УДК 519.21

Б.В. БОНДАРЕВ, Е.Ю. РАГУЛИНА

О ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ПРИ ИНВЕСТИРОВАНИИ КАПИТАЛА НА ФИНАНСОВОМ (B, S)-РЫНКЕ

Ключевые слова: *вероятность неразорения, классическая модель риска, модель риска со стохастическими премиями, финансовый (B,S)-рынок, оценка производной, метод Монте-Карло.*

ВВЕДЕНИЕ

Один из основных показателей деятельности страховой компании — вероятность ее неразорения, поэтому вычисление этого показателя в тех или иных моделях представляет большой интерес. Наиболее простыми динамическими моделями деятельности страховой компании с непрерывным временем являются классическая модель риска (модель Крамера–Лундберга) [1–3] и модель риска со стохастическими премиями [4, 5]. Большой интерес с практической точки зрения представляют модели, предусматривающие кроме основной деятельности страховой компании инвестиционную. Например, в работах [1, 6–11] рассмотрено инвестирование только в безрисковый актив (на банковский счет), в [12–15] — только в рисковый актив (акции), в [16–18] — в оба вида активов. При этом эволюцию цены рискового актива часто моделируют с помощью геометрического броуновского движения. В настоящей статье рассмотрены классическая модель риска и модель риска со стохастическими премиями, при этом предусмотрено инвестирование в оба вида активов, а эволюция цены рискового актива описана процессом со скачками. Используемая модель эволюции цены акции предложена в [19], где обоснована целесообразность ее рассмотрения и доказана ее безарбитражность. Отметим, что вопрос о преимуществах моделирования цен акций с помощью процессов со скачками неоднократно обсуждался и ранее, например, в [20–23].

Ниже для классической модели риска установлены достаточные условия существования частных производных вероятности неразорения на конечном интервале времени как функции начального капитала и интервала времени. При выполнении этих условий получено интегро-дифференциальное уравнение в частных производных для вероятности неразорения и оценена частная производная этой функции по начальному капиталу. Аналогичные результаты установлены для модели риска со стохастическими премиями. Далее предложено приблизительно находить вероятности неразорения в указанных моделях методом Монте-Карло для всех значений начального капитала из некоторого конечного интервала, выведены формулы, связывающие точность и надежность такого приближения, при этом использованы полученные оценки частных производных. В качестве примера рассмотрен случай, когда величины требований (а в модели со стохастическими премиями и премий) имеют показательное распределение.

Отметим, что аналоги описанных результатов получены в [7] при инвестировании капитала только в безрисковый актив, а найденные при этом оценки частных производных по начальному капиталу использованы в [24] для вывода формул, связывающих точность и надежность приближений вероятностей неразорения их статистическими оценками. Таким образом, результаты настоящей статьи обобщают результаты работ [7, 24], при этом полученные интегро-дифференциальные уравнения можно использовать для нахождения вероятностей неразорения в явном виде в некоторых частных случаях, для исследования их асимптотического поведения. Особый интерес представляют численные методы решения таких уравнений.

Отметим также, что для классической модели риска в работе [25] рассмотрены точечные оценки вероятности разорения на бесконечном интервале времени, полученные методом Монте-Карло, в [26] — стохастический метод последовательных приближений, в [27] построена статистическая оценка вероятности разорения для обобщенного процесса риска, а в [28] проведено сравнение эффективности параллельных версий метода Монте-Карло и метода последовательных приближений, детально изученного в [29–34], для вычисления вероятности неразорения на конечном интервале времени.

ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗОРЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РИСКА

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P})$ — стохастический базис, на котором определены все используемые в дальнейшем объекты. Начальный капитал страховой компании равен x, $x \geq 0$. В классической модели риска предполагается [1–3, 7–11, 14, 15, 24–26, 29], что страховая компания получает премии от клиентов с постоянной интенсивностью $c > 0$, а суммарные требования, поступившие от клиентов на интервале времени $[0, t]$, образуют сложный пуассоновский процесс $R_{cl}(t) = \sum_{i=1}^{N_{cl}(t)} Y_i^{cl}$ (считается, что $\sum_{i=1}^{0} Y_i^{cl} = 0$), где $N_{cl}(t)$, $N_{cl}(0) = 0$, — однородный пуассоновский процесс с параметром $\lambda_{cl} > 0$, а $\{Y_i^{cl}\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных случайных величин, независимых и одинаково распределенных с функцией распределения $F_{cl}(y)$, $F_{cl}(0) = 0$, причем процесс $N_{cl}(t)$ не зависит от последовательности $\{Y_i^{cl}\}_{i=1}^{\infty}$. Процесс $N_{cl}(t)$ интерпретируется как число страховых требований, предъявленных клиентами на интервале времени $[0,\ t]$, а величины Y_i^{cl}, $i = \overline{1, \infty}$, — как величины этих требований. Предполагается также, что случайные величины Y_i^{cl} имеют конечные математические ожидания $\mathbf{M} Y_i^{cl} = \mu_{cl} < \infty$.

Будем считать, что весь свой капитал страховая компания размещает на финансовом (B, S)-рынке, состоящем из двух активов: безрискового B (банковского счета) и рискового S (акций). Цена безрискового актива $B(t)$ в момент времени t равна $B(t) = B(0)e^{rt}$, где $B(0) > 0$ — цена безрискового актива в нулевой момент времени, $r > 0$ — постоянная ставка при непрерывном начислении процентов. Цена рискового актива $S(t)$ в момент времени t равна $S(t) = S(0)e^{r_{st}t + R_{st}(t)}$, где $S(0) > 0$ — цена рискового актива в нулевой момент времени; $r_{st} > r$ — постоянная; $R_{st}(t) = \sum_{i=1}^{N_{st}(t)} Y_i^{st}$ (здесь $\sum_{i=1}^{0} Y_i^{st} = 0$), $N_{st}(t)$, $N_{st}(0) = 0$, — однородный пуассоновский процесс с параметром $\lambda_{st} > 0$, случайные величины Y_i^{st}, $i = \overline{1, \infty}$, одинаково распределены с функцией распределения $F_{st}(y)$, $0 < F_{st}(0) < 1$, имеют экспоненциальные моменты и $\mathbf{M} Y_i^{st} = 0$ [19]. Все указанные выше случайные величины и процессы являются независимыми.

Пусть страховая компания в каждый момент времени размещает долю α своего капитала в рисковый актив, а долю $1-\alpha$ — в безрисковый актив. Будем полагать, что $0 < \alpha \leq 1$. Случай $\alpha = 0$ рассмотрен в работе [7]. Обозначим $\alpha r_{st} + (1-\alpha) r = \bar{r}$; $X_x(t)$ — капитал страховой компании в момент времени t при условии, что ее начальный капитал был равен x; τ_i^{cl} и τ_i^{st}, $i = \overline{1, \infty}$, — моменты i-х скачков процессов $R_{cl}(t)$ и $R_{st}(t)$ соответственно. Тогда эволюция капитала описывается уравнением

$$X_x(t) = x + \int_0^t (\bar{r} X_x(s) + c) ds + \alpha \sum_{i=1}^{N_{st}(t)} X_x(\tau_i^{st} - 0)(e^{Y_i^{st}} - 1) - R_{cl}(t). \qquad (1)$$

Вероятность неразорения страховой компании $\varphi(x, t)$ на конечном интервале времени $[0, t]$ как функция начального капитала x и интервала времени t определяется как

$$\varphi(x,t) = \boldsymbol{P}\{X_x(s) \geq 0 \ \ \forall s \in [0, t]\}.$$

Очевидно, что функция $\varphi(x, t)$, определенная при $x \in [0, +\infty)$ и $t \in [0, +\infty)$, является монотонно неубывающей по x (при каждом фиксированном t) и монотонно невозрастающей по t (при каждом фиксированном x), а также ограниченной снизу нулем и сверху единицей. Тем не менее непрерывность этой функции и существование у нее непрерывных частных производных необходимо доказывать, поскольку, как свидетельствуют результаты работ [4, 7, 31], в некоторых моделях при определенных условиях эти свойства могут не выполняться.

