УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ С УСЛОВИЕМ ПОСТОЯНСТВА СУММЫ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗМЕЩЕНИЯ

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, размещения, метод ветвей и границ.*

Комбинаторная оптимизация в своем развитии [1–4] создает аппарат для моделирования и решения все более широкого класса задач. При решении задач комбинаторной оптимизации игрового типа [5–7] на размещениях итерационным методом возникает задача минимизации линейной функции на множестве размещений, когда сумма элементов размещений — постоянная величина. В задачах из работы [7] этой суммой является единица, содержательная интерпретация которой — сумма вероятностей в полной группе событий.

Задачи на размещениях с линейными целевыми функциями рассматривались в [3], но специфика ограничения побуждает искать более эффективные методы за счет учета присутствующих свойств задачи.

Рассмотрим линейную условную полностью комбинаторную задачу евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях [2]

$$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j \to \min; \tag{1}$$

$$y = (y_1, \dots, y_k) \in E_{\eta\nu}^k (G^y); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = C, \tag{3}$$

где $c_j \in R^1 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} = J_k$, $C = \text{const} \in R^1$, $G^y = \{g_1^y, \dots, g_\eta^y\}$ — мультимножество [2], $g_t^y \in R^1 \in J_\eta$, множество $E_{\eta\nu}^k(G)$ — общее множество k-размещений [2] из η элементов мультимножества G^y, среди которых ν разных.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим задачу, которая получена из задачи (1)–(3) путем деления всех переменных y_j, $j \in J_k$, и всех элементов g_t^y, $t \in J_\eta$, на константу C. Задача (1)–(3) примет вид

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \min; \tag{4}$$

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in E_{\eta\nu}^k (G); \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1, \tag{6}$$

где $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$ — известное мультимножество, $g_j \in R^1$. Связь между эквивалентными задачами (1)–(3) и (4)–(6) устанавливают соотношения $x_j C = y_j$ $\forall j \in J_k$; $g_t C = g_t^y \ \ \forall t \in J_\eta$.

Далее изложим задачу (4)–(6), для решения которой используем методологию метода ветвей и границ (МВГ). Рассмотрим оптимизацию линейной функции на размещениях при условиях единичности суммы их элементов.

При реализации метода ветвей и границ для задачи или определенного класса задач необходимо определить: 1) способ ветвления множества допустимых решений на подмножества; 2) способ оценивания допустимых подмножеств; 3) правила отсечения бесперспективных (или пустых) подмножеств допустимых решений.

Рассмотрим способ ветвления множества допустимых решений на подмножества. Для этого упорядочим коэффициенты целевой функции согласно таких неравенств:

$$c_{\alpha_1} \ge c_{\alpha_2} \ge \ldots \ge c_{\alpha_l} \ge 0 > c_{\alpha_{l+1}} \ge \ldots \ge c_{\alpha_k}, \tag{7}$$

а элементы мультимножества G будем считать (без ограничения общности рассуждений) пронумерованными таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$g_1 \le g_2 \le \ldots \le g_k \le g_{k+1} \le \ldots \le g_\eta. \tag{8}$$

Ветвления предлагается выполнять «в глубину», последовательно определяя переменные в векторе $x \in E^k_{\eta\nu}$ в порядке номеров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l$, а затем номеров $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{l+2}, \alpha_{l+1}$, где порядок определяется условиями (7), последовательно придавая переменным с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ значения $g_1, g_2, \ldots$, а переменным с номерами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{l+1}$ — последовательно придавая значения $g_\eta, g_{\eta-1}, \ldots$ Если дальнейшее ветвление «в глубину» невозможно (множество пустое или одноэлементное), происходит возврат на предыдущий уровень дерева ветвлений с присвоением ранее определенной переменной следующего значения.

Рассмотрим способ оценивания допустимых подмножеств решений. Пусть в описанном способе ветвления при образовании подмножества Q множества допустимых решений задачи (4)–(6) уже определились переменные $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_t}$, которые без нарушения общности рассуждений пронумеруем таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$c_{\beta_1} \ge c_{\beta_2} \ge \ldots \ge c_{\beta_t}. \tag{9}$$

Переменные, которые остались неопределенными, обозначим $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\tau$, где $t + \tau = k$. Нумерацию этих неопределенных переменных осуществим так, чтобы выполнялись следующие соотношения для коэффициентов $\tilde{c}_j$ целевой функции при переменных $\tilde{x}_j \ \ \forall j \in J_\tau$:

$$\tilde{c}_1 \ge \tilde{c}_2 \ge \tilde{c}_\lambda \ge 0 > \tilde{c}_{\lambda+1} \ge \ldots \ge \tilde{c}_\tau. \tag{10}$$

Значения t переменных

$$x_{\beta_1} = g_{i_1}, \ldots, x_{\beta_t} = g_{i_t}, \tag{11}$$

которые определены согласно описанным правилам ветвления при образовании подмножества Q, объединим в мультимножество $G_B = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}\}$. Тогда значения неопределенных переменных можно выбирать из мультимножества $\tilde{G}$, которое является разностью мультимножеств G и G_B: $\tilde{G} = G - G_B = \{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_\chi\}$, где $\chi + t = \eta$. Пусть элементы мультимножества $\tilde{G}$ пронумерованы так, что

$$\tilde{g}_1 \le \tilde{g}_2 \le \ldots \le \tilde{g}_\chi. \tag{12}$$

Подставляя значения переменных $x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_t}$ в целевую функцию (4), получаем слагаемое

$$\nu = \sum_{p=1}^{t} c_{\beta_p} g_{i_p}. \tag{13}$$

Как известно, число ξ в задаче минимизации функций $F(x)$ на множестве $x \in D$ в МВГ является оценкой подмножества $D_i \subset D$, если $\xi \le F(x) \ \forall x \in D_i$.

Теорема 1. Оценкой подмножества Q множества допустимых решений задачи (4)–(6) является величина

$$\xi = \nu + c^*, \tag{14}$$

где ν вычисляется по формуле (13), а

$$c^* = \sum_{j=1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} \tag{15}$$

согласно условиям (10), (12).

