УДК 519.854

В.П. ШИЛО, О.В. ШИЛО, В.А. РОЩИН

МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО РАВНОВЕСНОГО ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ВЗВЕШЕННОМ РАЗРЕЗЕ ГРАФА

Ключевые слова: *максимальный взвешенный разрез графа, метод глобального равновесного поиска, вычислительный эксперимент, эффективность алгоритма.*

Задача о максимальном взвешенном разрезе графа имеет многочисленные практические приложения [1]. Поскольку она является классической проблемой дискретной оптимизации, ей посвящено много публикаций, например [1–6].

В последние годы все больше внимания привлекает метод глобального равновесного поиска (ГРП) [7, 8]. Для решения задачи о максимальном разрезе графа разработаны [9, 10] специальные алгоритмы GES (ГРП) Tabu и GES Pr_LocS, основанные на использовании этого метода и специфики задачи. Анализ результатов проведенных экспериментальных исследований показал, что они превосходят известные алгоритмы как по скорости получения наилучших решений, так и по их качеству. Так, при решении 44 тестовых задач найдено 12 новых рекордов, для всех остальных тестов (кроме одного) были получены известные рекорды. Следует заметить, что по своей практической эффективности метод ГРП явно выделяется среди методов дискретной оптимизации.

В настоящей статье для решения рассматриваемой задачи предлагается модификация алгоритма GES Tabu, приводятся результаты экспериментальных исследований на расширенном множестве тестовых задач, подтверждающие преимущества метода ГРП.

Предположим, что задан неориентированный граф $G = G(V, E)$ с множествами вершин V и ребер E. Каждому ребру $(i, j) \in E$ графа соответствует вес $w_{ij} > 0$. Разрезом графа G называется разбиение (V_1, V_2) множества его вершин V на два непересекающихся подмножества: V_1 и V_2, такие, что $i \in V_1$, $j \in V_2$. Очевидно, что любое такое разбиение порождает разрез графа.

Задача о максимальном взвешенном разрезе неориентированного графа (MAX-CUT) G состоит в нахождении разреза максимального суммарного веса

$$w(V_1, V_2) = \sum_{i\in V_1,\, j\in V_2,\, (i,\, j)\in E} w_{ij} .$$

Рассматриваемая задача является NP-трудной даже в случае, когда все ребра имеют единичный вес. Основной трудностью при ее решении является экспоненциальный рост вычислительных затрат при увеличении размерности задачи. Поэтому при исследовании этого класса задач больших размерностей эффективны только приближенные методы.

Задачу о максимальном взвешенном разрезе графа можно записать в виде задачи булева квадратичного программирования без ограничений (UBQP). Сопоставим каждой вершине разбиения (V_1, V_2) графа G булеву переменную x_i. Если $i \in V_1$, то $x_i = 0$, в противном случае $x_i = 1$, $i \in V_2$. Тогда задача принимает вид: найти

$$\max_{x_i \in \{0,1\}} \left\{ f(x) = \sum_{(i,\, j)\in E} w_{ij} (x_i - x_j)^2 \right\} . \qquad (1)$$

Однако сведение исходной задачи к модели (1) и применение к ней известных алгоритмов [11, 12] не было бы столь эффективным. Поэтому для задачи о максимальном разрезе графа были разработаны, как отмечалось выше, специальные алгоритмы ГРП, дальнейшему развитию которых и посвящена настоящая работа.

Ключевыми моментами метода ГРП являются генерация решения и поиск локального максимума в окрестности этого решения. Рассмотрим особенности применения этого метода на первом этапе.

Предположим, что

$$S_j^1 = \{x \in S | x_j = 1\}, \; S_j^0 = \{x \in S | x_j = 0\}, \; j = 1, \ldots, n,$$

где S — подмножество множества допустимых решений задачи (1), найденных методом ГРП. Поскольку «температурный» цикл является основным в структуре метода ГРП, то для него следует задать такие параметры: K — число выполнений температурного цикла; $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_K)$, $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_K$, — вектор температурных параметров, индексы компонентов которого отвечают номерам температурного цикла. Вектор μ дает возможность управлять близостью генерируемого начального решения к лучшему решению $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ из множества S, так как это решение получается случайным изменением компонентов вектора $\tilde{x}$ по такому правилу: если $\tilde{x}_j = 0$, то этот компонент изменяется с вероятностью $p_j(\mu_k)$, в противном случае — с вероятностью $1 - p_j(\mu_k)$.