Утверждение 1. Если эволюция капитала страховой компании описывается уравнением (1), то функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\varphi(x,t) = \int_0^t e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})s} \left(\lambda_{cl} \int_0^{(x+c/\bar{r})e^{\bar{r}s}-c/\bar{r}} \varphi((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}s} - c/\bar{r} - y, t-s)dF_{cl}(y) + \right.$$

$$\left. +\lambda_{st} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(((1-\alpha)+\alpha e^y)((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}s} - c/\bar{r}), t-s)dF_{st}(y) \right) ds + e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t} \quad (2)$$

с граничным условием $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x,t) = 1$.

Доказательство. Из (1) видно, что капитал страховой компании $X_x(t)$ до своего первого скачка равен $X_x(t) = (x + c/\bar{r})e^{\bar{r}t} - c/\bar{r}$. Пусть первый скачок процесса $X_x(t)$ $\tau_1 = \min\{\tau_1^{cl}, \tau_1^{st}\}$ происходит в момент времени $\tau_1 = s$ и пусть y — величина первого скачка процесса $R_{cl}(t)$, если $\tau_1 = \tau_1^{cl}$, или процесса $R_{st}(t)$, если $\tau_1 = \tau_1^{st}$.

Рассмотрим вероятность неразорения на интервале $[0, t]$. Если $\tau_1 > t$, то разорения на этом интервале не произойдет, а $\boldsymbol{P}\{\tau_1 > t\} = e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}$. Если $\tau_1 \leq t$, то до момента τ_1 разорения не наступит, а после момента τ_1 разорения не произойдет тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

— $\tau_1 = \tau_1^{cl}$, $y \leq (x + c/\bar{r})e^{\bar{r}s} - c/\bar{r}$ и разорения не произойдет на интервале времени $[s, t]$ при начальном капитале $(x + c/\bar{r})e^{\bar{r}s} - c/\bar{r} - y$;

— $\tau_1 = \tau_1^{st}$ и разорения не произойдет на интервале времени $[s, t]$ при начальном капитале $((1-\alpha)+\alpha e^y)((x + c/\bar{r})e^{\bar{r}s} - c/\bar{r})$.

При этом $\boldsymbol{P}\{\tau_1 = \tau_1^{cl}\} = \lambda_{cl}/(\lambda_{cl} + \lambda_{st})$ и $\boldsymbol{P}\{\tau_1 = \tau_1^{st}\} = \lambda_{st}/(\lambda_{cl} + \lambda_{st})$.

Отсюда, используя формулу полной вероятности, для всех $x \geq 0$ и $t \geq 0$ получаем интегральное уравнение (2). Справедливость граничного условия следует из того, что на конечном интервале времени у процесса $X_x(t)$ может быть только конечное число скачков.

Замечание 1. В работах [29–34] выведены интегральные уравнения типа (2), а также установлены необходимые и достаточные условия существования и единственности ненулевых решений этих уравнений как для классической модели риска и модели риска со стохастическими премиями, так и для более общих процессов риска–восстановления, когда поток требований не является пуассоновским, процесс поступления премий может зависеть от текущего капитала, а величины требований и моменты их поступлений могут быть зависимыми. Тем не менее эти уравнения не охватывают случаи, рассматриваемые в настоящей статье.

Теорема 1. Пусть эволюция капитала компании описывается уравнением (1).