Доказательство. Для произвольной точки x из подмножества Q значение целевой функции принимает вид

$$F(x) = \nu + \sum_{j=1}^{\tau} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j, \tag{16}$$

где $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_\tau) \in E^{\tau}_{\chi\theta}(\widetilde{G})$, $E^{\tau}_{\chi\theta}(\widetilde{G})$ — общее множество τ-размещений из мультимножества $\widetilde{G}$. Последнее имеет χ элементов, среди которых количество разных элементов составляет θ.

Очевидно, что $\forall x \in Q$ значение $F(x)$ не меньше минимального значения $\widetilde{c}$ правой части формулы (16), т.е. $\forall x \in Q$ с учетом, что согласно (13) $\nu = \text{const}$, имеем

$$F(x) \geq \nu + \widetilde{c}. \tag{17}$$

Найдем

$$\widetilde{c} = \min_{\widetilde{x} \in E^{\tau}_{\chi\theta}(\widetilde{G})} \sum_{j=1}^{\tau} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j, \tag{18}$$

воспользовавшись теоремой 3.1 из [2]. Получаем

$$\widetilde{c} = \sum_{j=1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}. \tag{19}$$

Из сравнения (19) и (15) следует, что $\widetilde{c} = c^*$. Отсюда с использованием неравенства (17) имеем $\xi = \nu + c^* \leq F(x)$ $\forall x \in Q$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим правила отсечения бесперспективных или пустых подмножеств (вершин дерева ветвлений). Используем стандартное правило отсечения: если для подмножества Q оценка $\xi \geq F_0 = F(x_0)$ — значение целевой функции на одноэлементном допустимом множестве x_0, т.е. некоторое допустимое решение, то подмножество Q отсекается (дальше ветвления не происходит). Аналогично если $Q = \varnothing$, то ни одна точка в Q не удовлетворяет (6).

Если $F_0 < F_1 = F(x_1)$, $\{x_1\} = Q$, т.е. $|Q| = 1$, то значение F_0 (текущий «рекорд») обновляется (заменяется значением F_1): $F_0 := F_1$. Новое значение F_0 сравнивают с оценкой ξ каждого допустимого множества Q (которое не отсечено). Если $\xi \geq F_0$, то множество Q отсекают.

Обозначим подмножество Q допустимых решений в МВГ относительно задачи (4)–(6) как

$$D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \,|\, x_{\beta_j} = g_{i_j} \; \forall j \in J_r, \; \forall r \in J_n, (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in E^r_k(J_k);$$
$$(i_1, \ldots, i_r) \in E^r_\eta(J_\eta)\},$$

где $E^r_k(J_k)$ — множество r-размещений без повторений из множества J_k (см. [2]), β_j, i_j удовлетворяют (9), (11) при условии $r = t$. Оценку ξ этого множества, определенную по формулам (13)–(15) при условиях (9), (10), (12), обозначим $\xi^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для оценок подмножеств $D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r}$ и $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_r \ldots i_{r+\chi}}$ справедливо соотношение

$$\xi^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} \le \xi^{\beta_1 \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_{r+\chi}}, \tag{20}$$

где $r+\chi \le k$ $\forall r \in J_{k-1}$, $\forall \chi \in J^0_{k-1} = J_{k-1} \cup \{0\}$, $(\beta_1, \ldots, \beta_q) \in E^q_k(J_k)$; $(i_1, \ldots, i_q) \in$ $\in E^q_\eta(J_\eta)$, $q \in \{r; r+\chi\}$; величины $i_j \in J_\eta$ и $\beta_1, \ldots, \beta_{r+\chi}$ удовлетворяют условиям (9), (11).

Доказательство. Оценка $\xi^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} = \nu_1 + \widetilde{c}_1$, где при условии $r = t$ величина ν_1 является оценкой подмножества $D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r}$ согласно (12), $\widetilde{c}_1$ — это $\widetilde{c}$ для $D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r}$ по формуле (17). Оценка $\xi^{\beta_1 \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_{r+\chi}} = \nu_2 + \widetilde{c}_2$, где ν_2 и $\widetilde{c}_2$ для подмножества $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_r \ldots i_{r+\chi}}$ — это соответственно оценка согласно (12) и $\widetilde{c}$ — оценка согласно (17). Поскольку $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_r \ldots i_{r+\chi}} \subset D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r}$, то $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu$, а $\Delta\nu + \widetilde{c}_2$ — это значения при $\tau = k - r$ линейной функции $\sum\limits_{j=1}^{\tau} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j$ из формулы (16) на некотором размещении $\widetilde{x} \in E^\tau_{\chi\theta}(\widetilde{G})$, а согласно (18) $\widetilde{c}_1 = \min\limits_{\widetilde{x} \in E^\tau_{\chi\theta}} \sum\limits_{j=1}^{\tau} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j$. Тогда из определения минимума имеем $\Delta\nu + \widetilde{c}_2 \ge \widetilde{c}_1$. Прибавив к последнему неравенству значение ν_1 в правую и левую части, получим $\xi^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} = \nu_1 + \widetilde{c}_1 \le \nu_1 + \Delta\nu + \widetilde{c}_2 = \xi^{\beta_1 \ldots \beta_{r+\chi}}_{i_1 \ldots i_{r+\chi}}$, что трабовалось доказать.

Докажем утверждение, которое выражает еще одно соотношение между оценками допустимых подмножеств. Для этого вначале введем необходимые обозначения и изложим предварительные рассуждения.

Рассмотрим соотношения между оценками допустимых подмножеств, которые являются подмножествами одного допустимого подмножества и не одно из них не является подмножеством другого (в отличие от теоремы 2).

