



Ключевые слова: *линейная модель, принятие решения, типы данных, точность решения, базисная матрица.*

ВВЕДЕНИЕ

Большинство исследуемых физических процессов на определенном этапе моделирования описываются в классе линейных моделей, в частности в виде системы плохо обусловленных линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей ограничений [1, 2].

Малые неточности (и нечеткости [3]) представления такой математической модели могут существенно повлиять на количественные и качественные характеристики получаемого решения при использовании конкретного метода (алгоритма) [1, 2]. Неточности часто обусловлены ограниченностью длины мантииссы при представлении чисел с плавающей запятой (ошибки усечения, округления), и, несмотря на наличие ЭВМ с эффективной организацией операции округления, полностью избежать их или улучшить известные теоретические оценки не удается [1]. Однако выбором конкретных типов данных с плавающей запятой можно достичь разной эффективности по точности получаемого решения, быстродействию и объемам вычислений.

В связи с этим возникает необходимость привлечения при моделировании лица, принимающего решение (ЛПР), ответственного за правильную организацию вычислительного процесса путем оптимального выбора методов и алгоритмов решения, типов данных, указания механизма (процедуры) устранения неопределенностей при выборе приоритетов по критериям (точности решения, быстродействию, объемам памяти, стоимости) для достижения приемлемого уровня их значений [3]. Такой подход замедляет исследования, но в то же время открывает новые возможности при построении алгоритмов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная модель — СЛАУ вида [4–6]

$$Au = C, \tag{1}$$

где $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,m \\ j=1,m}}$ — квадратная матрица размера $(m \times m)$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots$

$\dots, a_{jm}), j \in J = I = \{1, 2, \dots, m\}$, — строки матрицы A , $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ — вектор переменных, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ — вектор ограничений, $a_j u \leq c_j, j \in J$, — полупространство, определенное гиперплоскостью $a_j u = c_j, j \in J$. Модель (1) рассматривается в пространстве E^m .

Целью исследований являются:

— анализ влияния использования различных типов данных и алгоритмов при построении вычислительной схемы на основные параметры решения — точность самого решения и обращения матрицы, быстродействие в зависимости от числа обусловленности системы;

— проверка эффективности вычислительных схем метода базисных матриц (МБМ) [4] по указанным критериям на моделях заданной размерности;

— построение концепции принятия решения по достижении заданной эффективности вычислительного процесса.

Концепция построения системы поддержки принятия решения состоит из четырех стадий.

1. Анализ типовой модели заданной размерности на разрешимость (существование, единственность решений СЛАУ), исследование свойств модели на основе базисного метода и алгоритма.

2. Проведение расчетов на основе вычислительных алгоритмов (без процедуры уточнения, с одно- или двухстадийной процедурой уточнения в каждом из них) при использовании различных типов данных (с плавающей запятой размерностью 64, 128, 256 бит) для СЛАУ с разными значениями числа обусловленности. Фиксирование значения параметров быстродействия, точности решения и обращения матрицы, оценки объема используемой памяти.

3. Построение функциональных зависимостей (интерполяционных многочленов) быстродействия, точности решения и обращения матрицы от используемых типов данных, алгоритмов, числа обусловленности системы.

4. Построение на основе интерполяционных многочленов функций принадлежности, описывающих нечеткие множества параметров модели, для которых при фиксированных параметрах алгоритмов достигаются желаемые значения основных критериев на найденном решении; формирование на их основе механизма выбора приемлемых значений параметров вычислительной схемы.

В МБМ рассматривают строчные базисные матрицы. Они последовательно изменяются замещением строк вспомогательной СЛАУ строками (нормальями ограничений) основной СЛАУ. В общем случае в модели число ограничений превышает число переменных вида (1), в данном случае $m = n$ (для анализа рассматривается вспомогательная СЛАУ с известными свойствами соответствующей размерности) [4–6].

Определение 1. Квадратную матрицу $A_{\bar{b}}$, составленную из m линейно независимых нормалей ограничений, и решение соответствующей ей системы уравнений $A_{\bar{b}} u = c^0$ назовем базисными. Две базисные матрицы, отличающиеся одной строкой, назовем смежными.