1. Если случайные величины Y_i^{cl}, $i=\overline{1,\infty}$, имеют непрерывную на $[0,+\infty)$ плотность распределения $f_{cl}(y)$, а случайные величины Y_i^{st}, $i=\overline{1,\infty}$, имеют непрерывную на $(-\infty,+\infty)$ плотность распределения $f_{st}(y)$, то $\varphi(x,t)$ является непрерывной на $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ как функция двух переменных.

2. Если функции $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ имеют производные $f'_{cl}(y)$ на $[0,+\infty)$ и $f'_{st}(y)$ на $(-\infty,+\infty)$ такие, что функция $|f'_{cl}(y)|$ интегрируема и ограничена на $[0,+\infty)$, а функции $|f'_{st}(y)|$, $f_{st}(y)e^{-y}$ и $|f'_{st}(y)|\,e^{-y}$ интегрируемы и ограничены на $(-\infty,+\infty)$, то на $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ существуют частные производные $\varphi(x,t)$ по x и t, непрерывные как функции двух переменных, а $\varphi(x,t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}-(\bar{r}x+c)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}+(\lambda_{cl}+\lambda_{st})\varphi(x,t)-\lambda_{cl}\int_0^x\varphi(x-y,t)dF_{cl}(y)-$$
$$-\lambda_{st}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(((1-\alpha)+\alpha e^y)x,t)dF_{st}(y)=0 \qquad (3)$$

с граничными условиями $\varphi(x,0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x,t)=1$, при этом для всех $X_0>0$ и $T>0$ имеет место оценка

$$\sup_{\substack{x\in[X_0,+\infty),\\ t\in[0,T]}}\left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|\le\frac{1-e^{(\bar{r}-\lambda_{cl}-\lambda_{st})T}}{\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar{r}}\left(\lambda_{cl}\left(f_{cl}(0)+\int_0^{+\infty}|f'_{cl}(y)|\,dy\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_{st}}{\alpha X_0}\left((1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}f_{st}(y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}((1-\alpha)e^{-y}+\alpha)|f'_{st}(y)|\,dy\right)\right). \qquad (4)$$

Доказательство. В (2) сначала сделаем замену переменной интегрирования $t-s=v$ во внешнем интеграле, а затем в случае существования плотностей распределений $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ у случайных величин Y_i^{cl} и Y_i^{st}, $i=\overline{1,\infty}$, заменим $(x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r}-y=u$ и $((1-\alpha)+\alpha e^y)((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r})=u$ в первом и во втором внутренних интегралах соответственно при $x\ne 0$ и $t\ne 0$ одновременно. В результате получим

$$\varphi(x,t)=e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}\int_0^t e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st})v}\times$$
$$\times\left(\lambda_{cl}\int_0^{(x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r}}\varphi(u,v)f_{cl}((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r}-u)du+\right.$$
$$+\lambda_{st}\int_{(1-\alpha)((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r})}^{+\infty}(\varphi(u,v)/(u+(\alpha-1)((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r})))\times$$
$$\left.\times f_{st}(\ln(u/(\alpha((x+c/\bar{r})e^{\bar{r}(t-v)}-c/\bar{r}))+(\alpha-1)/\alpha))\,du\right)dv+e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}. \qquad (5)$$

Если функции $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ непрерывны на интервалах $[0,+\infty)$ и $(-\infty,+\infty)$ соответственно, то непрерывность $\varphi(x,t)$ как функции двух переменных в произвольной точке $(x_0,t_0)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, кроме точки $(0,0)$, следует из того, что, например, для всех $(x,t)\in(0,x_0]\times(0,t_0]$ (другие случаи рассматриваются аналогично) в силу (5) выполнено

$$|\varphi(x_0,t_0)e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t_0}-\varphi(x,t)e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}|\le$$

$$\le \int_0^t e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st})v} \left(\lambda_{cl} \int_0^{(x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r} |f_{cl}((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r-u)- \right.$$

$$-f_{cl}((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r-u)|\,du+\lambda_{cl}F_{cl}((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-(x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)})+$$