Оценка подмножества $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}$ согласно (14) имеет вид $\xi_1 = \xi^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r \beta_{r+1}} =$ $= \nu_{r+1} + c^*_{r+1}$, где при $t = \tau$ согласно (13) $\nu_{r+1} = \sum\limits_{p=1}^{r+1} c_{\beta_p} g_{i_p} = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}}$, а оценка подмножества $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+j}}$ согласно (14) $\xi_j = \xi^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r \beta_{r+j}} = \nu_{r+j} + c^*_{r+j}$, где при $t = \tau$ согласно (13) $\nu_{r+j} = \sum\limits_{p=1}^{r} c_{\beta_p} g_{i_p} + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}}$. Здесь величина ν_0 — одинаковая часть выражений для ν_{r+1} и ν_{r+j}.

Согласно условию (8) имеем подмножества:

1) если $c_{\beta_{r+1}} \ge 0$, то $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$, следовательно $\nu_{r+1} - \nu_{r+j} = c_{\beta_{r+1}}(g_{i_{r+1}} -$ $- g_{i_{r+j}}) \le 0$;

$$\nu_{r+1} \le \nu_{r+j}; \tag{21}$$

2) если $c_{\beta_{r+1}} < 0$, то $g_{i_{r+1}} \ge g_{i_{r+j}}$, следовательно также имеем $\nu_{r+1} - \nu_{r+j} \le 0$.

Сравним коэффициенты c^*_{r+1} и c^*_{r+j}, которые вычисляются с помощью формул вида (14), (15), вместе со слагаемыми $\nu_{r+1}-\nu_0$ и $\nu_{r+j}-\nu_0$ соответственно, что необходимо для сравнения ξ_1 и ξ_j. Пусть $G_B=\{g_{i_1},\ldots,g_{i_r}\}$, $G_0=G-G_B$ и разности мультимножеств представим в виде $G_1=G_0-\{g_{i_{r+1}}\}=\{\widetilde{g}^1_1,\ldots,\widetilde{g}^1_\chi\}$, $G_2=G_0-\{g_{i_{r+j}}\}=\{\widetilde{g}^2_1,\ldots,\widetilde{g}^2_\chi\}$, для элементов G_1, G_2 выполняется условие вида (12). Пусть $\chi+t=\eta$, $t=r+1$, $t+\tau=k$, а также выполняется условие (10). Согласно формуле (15) имеем $c^*_{r+1}=c^*_{11}+c^*_{12}$, где

$$c^*_{11}=\sum_{j=1}^{\lambda}\widetilde{c}_j\widetilde{g}^1_j; \tag{22}$$

$$c^*_{12}=\sum_{j=1}^{\tau-\lambda}\widetilde{c}_{\lambda+j}\widetilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j}, \tag{23}$$

а также $c^*_{r+j}=c^*_{21}+c^*_{22}$, где

$$c^*_{21}=\sum_{j=1}^{\lambda}\widetilde{c}_j\widetilde{g}^2_j; \tag{24}$$

$$c^*_{22}=\sum_{j=1}^{\tau-\lambda}\widetilde{c}_{\lambda+j}\widetilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j}. \tag{25}$$

При нахождении c^*_{r+1}, c^*_{11}, c^*_{12} элемент $g_{i_{r+j}}$ может находиться в G_1 среди первых λ элементов мультимножества G_1, среди элементов с номерами $\lambda+1$, $\lambda+2,\ldots,\chi-\tau-\lambda-1$, $\chi-\tau-\lambda$, среди элементов с номерами $\chi-\tau-\lambda+1$, $\chi-\tau-\lambda+2,\ldots,\chi$.

Отметим, что элементы G_1 упорядочены согласно условию

$$\widetilde{g}^1_1\le\widetilde{g}^2_1\le\ldots\le\widetilde{g}^1_\chi. \tag{26}$$

Обозначим названные первое, второе и третье мультимножества соответственно A_1, B_1, C_1, которые в сумме дают мультимножество G_1: A_1+B_1+ $+C_1=G_1$. Аналогично при нахождении c^*_{r+j}, c^*_{21}, c^*_{22} элемент $g_{i_{r+1}}$ в G_2 может находиться в подмультимножествах A_2, B_2, C_2, которые в сумме дают мультимножество G_2 $(G_2=A_2+B_2+C_2)$: $A_2=\{\widetilde{g}^2_1,\widetilde{g}^2_2,\ldots,\widetilde{g}^2_\lambda\}$; $B_2=\{\widetilde{g}^2_{\lambda+1},\widetilde{g}^2_{\lambda+2},\ldots$ $\ldots,\widetilde{g}^2_{\chi-\tau-\lambda-1},\widetilde{g}^2_{\chi-\tau-\lambda}\}$; $C_2=\{\widetilde{g}^2_{\chi-\tau-\lambda+1},\widetilde{g}^2_{\chi-\tau-\lambda+2},\ldots,\widetilde{g}^2_\chi\}$. Элементы мультимножества G_2 упорядочены согласно условию

$$\widetilde{g}^2_1\le\widetilde{g}^2_2\le\ldots\le\widetilde{g}^2_\chi. \tag{27}$$

Таким образом, при сравнении c^*_{r+1} и c^*_{r+j} необходимо рассмотреть девять вариантов образования этих выражений, что соответствует девяти комбинациям размещения разных элементов $g_{i_{r+j}}$ и $g_{i_{r+1}}$ в G_1 и G_2 соответственно. Обозначим эти варианты как A_1A_2; A_1B_2; A_1C_2; B_1A_2; B_1B_2; B_1C_2; C_1A_2; C_1B_2; C_1C_2. При этом для случаев A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 возможны подслучаи, зависимые от того, выполняется условие $g_{i_{r+1}}\le g_{i_{r+j}}$ или условие $g_{i_{r+1}}\ge g_{i_{r+j}}$.