Вероятности $p_j(\mu_k)$ генерирования начальных решений вычисляются, исходя из понятий, заимствованных из метода отжига [13], и зависят от текущей температуры μ_k и найденного ранее подмножества S множества допустимых решений. Они рассчитываются для $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$ по одной из формул:

$$p_j(\mu_k) = \frac{1}{1 + \dfrac{1 - p_j(\mu_0)}{p_j(\mu_0)} \exp\left\{ \dfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (\mu_{i+1} - \mu_i)(E_{ij}^0 + E_{i+1j}^0 - E_{ij}^1 - E_{i+1j}^1) \right\}},$$

где

$$E_{kj}^u = \begin{cases} 0, \text{ если } S_j^u = \varnothing, \; u \in \{0,1\}, \\ \dfrac{\sum_{x \in S_j^u} f(x) \exp\{\mu_k (f(x) - f(\tilde{x}))\}}{\sum_{x \in S_j^u} \exp\{\mu_k (f(x) - f(\tilde{x}))\}}, \text{ если } S_j^u \neq \varnothing, \end{cases}$$

или

$$p_j(\mu_k) = \frac{\sum_{x \in S_j^1} \exp(-\mu_k f(x))}{\sum_{x \in S} \exp(-\mu_k f(x))},$$

или

$$p_j(\mu_k) = \frac{1}{1 + \dfrac{1 - p_j(\mu_0)}{p_j(\mu_0)} \exp\{(\mu_k - \mu_0)\}(f_j^0 - f_j^1)}, \tag{2}$$

где $f_j^u = \max_{x \in S_j^u} f(x)$, $u \in \{0,1\}$.

В рассматриваемой модификации алгоритма ГРП компоненты вектора вероятности рассчитываются по формуле (2).

Значения μ_k, $k = 0, \ldots, K$, определяющие кривую отжига, обычно вычисляются по формулам $\mu_0 = 0$, $\mu_{k+1} = \alpha\mu_k$, $k = 1, \ldots, K-1$. Величины μ_1 и $\alpha > 1$ подбираются так, чтобы вектор вероятности $p(\mu_K)$ для последнего температурного цикла был приблизительно равен рекордному решению из множества S. Кривая отжига универсальна и используется при решении всех задач. Масштабируются только коэффициенты целевой функции таким образом, чтобы значение ожидаемого рекорда равнялось заданной величине. Следует отметить, что на втором этапе метода ГРП в качестве поискового выбран алгоритм табу и учтена специфика рассматриваемой задачи.

Для сравнительного исследования эффективности разработанного и существующих алгоритмов были проведены экспериментальные расчеты по решению тестовых задач из [14] и увеличено их количество. Такие задачи обычно используются для тестовых расчетов и включают тороидальные, планарные и случайные графы. Как и в работе [6], рассматривались первые 54 задачи.

Алгоритм ГРП реализован на языке C++, все вычислительные эксперименты проводились с использованием PC с Intel® Core QUAD CPU Q9550 2.83GHz и 8.0GB оперативной памяти. Каждая задача решалась 20 раз, выделенный для нее лимит времени составлял один час. Параметры алгоритма ГРП были определены таким образом. В начале каждого температурного цикла $p_j(\mu_0) = 1/2$, $j = 1, \ldots, n$. Для температурного расписания использованы следующие значения: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 7*10^{-7}/\text{coef}$, $\mu_k = \mu_{k-1}\dfrac{\log(10/\text{coef}) - \log\mu_1}{48}$ при $k = 2, \ldots, K$, $K = 50$, $\text{coef} = 1.8*10^8 / f(x^{BKS})$, x^{BKS} — известное рекордное решение задачи.

Некоторые результаты этих исследований приведены в табл. 1. Поскольку при проведении расчетов каждая задача решалась 20 раз при двадцати различных начальных приближениях, то следует рассматривать средние величины, касающиеся целевой функции и времени решения задач. В таблице приняты следующие обозначения: BKS — известный из литературы рекорд для задачи, Best GES и BFS — лучшие результаты, полученные соответственно алгоритмами ГРП [9,10] и исследуемым алгоритмом (в скобках указано число найденных рекордов при двадцати попытках решения), Value — среднее значение целевой функции; $t_{\min}$ и $t_{\text{ср}}$ — соответственно минимальное и среднее время (в сек) нахождения рекорда, $\tilde{t}_{\text{ср}}$ — среднее время (в сек) решения одной задачи. Улучшенный с помощью алгоритма ГРП известный из литературы рекорд выделен полужирным курсивом.

