива,

(ii) $P^s(R) = Sl^s(R)$,

(iii) $\varphi^s(R) > 0$.

Доказательство. Пусть $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что задача $Z^s(R)$ устойчива, но $P^s(R) \ne Sl^s(R)$. Тогда существует слабо эффективный портфель $x^0 \in Sl^s(R) \setminus P^s(R)$. Поэтому $Sl^s(x^0, R) = \varnothing$ и $P^s(x^0, R) \ne \varnothing$. Это означает, что

$$\exists x^0 \notin P^s(R) \quad \forall x \in P^s(x^0, R) \quad \exists q \in N_s \quad (g_q(x^0, x, R_q) = 0).$$

Следовательно, $\psi^s(R) = 0$ и согласно теореме 1 $\rho^s(R) = 0$, что противоречит устойчивости задачи $Z^s(R)$.

Пусть $(ii) \Rightarrow (iii)$. Если $P^s(R) = Sl^s(R)$, то $Sl^s(x, R) \ne \varnothing$ для любого портфеля $x \notin P^s(R)$. Поэтому существует такой портфель $x^0 \in X$, когда верны неравенства $g_k(x, x^0, R_k) > 0$, $k \in N_s$, т.е. $x^0 \in P^s(x, R)$. Итак, справедлива формула

$$\forall x \notin P^s(R) \quad \exists x^0 \in P^s(x, R) \quad \forall k \in N_s \quad (g_k(x, x^0, R_k) > 0).$$

Следовательно, $\varphi^s(R) > 0$ s.

Пусть $(iii) \Rightarrow (i)$. Эта импликация согласно теореме 1 очевидна. Теорема 3 доказана.

Поскольку $P^1(R) = Sl^1(R)$, то из теоремы 3 следует, что скалярная задача $Z^1(R)$ устойчива при любой матрице $R \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Замечание 1. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерных линейных пространствах (например, [20]) результат теоремы 3 справедлив для любых норм в пространстве $\mathbf{R}^{m \times n \times s}$ параметров задачи.

Замечание 2. Незначительно видоизменив доказательство теоремы 1, легко убедиться в справедливости следующего утверждения: для радиуса устойчивости $\rho_{Sl}^s(R)$, $s \geq 1$, векторной нетривиальной $(X \neq Sl^s(R))$ задачи $Z_{Sl}^s(R)$ поиска множества Слейтера $Sl^s(R)$ справедливы следующие оценки:

$$0 < \min_{x \notin Sl^s(R)} \max_{x' \in Sl^s(x,R)} \min_{k \in N_s} \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} \frac{R_{ik}x - R_{i'k}x'}{||x + x'||^*} \leq \rho_{Sl}^s(R) \leq$$

$$\leq \min_{x \notin Sl^s(R)} \max_{x' \in Sl^s(x,R)} \min_{k \in N_s} \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} \frac{R_{ik}x - R_{i'k}x'}{||x - x'||^*}.$$

Отсюда вытекает, что векторная задача $Z_{Sl}^s(R)$ всегда устойчива.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базе портфельной теории Марковица сформулирована векторная инвестиционная задача (задача портфельной оптимизации) с минимаксными критериями рисков Сэвиджа. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса того типа устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи ставит в соответствие множество Парето. Достижимость обеих оценок гарантируется указанием таких классов задач, для которых эти оценки становятся формулами. Следует отметить особенность результатов, полученных в разд. 4. Известное [1, 2, 17–19] необходимое и достаточное условие T_3-устойчивости (по векторному критерию) векторных целочисленных задач поиска множества Парето с линейными и квадратичными функциями частных критериев (совпадение множеств Парето и Слейтера) является таким же условием рассмотренной здесь векторной булевой задачи $Z^s(R)$ с минимаксными критериями Сэвиджа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 264 с.
3. Sotskov Yu.N., Sotskova N.Yu., Lai T.-C., Werner F. Scheduling under uncertainty. Theory and algorithms. — Minsk: Belorusskaya nauka, 2010. — 326 p.
4. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. — 1995. — **58**, N 2. — P. 169–190.
5. Sotskov Yu.N., Tanaev V.S., Werner F. Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments // Industrial applications of combinatorial optimization. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. — P. 72–108.

6. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — **51**, N 4. — P. 645–676.

7. Greenberg H.J. A bibliography for the development of an intelligent mathematical programming system // Annals of Operations Research. — 1996. — **65**, N 1. — P. 55–90.

8. Greenberg H.J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization. Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search: Interfaces in Computer Science and Operations Research, Operations Research // Computer Science Interfaces Series / D.L. Woodruff (Ed.). — Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1998. — P. 97–148.

9. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2001. — **8**, № 1. — С. 47–69.

10. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 4. — С. 155–166.

11. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Там же. — 2010. — № 1. — С. 82–89.

12. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. — 2010. — **7**, N 1–2. — P. 48–63.

13. Емеличев В.А., Коротков В.В. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска // V Міжнарод. школа-семінар «Теорія прийняття рішень»: Праці школи-семінару, Ужгород, 27 вересня — 1 жовтня 2010 року. — Ужгород: УжНУ, 2010. — С. 88–89.

14. Markowitz H.M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. — Oxford: Blackwell Publ., 1991. — 310 p.

15. Savage L.J. The foundations of statistics. — New York: Dover Publ., 1972. — 384 p.

16. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1998. — **38**, № 11. — С. 1801–1805.

17. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.

18. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.

19. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Там же. — 2008. — № 3. — С. 142–148.

20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2009. — 572 с.

Поступила 10.11.2010