Теорема 3. Между оценками ξ_1 и ξ_j подмножеств $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}$ и $D^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+j}}$ соответственно во всех случаях, кроме $B_1 C_2$ и $C_1 C_2$, справедливо соотношение $\xi_1 = \xi^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}} \le \xi^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+j}} = \xi_j$, где $(\beta_1, \ldots, \beta_{r+1}) \in E^{r+1}_k (J_k)$, $(i_1, \ldots, i_r, i_{r+j}) \in E^{r+1}_\eta (J_\eta)$, $(i_1, \ldots, i_{r+1}) \in E^{r+1}_\eta (J_\eta)$, $r \in J^0_{k-1}$, $j > 1$, $j \in \{i_{r+2}, \ldots, i_k\}$, числа $i_j \in J_\eta$ и $\beta_1, \ldots, \beta_{r+1}$ удовлетворяют (9), (11). В случае $C_1 C_2$ знак неравенства — противоположный: $\xi_1 \ge \xi_j$. В случае $B_1 C_2$ справедливо неравенство $\xi_1 \le \xi_j$, если $\Delta = c_{\beta_{r+1}} (g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}) + \tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+1}} - \tilde{c}_{\lambda+1} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1} \ge 0$, и в последнем неравенстве при $\Delta \le 0$ имеем $\xi_1 \ge \xi_j$. В формуле для Δ параметр ω обозначает место элемента $g_{i_{r+1}}$ в множестве C_2 (от его начала).

Доказательство. Рассмотрим соотношения между ξ_1 и ξ_j для всех возможных случаев.

При условии $A_1 A_2$, когда $g_{\beta_{i_{r+j}}} \ge g_{i_{r+1}}$, имеем $B_1 = B_2$; $C_1 = C_2$, а значит $c^*_{12} = c^*_{22}$,

$$\Delta_1 = c^*_{11} - c^*_{21} = \sum_{j=1}^{\lambda_1} \tilde{c}_j (\tilde{g}^1_j - \tilde{g}^2_j) + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda_2} \tilde{c}_j (\tilde{g}^1_j - \tilde{g}^2_j) + \sum_{j=\lambda_2+1}^{\lambda} \tilde{c}_j (\tilde{g}^1_j - \tilde{g}^2_j), \quad (28)$$

где $\lambda_1 + 1$ и λ_2 обозначают места элементов $g_{i_{r+1}}$ и $g_{i_{r+j}}$ в A_1, A_2. Следовательно, первая $\sigma_1 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ и третья $\sigma_2 = \sigma_{21} - \sigma_{22}$ суммы в (28) нулевые, поскольку $\tilde{g}^1_j = \tilde{g}^2_j$.

Заметим, что при условии $A_1 A_2$, когда $g_{i_{r+j}} \ge g_{i_{r+1}}$, согласно правилу ветвления имеем $c_{\beta_{r+1}} \ge 0$. Заметим, что согласно правилу ветвления и условию (7) все переменные, которые не определились, имеют коэффициенты, меньшие, чем $c_{\beta_{r+1}} \ge 0$, а при условии $A_1 A_2$ в (28) они неотрицательны, т.е.

$$c_{\beta_{r+1}} \ge \tilde{c}_{\lambda_1+1} \ge \tilde{c}_{\lambda_1+2} \ge \ldots \ge \tilde{c}_{\lambda_2} \ge 0. \quad (29)$$

Заметим, что $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$; следовательно,

$$\xi_1 = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda_2-1} \tilde{c}_j \tilde{g}^1_j + \tilde{c}_{\lambda_2} g_{i_{r+j}} + \sigma_{11} + \sigma_{21} + c^*_{12}; \quad (30)$$

$$\xi_j = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \tilde{c}_{\lambda_1+1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+2}^{\lambda_2} \tilde{c}_j \tilde{g}^2_j + \sigma_{12} + \sigma_{22} + c^*_{22}. \quad (31)$$

В силу (26), (27) элементы G_1 и G_2 упорядочены. Так, в результате упорядоченности G_1 имеем

$$\tilde{g}^1_{\lambda_1+1} \le \tilde{g}^1_{\lambda_1+2} \le \ldots \le \tilde{g}^1_{\lambda_2-1} \le g_{i_{r+j}}. \quad (32)$$

Из упорядоченности G_2 следует

$$g_{i_{r+1}} \le \tilde{g}^2_{\lambda_1+2} \le \tilde{g}^2_{\lambda_1+3} \le \ldots \le \tilde{g}^2_{\lambda_2-2} \le \tilde{g}^2_{\lambda_2-1}. \quad (33)$$

При этом в (32), (33) для всех возможных пар индексов j, $j+1$ имеем равенство ($\tilde{g}_j$ обозначают одинаковые в G_1 и G_2 элементы):

$$\tilde{g}^1_j = \tilde{g}^2_{j+1} = \tilde{g}_j. \quad (34)$$

Следовательно, из (32)–(34) вытекает

$$g_{i_{r+1}} \le \tilde{g}_{\lambda_1+1} \le \tilde{g}_{\lambda_1+2} \le \ldots \le \tilde{g}_{\lambda_2-1} \le g_{i_{r+j}}. \quad (35)$$

Отметим, что согласно теореме 3.1 из [2] выражение $\xi_1 - \nu_0 - \sigma_{11} - \sigma_{21} - c_{12}^*$ согласно (30) является минимальным значением линейной целевой функции с коэффициентами, упорядоченными согласно (20) на множестве перестановок элементов в неравенствах (35). Тогда выражение $\xi_j - \nu_0 - \sigma_{12} - \sigma_{22} - c_{22}^*$, которое можно рассматривать как значение такой же целевой функции, но в другой перестановке элементов (35), согласно определению минимума не может быть меньше $\xi_1 - \nu_0 - \sigma_{11} - \sigma_{21} - c_{12}^*$; значит, $\xi_j - \nu_0 - \sigma_{12} - \sigma_{22} + c_{22}^* \geq \xi_1 - \nu_0 - - \sigma_{11} - \sigma_{21} - c_{12}^*$.

Следовательно, с учетом $\sigma_{11} = \sigma_{12}$; $\sigma_{21} = \sigma_{22}$; $c_{12}^* = c_{22}^*$ получаем $\xi_j \geq \xi_1$ в случае $A_1 A_2$ при $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$.