Установлены формулы связи базисного решения, коэффициентов разложения нормалей ограничений и целевой функции, коэффициентов обратной матрицы, невязок ограничений и значений целевой функции при переходе к базисной матрице $A_{\bar{b}}$ (смежной), которая образуется из матрицы $A_{\bar{b}}$ заменой ее строки a_k на a_l , не входящую в базисную матрицу $A_{\bar{b}}$ [5]. При нахождении формул и основных соотношений между элементами метода при переходе от одной базисной матрицы к следующей считаем $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ нормальями ограничений,

$a_j u^T \leq c_j, j \in J_\delta, J_\delta = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ — индексами ограничений, нормали которых образуют строки базисной матрицы A_δ , a_l — нормалью ограничения $a_l u \leq c_l, \alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots, \alpha_{lm})$ — коэффициентами разложения вектора a_l по строкам матрицы A_δ .

Теорема 1. Между элементами МБМ в смежных базисных матрицах имеют место следующие соотношения [6]:

$$\bar{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \bar{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, r = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}, i \neq k, \quad (2)$$

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, r = \overline{1, m}, i = \overline{1, m}, i \neq k, \quad (3)$$

$$\bar{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$\bar{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \bar{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, r = \overline{1, n}, r \neq k, \quad (5)$$

причем условием невырожденности является условие $\alpha_{lk} \neq 0$; здесь e_{ri} — элементы матрицы A_δ^{-1} , обратной к A_δ , $e_k = (A_\delta^{-1})_k$ — столбец обратной матрицы, $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ — невязка r -го ограничения в вершине u_0 .

На основе (2)–(5) построена вычислительная схема МБМ [6].

ПРОЦЕДУРА УТОЧНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Пусть в результате проведения основных итераций найдено решение: $\bar{u}_0 = (\bar{u}_{01}, \bar{u}_{02}, \dots, \bar{u}_{0m})$, $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \dots, \bar{\Delta}_m)$, \bar{A}_δ^{-1} , где $A \bar{u}_0 - C = \bar{\Delta}$ — невязки ограничений, причем $\exists i \in I, \Delta_i \neq 0$. Решение можно интерпретировать как нахождение точного решения некоторой возмущенной (усечением, округлением вычислений) СЛАУ $\bar{A}_\delta u = \bar{C}_\delta$ с матрицей \bar{A}_δ , обладающей свойством $\bar{A}_\delta \times \bar{A}_\delta^{-1} = E, \bar{C}_\delta = \bar{A}_\delta \bar{u}_0$. Проводим преобразования строк матрицы (векторов-нормалей), вектора-столбца ограничений (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ в } A_\delta = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} \text{ в } C_\delta = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \dots \\ \tilde{c}_m \end{pmatrix},$$

векторов-невязок $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \dots, \bar{\Delta}_m)$ в $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m), \Delta_i < 0, i \in I$, а именно, если для невязки i -го ограничения (1) выполнено условие $\bar{\Delta}_i > 0$, то проводим преобразования $\tilde{a}_i = -a_i, \tilde{c}_i = -c_i, \Delta_i = -\bar{\Delta}_i$, в других случаях компоненты оставляем без изменений.

Рассмотрим вектор $\tilde{u} = -\Delta \times A_\delta$ и задачу линейного программирования

$$f = \max \tilde{u} u, \quad (6)$$

$$A_\delta u \leq C_\delta, \quad (7)$$

$$\bar{A}_\delta u \leq \bar{C}_\delta. \quad (8)$$

Отметим, что оптимизационная задача разрешима по построению, поскольку для $\bar{u}_0 = (\bar{u}_{01}, \bar{u}_{02}, \dots, \bar{u}_{0m})$ имеем $\Delta_i \leq 0, i \in I$. Для задачи справедливы следующие утверждение и теорема.