$$+\lambda_{st}\int_{M_1(v)}^{M_2} \left| \frac{f_{st}(\ln(u/(\alpha((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r))+(\alpha-1)/\alpha))}{u+(\alpha-1)((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r)}- \right.$$

$$\left. -\frac{f_{st}(\ln(u/(\alpha((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r))+(\alpha-1)/\alpha))}{u+(\alpha-1)((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r)} \right| du+$$

$$+\lambda_{st}F_{st}\left(\ln\left(\frac{(1-\alpha)((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r)}{\alpha((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r)}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)+$$

$$+2\lambda_{st}\left(1-F_{st}\left(\ln\left(\frac{M_2}{\alpha((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r)}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)+\right.$$

$$\left.\left. +F_{st}\left(\ln\left(\frac{M_1(v)}{\alpha((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r)}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)\right)\right)dv+e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t_0}-e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t} \quad (6)$$

(здесь функция $M_1(v)$ и число M_2 такие, что $(1-\alpha)((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r)< M_1(v)< M_2<+\infty$)). Сначала выбором достаточно большого числа M_2 и функции $M_1(v)$ такой, что $\sup\limits_{v\in[0,t_0]} |(1-\alpha)((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r)-M_1(v)|$ является достаточно малым, можно выражение

$$1-F_{st}(\ln(M_2/(\alpha((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r))+(\alpha-1)/\alpha))+$$
$$+F_{st}(\ln(M_1(v)/(\alpha((x_0+c/\bar r)e^{\bar r(t_0-v)}-c/\bar r))+(\alpha-1)/\alpha))$$

сделать достаточно малым, а затем сделать достаточно малой всю правую часть (6) при x и t, достаточно близких соответственно к x_0 и t_0 (см. доказательства теорем 3 и 7 в [7]).

Из (2) видно, что $\varphi(x,t)\ge e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}$ для всех $x\ge 0$ и $t\ge 0$, а $\varphi(x,0)=1$ для всех $x\ge 0$, поэтому $|\varphi(0,0)-\varphi(x,t)|\le 1-e^{-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}$ для всех $x\ge 0$ и $t\ge 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна и в точке $(0,0)$. Таким образом, $\varphi(x,t)$ непрерывна как функция двух переменных на всей своей области определения.

Существование непрерывных частных производных $\varphi(x,t)$ по x и t на $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ в случае, когда функции $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ имеют производные $f'_{cl}(y)$ и $f'_{st}(y)$, удовлетворяющие условию п. 2 теоремы 1, следует из равенства (5) и установленной непрерывности $\varphi(x,t)$ (см. доказательство теоремы 3 в [7], а также [35, с. 661–662, 666–667, 748]), при этом

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}=e^{(\bar r-\lambda_{cl}-\lambda_{st})t}\int_0^t e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar r)v}\left(\lambda_{cl}f_{cl}(0)\varphi((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r,v)+\right.$$

$$+\lambda_{cl}\int_0^{(x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r}\varphi(u,v)f'_{cl}((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r-u)\,du-$$

$$-\lambda_{st}\int_{(1-\alpha)((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r)}^{+\infty}(\varphi(u,v)/(u+(\alpha-1)((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r))^2)\times$$

$$\times\left((\alpha-1)f_{st}(\ln(u/(\alpha((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r))+(\alpha-1)/\alpha))+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{u f'_{st}(\ln(u/(\alpha((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r))+(\alpha-1)/\alpha))}{(x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r}\right)du\right)dv, \qquad (7)$$

а с учетом (5) и (7)

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=-(\lambda_{cl}+\lambda_{st})\varphi(x,t)+\lambda_{cl}\int_0^x\varphi(x-y,t)f_{cl}(y)dy+$$
$$+\lambda_{st}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(((1-\alpha)+\alpha e^y)x,t)f_{st}(y)dy+(\bar r x+c)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}.$$

Таким образом, получено уравнение (3).