Таблица 1

Задача	Число вершин графа	BKS	Best GES	BFS	Value	$t_{\min}$	$t_{\text{ср}}$	$\tilde{t}_{\text{ср}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
G1	800	11624	11624	11624(20)	11624,00	0,47	3,25	3,25
G2	800	11620	11620	11620(20)	11620,00	1,98	8,04	8,04
G3	800	11622	11622	11622(20)	11622,00	2,09	4,91	4,91
G4	800	11646		11646(20)	11646,00	0,39	7,83	7,83
G5	800	11631		11631(20)	11631,00	0,44	5,39	5,39
G6	800	2178		2178(20)	2178,00	2,89	5,76	5,76
G7	800	2003		***2006***(20)	2006,00	2,86	7,07	7,07
G8	800	2003		***2005***(20)	2005,00	4,02	12,15	12,15
G9	800	2048		***2054***(20)	2054,00	1,95	6,22	6,22
G10	800	1994		***2000***(20)	2000,00	2,19	10,84	10,84
G11	800	564	564	564(20)	564,00	0,61	0,98	0,98
G12	800	556	556	556(20)	556,00	0,78	1,53	1,53
G13	800	582	582	582(20)	582,00	0,88	1,39	1,39
G14	800	3063	***3064***	***3064***(20)	3064,00	7,58	337,00	337,00
G15	800	3050	3050	3050(20)	3050,00	2,25	16,33	16,33
G16	800	3052	3052	3052(20)	3052,00	2,22	18,91	18,91
G17	800	3043		***3047***(20)	3047,00	7,25	97,68	97,68
G18	800	988		***992***(20)	992,00	1,86	127,40	127,40

(Продолжение табл. 1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
G19	800	903		***906***(20)	906,00	1,88	17,10	17,10
G20	800	941		941(20)	941,00	1,17	1,59	1,59
G21	800	931		931(20)	931,00	1,88	6,79	6,79
G22	2000	13358	***13359***	***13359***(20)	13359,00	21,81	92,60	92,60
G23	2000	13354	13342	13342(20)	13342,00	15,53	266,42	266,42
G24	2000	13331	***13337***	***13337***(20)	13337,00	36,09	391,13	391,13
G25	2000	13326		***13340***(20)	13340,00	20,22	306,81	306,81
G26	2000	13314		***13328***(19)	13327,90	17,69	1069,62	1026,01
G27	2000	3318		***3341***(20)	3341,00	38,75	393,68	393,68
G28	2000	3285		***3298***(20)	3298,00	39,66	630,14	630,14
G29	2000	3389		***3405***(20)	3405,00	17,27	189,53	189,53
G30	2000	3403		***3413***(20)	3413,00	15,77	140,97	140,97
G31	2000	3288		***3310***(20)	3310,00	42,31	336,01	336,01
G32	2000	1402	***1410***	***1410***(20)	1410,00	5,2	46,38	46,38
G33	2000	1376	***1382***	***1382***(20)	1382,00	26,95	239,26	239,26
G34	2000	1372	***1384***	***1384***(20)	1384,00	4,91	56,65	56,65
G35	2000	7672	***7686***	***7686***(12)	7685,55	186,78	996,26	1066,24
G36	2000	7670	***7677***	***7680***(1)	7676,65	3100,63	3100,63	1242,00
G37	2000	7681	***7691***	***7691***(3)	7690,10	611,14	1803,06	1561,45
G38	2000	7681		***7687***(20)	7687,00	13,05	381,45	381,45
G39	2000	2395		***2408***(20)	2408,00	21,83	191,86	191,86
G40	2000	2387		***2400***(11)	2399,55	465,92	1738,83	1033,28
G41	2000	2398		***2405***(20)	2405,00	10,42	43,45	43,45
G42	2000	2469		***2481***(20)	2481,00	6,02	212,21	212,21
G43	1000	6660	6660	6660(20)	6660,00	7,69	18,61	18,61
G44	1000	6650	6650	6650(20)	6650,00	4,95	10,89	10,89
G45	1000	6654	6654	6654(20)	6654,00	10,02	62,29	62,29
G46	1000	6645		***6649***(20)	6649,00	6,52	27,68	27,68
G47	1000	6656		***6657***(20)	6657,00	7,55	26,52	26,52
G48	3000	6000	6000	6000(20)	6000,00	0,01	0,05	0,05
G49	3000	6000	6000	6000(20)	6000,00	0	0,16	0,16
G50	3000	5880	5880	5880(20)	5880,00	0,02	0,08	0,08
G51	1000	3846		***3848***(20)	3848,00	3,25	117,45	117,45
G52	1000	3849		***3851***(20)	3851,00	12,61	158,16	158,16
G53	1000	3846		***3850***(18)	3849,90	73,76	908,81	827,05
G54	1000	3846		***3852***(20)	3852,00	19,58	329,19	329,19
sg3dl101000	1000	896	896	896(20)	896,00	2,15	8,09	8,09
sg3dl102000	1000	900	900	900(20)	900,00	1,2	2,13	2,13
sg3dl103000	1000	892	892	892(20)	892,00	1,58	6,33	6,33
sg3dl104000	1000	898	898	898(20)	898,00	1,59	7,96	7,96
sg3dl105000	1000	886	886	886(20)	886,00	2,17	27,99	27,99
sg3dl106000	1000	888	888	888(20)	888,00	1,34	2,04	2,04
sg3dl107000	1000	900	900	900(20)	900,00	1,92	68,04	68,04
sg3dl108000	1000	882	882	882(20)	882,00	2,04	15,10	15,10
sg3dl109000	1000	902	902	902(20)	902,00	1,72	7,84	7,84
sg3dl1010000	1000	894	894	894(20)	894,00	1,25	3,07	3,07
sg3dl141000	2744	2446	2446	2446(19)	2445,90	16,74	577,25	573,96
sg3dl142000	2744	2458	2458	2458(20)	2458,00	9,95	93,52	93,52
sg3dl143000	2744	2442	2442	2442(20)	2442,00	149,01	1125,69	1125,69
sg3dl144000	2744	2450	2450	2450(15)	2449,50	43,58	1135,02	998,35
sg3dl145000	2744	2446	2446	2446(20)	2446,00	8,94	104,75	104,75
sg3dl146000	2744	2450	2450	***2452***(15)	2451,50	54,98	1372,25	1069,78
sg3dl147000	2744	2444	2444	2444(20)	2444,00	14,54	354,47	354,47
sg3dl148000	2744	2446	***2448***	***2448***(15)	2447,50	15,51	1186,50	986,67
sg3dl149000	2744	2424	***2426***	***2426***(20)	2426,00	9,66	208,53	208,53
sg3dl1410000	2744	2458	2458	2458(19)	2457,90	12,56	1109,46	1060,13