Утверждение 1. При невырожденности матрицы $A_{\bar{c}}$ общее решение (7) — конус K_{u_0} , в котором образующими являются столбцы матрицы $A_{\bar{c}}^{-1}$, острием $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m})$ — решения соответствующей точной СЛАУ. Целевая функция (6) достигает на острие конуса максимального значения [7].

Нетрудно убедиться, что для решения $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m})$ задачи (6), (7) выполняется условие

$$\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0m}) = -\tilde{u} A_{\bar{c}}^{-1} = -\Delta \times A_{\bar{c}} \times A_{\bar{c}}^{-1} = -\Delta \geq 0,$$

которое является условием оптимальности для допустимой схемы МБМ.

Теорема 2. Если $u_0 \in K_{\bar{u}_0}$ — решение (8), то оно оптимальное для задачи (6)–(8) и точное для СЛАУ (1) [7]. Если $u_0 \notin K_{\bar{u}_0}$ не является решением (8), то оно оптимальное для (6)–(8) и определяет промежуточное решение (1), — уточнение решения \tilde{u}_0 .

В основе процедуры уточнения заложено проведение нескольких итераций МБМ при более точном представлении элементов модели (ограничений задачи).

Выбор типа данных (чисел с плавающей запятой) предопределяет начальный уровень ошибок усечения при машинном представлении в виде $\bar{A}u = \bar{C}$ математической модели $Au = C$, для которой \bar{u}_0 — решение, $\|\Delta A\| = \|\bar{A} - A\| \leq \varepsilon_A$,

$$\|\Delta C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Delta c_i)^2} = C_B \leq \varepsilon_B \text{ — абсолютные погрешности, обусловленные усечением мантиссы.}$$

При дальнейших вычислениях в МБМ погрешности возникают при пересчете столбцов обратной матрицы, невязок ограничений, векторов разложений нормалей по строкам базисной матрицы. В частности, для точно заданных ограничений (7) погрешность вычисления невязки имеет вид

$$\Delta_l = a_l \bar{u}_0^T - c_l = a_l \bar{u}_0^T + \Delta c_l - \bar{c}_l = \Delta c_l,$$

поскольку $\bar{c}_l = c_l + \Delta c_l$, а $a_l \bar{u}_0^T - \bar{c}_l = 0$ — невязка решения системы уравнений при неточно заданных данных. Отсюда вытекает, что для погрешности вычисления невязки при точно заданных компонентах ограничения математической модели (7) выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_l &= a_l \bar{u}_0^T - c_l = (\bar{a}_l - \Delta a_l) \bar{u}_0^T - (\bar{c}_l - \Delta c_l) = \\ &= \bar{a}_l \bar{u}_0^T - \bar{c}_l - \Delta a_l \bar{u}_0^T + \Delta c_l = -\Delta a_l \bar{u}_0^T + \Delta c_l \quad (\bar{a}_l \bar{u}_0^T - \bar{c}_l = 0). \end{aligned}$$

В общем случае исследование влияния усечений мантиссы в ходе итераций уточнения на решение задачи — отдельная тема исследования. Согласно формулам связи смежных решений в МБМ (2)–(5) можно в общем виде отобразить связь решений на первой и последней (m -й) итерации. Итерации по замещению строк неточно заданной матрицы \bar{A} (погрешности усечения мантиссы) строками точной матрицы A проводим в предположении, что известны все элементы метода (2)–(5) при решении задачи с неточно заданными элементами модели (8).

Пусть u_0 — решение точно заданной задачи (7), тогда m итераций перехода от возмущенной усечением длины мантиссы модели (8) к точной модели можно

записать согласно (4) в виде

$$\bar{u}_0 - u_0^{(1)} = \frac{e_{k^{(1)}}}{\alpha_{l^{(1)}k^{(1)}}} \Delta_{l^{(1)}},$$

$$\bar{u}_0^{(1)} - u_0^{(2)} = \frac{e_{k^{(2)}}}{\alpha_{l^{(2)}k^{(2)}}} \Delta_{l^{(2)}}, \dots, u_0^{(m-1)} - u_0^{(m)} = \frac{e_{k^{(m)}}}{\alpha_{l^{(m)}k^{(m)}}} \Delta_{l^{(m)}}.$$