Рассмотрим случай $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$, тогда согласно правилу ветвления имеем $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Заметим, что согласно этому правилу если определена переменная при отрицательном коэффициенте целевой функции $c_{\beta_{r+1}} < 0$, то неопределенными остались только переменные при отрицательных коэффициентах целевой функции. Следовательно, ситуация $A_1 A_2$, согласно которой имеются неопределенные переменные с положительными коэффициентами целевой функции, при условии $c_{\beta_{r+1}} < 0$ невозможна. Рассмотрение случая $A_1 A_2$ завершено.

Рассмотрим случай $A_1 B_2$, т.е. когда $g_{i_{r+j}} \in A_1$; $g_{i_{r+1}} \in B_2$, а значит $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$. Это означает по правилу ветвления, что $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Следовательно, не определены только переменные при меньших $c_{\beta_{r+1}}$ в (7) отрицательных коэффициентах целевой функции. Значит, ситуация $A_1 B_2$ при этом невозможна, так как существует противоречие этому (A_1 означает наличие неопределенных переменных с положительными коэффициентами в целевой функции).

Рассмотрим случай $A_1 C_2$, т.е. когда $g_{i_{r+j}} \in A_1$; $g_{i_{r+1}} \in B_2$, а следовательно $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$. А это согласно способу ветвления может быть только при $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Последнее означает, что неопределенными являются только переменные при отрицательных коэффициентах, т.е. когда $g_{i_{r+j}} \notin A_1$, что является противоречием для случая $A_1 C_2$.

Рассмотрим случай $B_1 A_2$, когда $g_{i_{r+j}} \in B_1$; $g_{i_{r+1}} \in A_2$. Отсюда согласно способу ветвления (поскольку $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$) следует неравенство $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$.

Далее запишем ξ_1 в виде

$$\xi_1 = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + c_{r+1}^*, \tag{36}$$

а ξ_j в виде

$$\xi_j = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + c_{r+j}^*, \tag{37}$$

где

$$c_{r+1}^* = c_{11}^* + c_{12}^*, \tag{38}$$

$$c_{r+j}^* = c_{21}^* + c_{22}^*, \tag{39}$$

а составляющие (38), (39) вычисляются согласно (22)–(25). Очевидно, что $c_{12}^* = c_{22}^*$ $(C_1 = C_2)$,

$$c_{11}^* = \sigma_{11} + \sum_{j=\lambda_1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j^1; \tag{40}$$

$$c_{21}^* = \sigma_{21} + \widetilde{c}_{\lambda_1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j^2, \tag{41}$$

где

$$\sigma_{11}=\sigma_{21}=\sum_{j=1}^{\lambda_1-1}\tilde{c}_j\tilde{g}_j,\ \tilde{g}_j=\tilde{g}_j^1=\tilde{g}_j^2\quad \forall\, j\in J_{\lambda_1-1}; \tag{42}$$

$$\tilde{g}_{j+1}^2=\tilde{g}_j^1=\tilde{g}_j\quad \forall\, j\in J_\lambda \setminus J_{\lambda_1-1}. \tag{43}$$

Определим разность $\xi_j-\xi_1$:

$$\xi_j-\xi_1=(c_{\beta_{r+1}}g_{i_{r+j}}-c_{\beta_{r+1}}g_{i_{r+1}})+\tilde{c}_{\lambda_1}(g_{i_{r+1}}-\tilde{g}_{\lambda_1}^1)+\sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda}\tilde{c}_j(\tilde{g}_j^2-\tilde{g}_j^1). \tag{44}$$

Заметим, что в силу способа ветвления

$$c_{\beta_{r+1}}\ge \tilde{c}_{\lambda_1}\ge \tilde{c}_{\lambda_1+1}\ge \ldots \ge \tilde{c}_\lambda \ge 0. \tag{45}$$

В силу (26), (27) и (43) имеем

$$g_{i_{r+1}}\le \tilde{g}_{\lambda_1}\le \tilde{g}_{\lambda_1+1}\le \ldots \le \tilde{g}_\lambda \le g_{i_{r+j}}. \tag{46}$$

Заметим, что $\xi_j-\xi_1$ — это разность значений линейной целевой функции с коэффициентами из (45) для двух векторов: g^1 и g^j. Вектор g^1 состоит из последовательных $\lambda-\lambda_1+2$ значений элементов в следующем порядке: первый слева — это $g_{i_{r+j}}$, а далее $\lambda-\lambda_1+1$ элементов, взятых слева в (46). Вектор g^j состоит из последовательных $\lambda-\lambda_1+2$ значений элементов, взятых слева в (46). Введем обозначения: $\bar{c}=(\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_{\lambda-\lambda_1+2})$; $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_{\lambda-\lambda_1+2})$; $\lambda-\lambda_1+2=L$. Переобозначим соответственно числа из (45): $\bar{c}_1\ge\bar{c}_2\ge\ldots\ge\bar{c}_L$. Пусть G_0 — мультимножество левых L элементов из (46), т.е. до $\tilde{g}_\lambda$ включительно; $E_{L\nu}(G_0)=E_{\lambda-\lambda_1+2,\nu}(G_0)$ — множество перестановок из этих элементов. (Здесь ν — количество разных элементов в G_0.) Величина $\xi_1=\min\limits_{\bar{x}\in E_{L\nu}}\sum\limits_{j=1}^{L}\bar{c}_j\bar{x}_j$ согласно [2, теорема 3.1]. Тогда вектор, на котором достигается ξ_1, является вектором $g^1=(g_{i_{r+1}};\tilde{g}_{\lambda_1},\tilde{g}_{\lambda_1+1},\ldots,\tilde{g}_{\lambda-1};\tilde{g}_\lambda)$, элементы которого удовлетворяют (46). Поскольку g^1 — это минималь, то на другом векторе $g^0=(g_1^0,\ldots,g_L^0)\in E_{L\nu}(G_0)$ значения линейной функции $\xi_0=\sum\limits_{j=1}^{L}\bar{c}_jg_j^0\ge\xi^1$. Возьмем в качестве g^0 вектор $(\tilde{g}_\lambda,g_{i_{r+1}},\tilde{g}_{\lambda_1};\tilde{g}_{\lambda_1+1},\ldots,\tilde{g}_{\lambda-1})$. Заметим, что все $\bar{c}_j$ $\forall\, j\in J_L$ согласно (45) неотрицательны. Следовательно, имея $\xi_0\ge\xi_1$, изменим в g^0 первый элемент на $g_{i_{r+j}}$, получим g^j, т.е. изменим в ξ_0 одно слагаемое $\bar{c}_1g_1^0=c_{\beta_{r+1}}\tilde{g}_\lambda$ на $c_{\beta_{r+1}}g_{i_{r+j}}=\bar{c}_1g_1^j$. Согласно (46) и условию $c_{\beta_{r+1}}\ge 0$ имеем $c_{\beta_{r+1}}g_{i_{r+j}}\ge c_{\beta_{r+1}}\tilde{g}_\lambda$. В результате замены в ξ_0 получим $\xi_j\ge\xi_0$, т.е. $\xi_j\ge\xi_0\ge\xi_1$. Таким образом, в случае B_1A_2 имеем $\xi_j\ge\xi_1$.