На основании анализа результатов экспериментальных расчетов можно сделать вывод о высокой эффективности и конкурентоспособности метода ГРП при решении этого класса задач. С его помощью улучшены рекорды для 37 задач, для остальных — найдены известные рекорды. По быстродействию метод ГРП также превосходит известные методы. Таким образом, на сегодняшний день он, бесспорно, является лучшим методом решения задач о максимальном разрезе графа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poljak S., Tuza Z. Maximum cuts and large bipartite subgraphs // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 1995. — **20.** — P. 181–244.
2. Burer S., Monteiro R.D.C., Zhang Y. Rank-two relaxation heuristics for MAX-CUT and other binary quadratic programs // SIAM J. on Optimization. — 2002. — **12.** — P. 503–521.
3. Festa P., Pardalos P.M., Resende M.G.C., Ribeiro C.C. Randomized heuristics for the maxcut problem // Optimization Methods and Software. — 2002. — **17.** — P. 1033 — 1058.
4. Goemans M.X., Williamson D.P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming // J. of ACM. — 1995. — **42.** — P. 1115–1145.
5. Palubeckis G., Krivickiene V. Application of multistart tabu search to the MAX-CUT problem // Information Technology and Control. — Kaunas: Technologija. — 2004. — **2(31).** — P. 29–35.
6. Marti R., Duarte A., Laguna M. Advanced scatter search for the MAX-CUT problem // INFORMS J. on Computing. — 2009. — **21**, N 1. — P. 26–38.
7. Шило В.П. Метод глобального равновесного поиска // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 1. — С. 74–81.
8. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 264 с.
9. Шило В.П., Шило О.В. Решение задачи о максимальном разрезе графа методом глобального равновесного поиска // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 68–79.
10. Shylo V.P., Shylo O.V. Path relinking scheme for the MAX-CUT problem within global equilibrium search // International Journal of Swarm Intelligence Research (IJSIR) — 2011. — **2**, N 2. — P. 42–51.
11. Pardalos P., Prokopyev O., Shylo O., Shylo V. Global equilibrium search applied to the unconstrained binary quadratic optimization problem // Optimization Methods and Software. — 2008. — **23.** — P. 129–140.
12. Шило В.П., Шило О.В. Решение задачи булева квадратичного программирования без ограничений методом глобального равновесного поиска // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 68–78.
13. Kirkpatrick S., Gelatti C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing // Science. — 1983. — **220.** — P. 671–680.
14. Helmberg C., Rendl F. A spectral bundle method for semidefinite programming // SIAM J. on Optimization. — 2000. — **10.** — P. 673–696.

Поступила 05.10.2011