Отметим, что

$$\alpha_{l^{(r)}k^{(r)}} = a_{l^{(r)}} \times e_{k^{(r)}} = (\bar{a}_{l^{(r)}} - \Delta a_{l^{(r)}}) \times e_{k^{(r)}} = \bar{\alpha}_{l^{(r)}k^{(r)}} - \Delta \alpha_{l^{(r)}k^{(r)}}, \quad r = \overline{1, m}.$$

Просуммируем все левые и правые составляющие соотношений и получим

$$\bar{u}_0 - u_0^{(m)} = \sum_{i=1}^m \frac{e_{k^{(i)}}}{\alpha_{l^{(i)}k^{(i)}}} \Delta_{l^{(i)}}, \quad \left| \bar{u}_0 - u_0^{(m)} \right| = \left| \sum_{i=1}^m \frac{e_{k^{(i)}}}{\alpha_{l^{(i)}k^{(i)}}} \Delta_{l^{(i)}} \right|,$$

$$\left| \bar{u}_0 - u_0^{(m)} \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{e_{k^{(i)}}}{\alpha_{l^{(i)}k^{(i)}}} \Delta_{l^{(i)}} \right|.$$

В идеальном случае (при точных вычислениях) $u_0^{(m)} = u_0$ — решение системы с точно заданными элементами. В алгоритме уточнения из-за трудоемкости итераций проводится только две стадии уточнения, поэтому $r = 1, r_0, r_0 = 2$. В данном случае $u_0^{(2)} \neq u_0$.

Целью вычислительного эксперимента является исследование реальных оценок «близости» решений и обратных матриц машинной, возмущенной системы (8) и математической (7) для плохо обусловленных систем.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для вычислительного эксперимента выбраны три процедуры МБМ: без уточнения решения (0), с одностадийным (1) и двухстадийным (2) уточнением.

Возможность применения разных типов данных (чисел с плавающей запятой двойной точности (double), 128-битовых чисел (dd) и 256-битовых чисел (qd)) при различных модификациях алгоритмов МБМ позволяет построить систему поддержки принятия решений, которая на основе заданных пользователем ограничений на такие параметры алгоритмов, как быстродействие и точность, помогает выбрать наилучший по этим критериям алгоритм. Выбор базируется на эвристических зависимостях параметров алгоритма и значений критериев от параметров матрицы ограничений СЛАУ: размерности и числа обусловленности.

Быстродействие алгоритмов зависит только от размерности матрицы n и некоторого параметра быстродействия системы для заданного типа данных и может быть оценено [7] как

$$T(r, k_t, n) = (3n^3 + n^2) r k_t t_c, \quad (9)$$

где r — количество итераций уточнения, k_t — коэффициент, зависящий от выбранного типа данных, t_c — параметр быстродействия системы, который должен оцениваться для каждой конкретной аппаратно-программной платформы экспериментальным путем.

Отметим, что на одной и той же вычислительной платформе отношение быстродействия алгоритмов, использующих разные типы данных, постоянно.

Данные вычислительных экспериментов показали, что на выбранной для тестирования платформе алгоритм, использующий 128-битовые числа, в ~35 раз медленнее, чем алгоритм, использующий 64-битовые числа, а в случае 256-битовых чисел — в ~450 раз медленнее. Существенное замедление объясняется тем, что операции с числами с плавающей запятой большого размера не реализованы аппаратно, в отличие от операций над 64-битовыми числами.

Что касается объема используемой алгоритмами памяти, то он пропорционален размеру применяемого типа данных и по сравнению с 64-битовыми числами вдвое больше для 128-битовых и вчетверо больше для 256-битовых чисел.

Для построения эвристических зависимостей между точностью решения и числом обусловленности матрицы ограничений проведена серия вычислительных экспериментов; для тестирования использована аппаратная платформа — процессор AMD Athlon64 с реальной тактовой частотой 1,8 Ghz, 512 Mb оперативной памяти.