Рассмотрим случай B_1B_2. Очевидно, что здесь ξ_1, ξ_j представляются как (36), (37), $\overset{*}{c}_{r+1}$, $\overset{*}{c}_{r+j}$ представляются как (38), (39) при условиях (22)–(25) и $\overset{*}{c}_{11}=\overset{*}{c}_{21}$; $\overset{*}{c}_{12}=\overset{*}{c}_{22}$. Следовательно, $\overset{*}{c}_{r+1}=\overset{*}{c}_{r+j}$, т.е. разность $\xi_j-\xi_1$ представляется в виде $\xi_j-\xi_1=c_{\beta_{r+1}}(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}})=\nu_{r+j}-\nu_{r+1}\ge 0$, как было показано в (21) (этот результат не зависит от подслучаев B_1B_2).

Рассмотрим случай C_1B_2, т.е. имеем $g_{i_{r+1}}\le g_{i_{r+j}}$; это значит, что согласно правилам ветвления $c_{\beta_{r+1}}\ge 0$. Следует учитывать, что ξ_1, ξ_j вычисляются с помощью формул (36)–(39) при условиях (22)–(25). При этом в случае $C_1 B_2$ в силу $A_1 = A_2$ очевидно, что $c_{11}^* = c_{21}^*$. Проанализируем c_{12}^* и c_{22}^*, которые определяются в (23), (25) соответственно. Эти суммы имеют одинаковые составляющие $\sigma_1 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1$, $\sigma_2 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2$, поскольку $\widetilde{g}_j^1 = \widetilde{g}_j^2 \ \forall j \in J_\chi \setminus$ $\setminus J_{\chi-\tau+\lambda+\omega}$. Здесь ω обозначает место элемента $g_{i_{r+j}}$ в множестве C_1 от начала с учетом порядка (26), т.е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда из (23) и (25) имеем

$$c_{12}^* - \sigma = \sum_{j=1}^{\omega} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1; \tag{47}$$

$$c_{22}^* - \sigma = \sum_{j=1}^{\omega} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2. \tag{48}$$

При этом $\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 = \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j+1}^2 = \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} \quad \forall j \in J_{\omega-1}^0 = J_{\omega-1} \cup \{0\}$. Заметим, что

$$g_{i_{r+1}} \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda} \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1} \le \ldots \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} \le g_{i_{r+j}}, \tag{49}$$

$$c_{\beta_{r+1}} \ge 0 > \widetilde{c}_{\lambda+1} \ge \widetilde{c}_{\lambda+2} \ge \ldots \ge \widetilde{c}_{\lambda+\omega}. \tag{50}$$

Исходя из (36)–(39) согласно условиям (22)–(25) и представлениям (47), (48), неравенствам (49), (50), имеем

$$\begin{aligned} \xi_j - \xi_1 &= c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=1}^{\omega} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} - \\ &- \sum_{j=1}^{\omega-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} - \widetilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+j}} = \\ &= c_{\beta_{r+1}} (g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}) + \sum_{j=1}^{\omega-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} (\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} - \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}) + \\ &+ \widetilde{c}_{\lambda+\omega} (\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega} - g_{i_{r+j}}). \end{aligned} \tag{51}$$

В силу того, что $c_{\beta_{r+1}} \ge 0$, а $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$, а также неравенств (49) и (50), где $\forall j \in J_\omega$ имеем $\widetilde{c}_{\lambda+j} < 0$, получим из (51) $\xi_j - \xi_1 \ge 0$, поскольку эта разность представляет сумму всех неотрицательных слагаемых. Таким образом, $\xi_j \ge \xi_1$ в случае $C_1 B_2$.

Рассмотрим случай $B_1 C_2$, т.е. имеем $g_{i_{r+j}} \le g_{i_{r+1}}$, согласно правилу ветвления $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Как и ранее, проанализируем ξ_1 и ξ_j, которые вычисляются согласно (36)–(39) при условиях (22)–(25). Из этих формул для случая $B_1 C_2$ в силу $A_1 = A_2$ очевидно, что $c_{11}^* = c_{21}^*$. Проанализируем c_{12}^* и c_{22}^* на основании их выражений (23), (25) соответственно. Если ω обозначить место элемента $g_{i_{r+1}}$ в C_2 (от начала C_2 с учетом порядка (27)), то можно записать одинаковые части сумм (23) и (25):