С помощью разных алгоритмов МБМ проводилось решение СЛАУ с матрицей ограничений вида

$$A_T(\alpha, n) = (a_{T0}, \dots, a_{T, n-1}) = \begin{cases} a_i = (\text{rnd}(1, 0), \dots, \text{rnd}(1, 0)), & i = 0, \\ a_i = a_{i-1} + \frac{\alpha}{n} (\text{rnd}(1, 0), \dots, \text{rnd}(1, 0)), & i > 0, \end{cases}$$

где $\text{rnd}(1, 0)$ — случайное число в диапазоне $[0, 1]$, α — параметр.

В качестве критериев точности выбирались точность обращения матрицы $\varepsilon_1 = \|E - A_T^{-1} A_T\|$ и точность машинного решения u_0 в сравнении с аналитическим (точным) решением $u = (1, 0, \dots, 0)$ системы $A_T(\alpha, n)u = a_{T0}$: $\varepsilon_2 = \|u_0 - (1, 0, \dots, 0)\|$. Полученные экспериментальные данные зависимости порядка точности решения $\log_{10} \varepsilon_1$ (табл. 1) и $\log_{10} \varepsilon_2$ (табл. 2) от порядка $c' = \log_{10} c$ числа обусловленности c для СЛАУ размера 256×256 при вариации параметра $\alpha = \{10^{-i}, i = 0 \dots 7\}$ приведены в табл. 1, 2. Из них следует, что каждый из алгоритмов дает решения, приближенные к точному, только в определенном диапазоне значений числа обусловленности, которое зависит от значения параметра α и размерности n . Когда c выходит за пределы этого диапазона, СЛАУ вычислительно неразрешима с помощью алгоритма. В пределах диапазона его применения зависимость погрешности решения $\log_{10} E_{i2}(c) = a_2 \log_{10} c + b_2$ и погрешности обращения $\log_{10} E_{i1}(c) = a_1 \log_{10} c + b_1$ от числа обусловленности c линейна для всех рассматриваемых алгоритмов. Эти зависимости, построенные на основе данных из табл. 1, 2, приведены в табл. 3.

Средняя относительная погрешность аппроксимации полученных экспериментальных данных приведенными в табл. 3 линейными зависимостями составляет $E_a = 12,82\%$.

Зависимости для матриц большого размера при использовании для вычислений чисел с плавающей запятой двойной точности без процедуры уточнения решения приведены на рис. 1.

Учитывая неточности аппроксимации, применяя аппарат нечетких множеств. Для алгоритма без процедуры уточнения с использованием чисел с плавающей запятой двойной точности построим функции принадлежности $\mu_\varepsilon(c)$ нечеткого множества S_ε , описывающего диапазон значений числа обусловленности матрицы, в рамках которого алгоритм позволяет обратиться к ней с погрешностью, меньшей ε . Используем функции γ -класса вида

$$\mu_\varepsilon(c) = \begin{cases} 1, & \log_{10}(c) \leq a, \\ \frac{\log_{10}(c) - a}{b - a}, & a < \log_{10}(c) < b, \\ 0, & \log_{10}(c) \geq b, \end{cases}$$

где $a = \log_{10} E_1(c)(1 - E_a)$, $b = \log_{10} E_1(c)(1 + E_a)$.

Таблица 1

Тип данных	Значения порядка $\log_{10}\varepsilon_1$ точности обращения матрицы							
	$c'=6$	$c'=7$	$c'=8$	$c'=9$	$c'=10$	$c'=11$	$c'=12$	$c'=13$
Без уточнения решения (0)								
double	-17,70	-16,82	-14,54	-13,07	-9,87	-8,95	-7,10	-
dd	-49,96	-47,71	-46,16	-43,81	-43,16	-40,95	-38,16	-35,42
qd	-115,70	-113,03	-111,33	-109,47	-106,46	-104,84	-103,51	-100,48
Одностадийное уточнение (1)								
double	-19,02	-17,63	-15,83	-13,92	-8,27	-9,57	-6,33	-5,31
dd	-51,31	-48,97	-47,99	-44,48	-43,85	-41,86	-39,33	-38,69
qd	-117,04	-114,58	-113,83	-110,06	-109,04	-106,80	-105,47	-102,29
Двухстадийное уточнение (2)								
double	-16,83	-15,77	-15,76	-14,06	-5,89	-9,37	-5,93	-3,22
dd	-51,21	-49,90	-47,41	-45,21	-44,03	-41,83	-39,70	-38,16
qd	-112,25	-114,94	-113,79	-111,73	-108,24	-105,84	-104,93	-103,90

Таблица 2

Тип данных	Значения порядка $\log_{10}\varepsilon_2$ точности обращения матрицы							
	$c'=6$	$c'=7$	$c'=8$	$c'=9$	$c'=10$	$c'=11$	$c'=12$	$c'=13$
Без уточнения решения (0)								
double	-15,81	-12,29	-8,89	-2,75	—	—	—	—
dd	-46,16	-42,45	-39,07	-34,66	-32,50	-27,71	-22,33	-19,33
qd	-113,35	-107,94	-104,76	-100,43	-96,25	-93,69	-86,65	-85,01
Одностадийное уточнение (1)								
double	-12,40	-10,55	-5,37	-2,70	—	—	—	—
dd	-45,92	-43,43	-36,86	-31,96	-29,12	-26,33	-22,43	-17,85
qd	-109,58	-108,57	-103,25	-95,93	-93,22	-91,00	-87,99	-80,48
Двухстадийное уточнение (2)								
double	-10,85	-8,55	-6,75	-2,27	—	—	—	—
dd	-44,41	-42,15	-36,89	-32,16	-31,15	-26,44	-21,90	-20,09
qd	-101,21	-106,73	-107,70	-100,30	-93,89	-87,59	-86,52	-85,47

Таблица 3

Тип данных	Коэффициенты линейных зависимостей погрешностей обращения и решения от числа обусловленности			
	Погрешность обращения		Погрешность решения	
	a_1	b_1	a_2	b_2
Без уточнения решения (0)				
double	1,865153313	-29,36537107	4,258354553	-41,86956112
dd	1,974182859	-61,9194977	3,864484517	-69,73821448
qd	2,102656573	-128,0761631	4,073970968	-137,211165
Одностадийное уточнение (1)				
double	2,105514128	-31,98730753	3,425781752	-33,44848644
dd	1,852254459	-62,15728219	3,999825781	-69,7368067
qd	2,034889435	-129,2207636	4,119734763	-135,389386
Двухстадийное уточнение (2)				
double	2,044693792	-30,27927967	2,752232112	-27,7475894
dd	1,908559212	-62,81293711	3,617024826	-66,25970185
qd	1,616110048	-124,8042105	3,309921227	-127,6200968

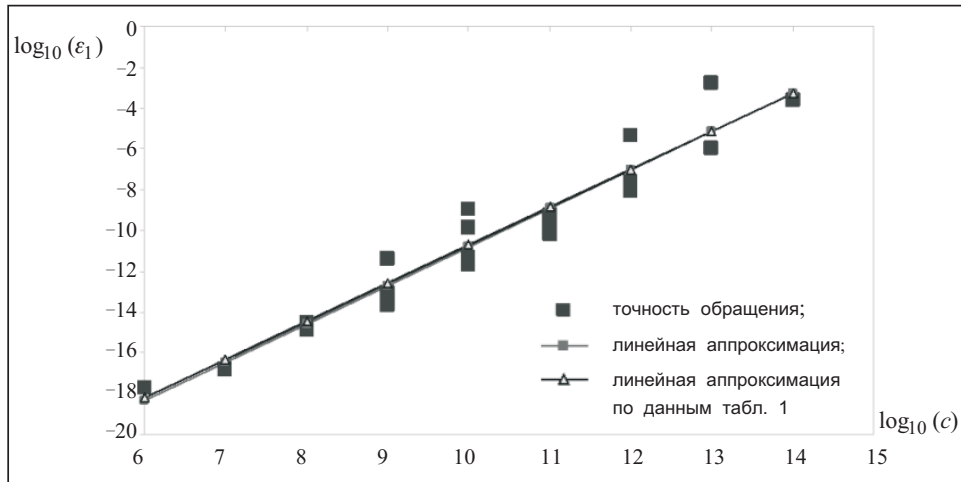


Рис. 1. График зависимости порядка точности обращения матрицы $\log_{10}\epsilon_1$ от порядка $\log_{10}(c)$ числа обусловленности