$$\sigma_1 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1, \tag{52}$$

$$\sigma_2 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2. \tag{53}$$

Действительно, (52) и (53) одинаковы, поскольку $\widetilde{g}^{\,1}_{\chi-\tau+\lambda+j}=\widetilde{g}^{\,2}_{\chi-\tau+\lambda+j}$ $\forall j\in J_{\tau-\lambda}\setminus J_{\omega}$. Обозначим $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ и рассмотрим $c^*_{12}-\sigma$ и $c^*_{22}-\sigma$, которые формально определяются в (47), (48), где ω обозначает место элемента $g_{i_{r+1}}$ в C_2 (от начала C_2). Заметим, что $\widetilde{g}^{\,1}_{\chi-\tau+\lambda+j}=\widetilde{g}^{\,2}_{\chi-\tau+\lambda+j-1}=\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}$ $\forall j\in J_{\omega}$, а также, что

$$g_{i_{r+j}}\le\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1}\le\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+2}\le\ldots\le\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}\le g_{i_{r+1}}, \tag{54}$$

$$0>c_{\beta_{r+1}}\ge\widetilde{c}_{\lambda+1}\ge\widetilde{c}_{\lambda+2}\ge\ldots\ge\widetilde{c}_{\lambda+\omega}. \tag{55}$$

Исходя из (36)–(39) при условиях (22)–(25), формул (47), (48), (52), (53) и неравенств (54), (55), имеем

$$\xi_j-\xi_1=c_{\beta_{r+1}}(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}})+\sum_{j=1}^{\omega-1}\widetilde{c}_{\lambda+j}(\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j+1}-\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j})+$$
$$+\widetilde{c}_{\lambda+\omega}(g_{i_{r+1}}-\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}). \tag{56}$$

Однако перегруппировав слагаемые в (56), с учетом попарного равенства элементов из G_1 и G_2, при котором обнуляются соответствующие разности, имеем $\xi_j-\xi_1=c_{\beta_{r+1}}(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}})+\widetilde{c}_{\lambda+\omega}g_{i_{r+1}}-\widetilde{c}_{\lambda+1}g_{\chi-\tau+\lambda+1}=\Delta$.

Несложно увидеть, что это выражение для $\xi_j-\xi_1=\Delta$ может быть как неотрицательным, так и неположительным в случае B_1C_2. Это и требовалось доказать для B_1C_2.

Рассмотрим случай C_1A_2, т.е. $g_{i_{r+1}}\le g_{i_{r+j}}$. Это означает, что $c_{\beta_{r+1}}\ge 0$. Пусть λ_1 обозначает место элемента $g_{i_{r+1}}$ в A_2, а ω — место элемента $g_{i_{r+j}}$ от начала в C_1 (учитывая порядки (26), (27)). Найдем

$$\xi_j-\xi_1=\nu_j+c^*_j-\nu_1-c^*_1=c_{\beta_{r+1}}(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}})+$$
$$+\sum_{j=1}^{\lambda}\widetilde{c}_j\widetilde{g}^{\,2}_j+\sum_{j=1}^{\tau-\lambda}\widetilde{c}_{\lambda+j}\widetilde{g}^{\,2}_{\chi-\tau+\lambda+j}-\sum_{j=1}^{\lambda}\widetilde{c}_j\widetilde{g}^{\,1}_j-$$
$$-\sum_{j=1}^{\tau-\lambda}\widetilde{c}_{\lambda+j}\widetilde{g}^{\,1}_{\chi-\tau+\lambda+j}=c_{\beta_{r+1}}(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}})+\widetilde{c}_{\lambda_1}g_{i_{r+1}}+$$
$$+\sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda}\widetilde{c}_j\widetilde{g}^{\,2}_j+\sum_{j=1}^{\omega}\widetilde{c}_{\lambda+j}\widetilde{g}^{\,2}_{\chi-\tau+\lambda+j}-$$
$$-\sum_{j=\lambda_1}^{\lambda}\widetilde{c}_j\widetilde{g}^{\,1}_j-\sum_{j=1}^{\omega-1}\widetilde{c}_{\lambda+j}\widetilde{g}^{\,1}_{\chi-\tau+\lambda+j}-\widetilde{c}_{\lambda+\omega}\widetilde{g}^{\,1}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}. \tag{57}$$

В последней сумме

$$\widetilde{g}^{\,1}_j=\widetilde{g}^{\,2}_{j+1}=\widetilde{g}_j\quad\forall j\in J_{\chi-\tau+\lambda+\omega}\setminus J_{\lambda_1}; \tag{58}$$

$$\widetilde{g}^{\,1}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}=g_{i_{r+j}};$$

при этом

$$c_{\beta_{r+1}}\ge\widetilde{c}_{\lambda_1}\ge\widetilde{c}_{\lambda_1+1}\ge\ldots\ge\widetilde{c}_{\lambda-1}\ge\widetilde{c}_{\lambda}\ge 0>\widetilde{c}_{\lambda+1}\ge\ldots\ge\widetilde{c}_{\lambda+\omega}; \tag{59}$$

$$g_{i_{r+1}} \le \widetilde{g}_{\lambda_1} \le \widetilde{g}_{\lambda_1+1} \le \ldots \le \widetilde{g}_{\lambda-1} \le \widetilde{g}_{\lambda} \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda} \le \ldots$$
$$\ldots \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1} \le \ldots \le \widetilde{g}_{\lambda-\tau+\chi+\omega-1} \le g_{i_{r+j}}. \qquad (60)$$

Перепишем (57) в виде

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \widetilde{c}_{\lambda_1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_{j-1} + \sum_{j=1}^{\omega-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} +$$
$$+ \widetilde{c}_{\lambda+\omega} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} - \widetilde{c}_{\lambda_1} \widetilde{g}_{\lambda_1} - \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j - \sum_{j=1}^{\omega-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} - \widetilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+j}}. \qquad (61)$$

Согласно (59), (60) в разности $\xi_j - \xi_1$ в (61) отнимается минимальное значение ξ_1 линейной функции с коэффициентами из множества чисел, упорядоченных по (59), с добавлением одного нуля между $\widetilde{c}_\lambda \ge 0$ и $\widetilde{c}_{\lambda+1} < 0$ на множестве перестановок из $\lambda - \lambda_1 + 3 + \omega$ элементов в (60) [2, теорема 3.1]). При этом отнимается ξ_1 не от минимального значения ξ_j этой же функции (поскольку вектор значений переменных этой функции, что дает ξ_j, не упорядочен согласно (60)). Следовательно, $\xi_j - \xi_1 \ge 0$, что и требовалось доказать в случае $C_1 A_2$.