В графическом виде функции $\mu_\epsilon(c)$ представлены на рис. 2.

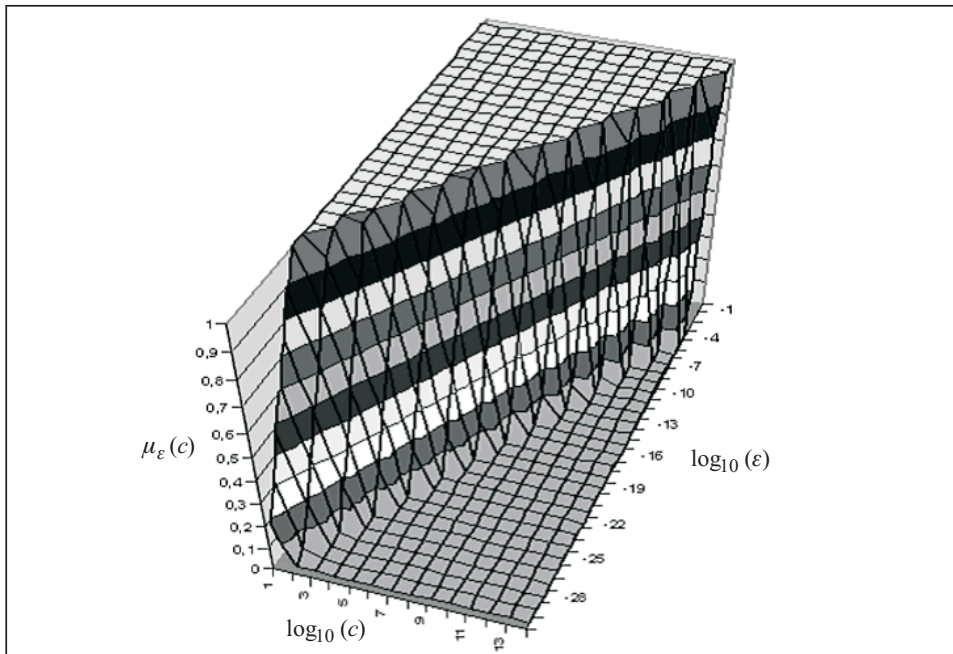


Рис. 2. Функции принадлежности $\mu_\epsilon(c)$

Для проверки полученных зависимостей проведены вычислительные эксперименты по решению методом функций Грина краевой задачи для стационарного эллиптического уравнения

$$D \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

с краевыми условиями

$$(x, y, z) \in \Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$H|_{\Gamma_1} = 1, \quad \frac{\partial H}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, \quad \Gamma_2 = \Gamma(\Omega) - \Gamma_1,$$

где $\Gamma(\Omega)$ — граница области Ω , D — коэффициент конвективной диффузии.

Полученные и ожидаемые значения точности обращения матриц ограниченных, возникающих при решении описанной задачи СЛАУ, обусловленность которых существенно зависит от D , приведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициент, D	Размерность матрицы, n	Число обусловленности, c	Точность обращения, ε_1	Ожидаемая точность обращения, $E_1(c)$
(1,1,1)	(125, 125)	$2,27 \cdot 10^{10}$	$7,27 \cdot 10^{-11}$	$7,57 \cdot 10^{-11}$
(1,0,1,1)	(125, 125)	$7,42 \cdot 10^{12}$	$3,98 \cdot 10^{-5}$	$4,20 \cdot 10^{-6}$
(1,1,1)	(729, 729)	$1,55 \cdot 10^{13}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$
(1,0,1,1)	(729, 729)	$7,30 \cdot 10^{15}$	5,16	1,81

Вычислительный эксперимент установил:

— близкие к линейным зависимости точности решения (и обращения матрицы) от числа обусловленности (при фиксированном типе данных и алгоритме); точности решения от типа данных (при фиксированном числе обусловленности и алгоритме);

— близкие к полиномиальным зависимости времени работы алгоритмов от размерности задачи (при фиксированных типах данных, числе обусловленности и размерности модели).

Учитывая полученные зависимости, алгоритм работы системы поддержки принятия решений можно описать следующим образом.

Входные данные: t_m — максимально допустимое время расчетов; ε_m — максимально допустимая погрешность решения; p — приоритетность критериев (времени и погрешности).

Алгоритм

1. Строится множество алгоритмов, удовлетворяющих условию относительно времени расчетов: $A_i = \{A_i : T_i(n) < t_m\}$, где $T_i(n)$ — время работы алгоритма A_i , $i = 1, 6$, которое оценивается по формуле (9).

2. Строится множество алгоритмов, удовлетворяющих условию относительно погрешности: $A_\varepsilon = \{A_i : c \in S_{i\varepsilon_m}\}$, где $S_{i\varepsilon_m}$ — нечеткое множество, описывающее диапазон значений числа обусловленности c , в рамках которого алгоритм A_i , $i = 1, 6$, позволяет обратить матрицу (или решить СЛАУ) с погрешностью, меньшей ε_m .

3. Если $A_t \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$, в зависимости от приоритетности p выбирается самый быстрый (или самый точный) алгоритм из множества приемлемых значений критериев $A_t \cap A_\varepsilon$.

4. В случае, когда $A_t \cap A_\varepsilon = \emptyset$, $A_t \neq \emptyset$ ($A_\varepsilon \neq \emptyset$), в зависимости от приоритетности p выбирается самый быстрый алгоритм из A_ε (или самый точный алгоритм из A_t).

5. Если $A_t = \emptyset$ или $A_\varepsilon = \emptyset$, в зависимости от приоритетности p выбирается самый быстрый или самый точный алгоритм из $A_t \cup A_\varepsilon$ (лучший из неприемлемых).

Выбор в пп. 3–5 может осуществляться как автоматически, так и ЛПП, исходя из специфики решаемой задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная концепция принятия решения на основе МБМ обладает следующими возможностями:

- анализ и нахождение решения (уточнение при необходимости) линейных систем уравнений за фиксированное время с заданной точностью по системе критериев;
- использование решения исходной задачи для типовых моделей (при разных вариантах организации вычислительного процесса) для анализа и построения механизма принятия решений;
- построение экстраполяционных зависимостей точности решений и быстродействия алгоритмов от размерности при фиксированном значении числа обусловленности и типе данных.

В дальнейшем планируется выполнение исследований по построению «оценителя» числа обусловленности в ходе вычислительного процесса на основе МБМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. наук, 1979. — 303 с.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение. — М.: Мир, 2001. — 430 с.
3. Орловский С.А. Принятие решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 206 с.
4. Кудин В.И., Ляшко С.И., Хритonenко Н.М., Яценко Ю.П. Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисных матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 119–127.
5. Кудин В.И., Кудин Г.И., Волошин А.Ф. Анализ свойств модели Леонтьева при нечетко заданных параметрах с применением метода базисных матриц // Inform. Sci. & Comput., Intern. Book. — Sofia: ITNEA, 2008. — Ser. 7, N 7. — P. 86–90.
6. Кудин В.И., Ляшко С.И., Яценко Ю.П., Хритonenко Н.В. Метод штучних базисних матриць // Доп. НАН України. — 2007. — 9. — С. 30–34.
7. Богаенко В.О., Кудин В.И., Скопецкий В.В. Анализ вычислительных схем моделирования процессов геогидродинамики // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 8. — С. 1–12.

Поступила 16.06.2010