Наконец, рассмотрим случай $C_1 C_2$. Возможны два варианта соотношения: 1) $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$; 2) $g_{i_{r+1}} \ge g_{i_{r+j}}$. Поскольку $g_{i_{r+j}} \in C_1$; $g_{i_{r+1}} \in C_2$, то это значит, что $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Следовательно, согласно правилу ветвления $g_{i_{r+1}} \ge g_{i_{r+j}}$, т.е. первый вариант невозможен. Рассмотрим второй случай относительно выражений ξ_1, ξ_j:

$$\xi_1 = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j^1 + \sum_{j=1}^{\alpha-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 + \widetilde{c}_{\lambda+\alpha} g_{i_{r+j}} +$$
$$+ \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 + \widetilde{c}_{\lambda+\omega} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}^1 + \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1; \qquad (62)$$

$$\xi_j = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \sum_{j=1}^{\lambda} \widetilde{c}_j \widetilde{g}_j^2 + \sum_{j=1}^{\alpha-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 + \widetilde{c}_{\lambda+\alpha} g_{\chi-\tau+\lambda+\alpha}^2 +$$
$$+ \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2 + \widetilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \widetilde{c}_{\lambda+j} \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2, \qquad (63)$$

где

$$\widetilde{g}_j^1 = \widetilde{g}_j^2 \quad \forall j \in J_\lambda; \; \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 = \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2 \quad \forall j \in J_{\alpha-1}, \; \forall j \in J_{\tau-\lambda} \setminus J_\omega; \qquad (64)$$

α обозначает место элемента $g_{i_{r+j}}$ от начала C_1; ω обозначает место элемента $g_{i_{r+1}}$ от начала C_2; $\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j+1}^1 = \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2 = \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} \quad \forall j \in J_{\omega-1} \setminus J_{\alpha-1}$. При этом имеем

$$g_{i_{r+j}} \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha} \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha+1} \le \ldots \le \widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} \le g_{i_{r+1}}; \qquad (65)$$

$$0 > c_{\beta_{r+1}} \ge \widetilde{c}_{\lambda+\alpha} \ge \widetilde{c}_{\lambda+\alpha+1} \ge \ldots \ge \widetilde{c}_{\lambda+\omega-1} \ge \widetilde{c}_{\lambda+\omega}. \qquad (66)$$

Вычтем из равенства (63) равенство (62), при этом в силу (64) третьи, четвертые и последние суммы взаимно уничтожаются (они попарно одинаковы):

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \widetilde{c}_{\lambda+\alpha} (\widetilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha} - g_{i_{r+j}}) +$$

$$+\sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1}\tilde{c}_{\lambda+j}(\tilde{g}_{\chi-\tau+j}+\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1})+\tilde{c}_{\lambda+\omega}(g_{i_{r+1}}-\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1})=$$

$$=c_{\beta_{r+1}}g_{i_{r+j}}+\tilde{c}_{\lambda+\alpha}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha}+\sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1}\tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}+\tilde{c}_{\lambda+\omega}g_{i_{r+1}}-$$

$$-[c_{\beta_{r+1}}g_{i_{r+1}}+\tilde{c}_{\lambda+\alpha}g_{i_{r+j}}+\sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1}\tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1}+\tilde{c}_{\lambda+\omega}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1}]. \quad (67)$$

Правая часть равенства (67) — это разность двух значений линейной целевой функции с коэффициентами из (66) в перестановке, которая упорядочена согласно (65) (что по теореме 3.1 из [2] является минимумом), и другим значением (это сумма в квадратных скобках), что по определению минимума не меньше первой суммы. Таким образом, в случае C_1C_2 имеем $\xi_j \le \xi_1$, что и требовалось доказать для этого случая. Доказательства завершены относительно всех случаев.

Рассмотрим пример решения изложенной выше задачи.

Решить задачу: $5x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \to \min$, $\sum_{j=1}^{4} x_j = 1$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in$ $\in E_{\eta\nu}^k(G)$, $G = \{0,1; 0,1; 0,2; 0,2; 0,2; 0,3; 0,3; 0,3; 0,4; 0,4; 0,5; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$ (отметим, что $k=4$, $\eta=17$, $\nu=10$).

При решении с помощью МВГ этой задачи с применением оценивания, ветвления и отсечения, рассмотренных в теоремах 1–3, получено 77 допустимых решений, первое из которых оказалось оптимальным: со значением целевой функции $F_0 = -2$, достигаемым в точке $x^0 = (0,1; 0,2; 0,1; 0,6)$.

Таким образом, в настоящей статье для задач минимизации на множестве размещений с единичной их суммой линейной целевой функции для метода ветвей и границ предложены правила ветвления и оценка допустимых подмножеств. Доказаны два свойства оценок, которые позволяют значительно уменьшать количество анализируемых допустимых подмножеств. Как направление дальнейших исследований можно определить поиск возможности так организовать ветвление в МВГ для рассмотренной задачи, чтобы оценки ξ_1 и ξ_j из теоремы 3 всегда имели соотношение $\xi_j \ge \xi_1$. В перспективе целесообразно установить, при каких условиях первое допустимое решение F_0 в рассматриваемой задаче является и оптимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
3. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях / Под ред. И.В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
4. Гуляницкий Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — К., 2005. — 32 с.
5. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 37–47.
6. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Игры с комбинаторными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 134–141.
7. Емец О.А., Ольховская Е.В. Итерационный метод решения комбинаторных задач игрового типа на размещениях // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 69–78.

Поступила 21.07.2011