Кроме того, из (7) для всех $x>0$ и $t\ge 0$ имеем

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|\le e^{(\bar r-\lambda_{cl}-\lambda_{st})t}\int_0^t e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar r)v}\left(\lambda_{cl}f_{cl}(0)+\lambda_{cl}\int_0^{+\infty}|f'_{cl}(y)|dy+\right.$$
$$+\frac{\lambda_{st}(1-\alpha)}{\alpha((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}f_{st}(y)dy+$$
$$\left.+\frac{\lambda_{st}}{\alpha((x+c/\bar r)e^{\bar r(t-v)}-c/\bar r)}\int_{-\infty}^{+\infty}((1-\alpha)e^{-y}+\alpha)|f'_{st}(y)|dy\right)dv.$$

Отсюда для всех $X_0>0$ и $T>0$ следует оценка (4). Теорема доказана.

Замечание 2. Результаты теоремы 1 (существование непрерывных частных производных функции $\varphi(x,t)$, уравнение (3) и оценка (4)) остаются справедливыми и в случае, когда функции $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ непрерывны на $[0,+\infty)$ и $(-\infty,+\infty)$ соответственно, а их производные существуют на этих интервалах всюду, за исключением конечного числа точек (в которых имеют место конечные односторонние производные), и удовлетворяют условиям теоремы 1.

ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗОРЕНИЯ В МОДЕЛИ РИСКА СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРЕМИЯМИ

Предположим, что процесс поступления страховых премий также является случайным и суммарные премии, поступившие на интервале времени $[0,t]$, образуют сложный пуассоновский процесс $R_{pr}(t)=\sum_{i=1}^{N_{pr}(t)}Y_i^{pr}$, $\sum_{i=1}^{0}Y_i^{pr}=0$, где $N_{pr}(t)$, $N_{pr}(0)=0$, — однородный пуассоновский процесс с параметром $\lambda_{pr}>0$ (число страховых премий, поступивших на интервале времени $[0,t]$); $\{Y_i^{pr}\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных случайных величин, независимых и одинаково распределенных с функцией распределения $F_{pr}(y)$, $F_{pr}(0)=0$, и математическим ожиданием $\mu_{pr}<\infty$ (величины страховых премий), причем все используемые далее случайные величины и процессы также независимы [4–7, 18, 31]. Все остальные предположения и обозначения остаются неизменными. В этом случае эволюция капитала описывается уравнением

$$X_x(t)=x+\bar r\int_0^t X_x(s)ds+\alpha\sum_{i=1}^{N_{st}(t)}X_x(\tau_i^{st}-0)(e^{Y_i^{st}}-1)+R_{pr}(t)-R_{cl}(t). \qquad (8)$$

Утверждение 2. Если эволюция капитала страховой компании описывается уравнением (8), то функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\varphi(x,t)=\int_0^t e^{-(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})s}\left(\lambda_{pr}\int_0^{+\infty}\varphi(xe^{\bar r s}+y,t-s)dF_{pr}(y)+\right.$$

$$+\lambda_{cl}\int_0^{xe^{\bar r s}}\varphi(xe^{\bar r s}-y,t-s)dF_{cl}(y)+$$

$$\left.+\lambda_{st}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(((1-\alpha)+\alpha e^{y})xe^{\bar r s},t-s)dF_{st}(y)\right)ds+e^{-(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t} \qquad (9)$$

с граничным условием $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x,t)=1$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 1.

Теорема 2. Пусть эволюция капитала компании описывается уравнением (8).

1. Если случайные величины Y_i^{pr} и Y_i^{cl}, $i=\overline{1,\infty}$, имеют непрерывные на $[0,+\infty)$ плотности распределений $f_{pr}(y)$ и $f_{cl}(y)$ соответственно, а случайные величины Y_i^{st}, $i=\overline{1,\infty}$, имеют непрерывную на $(-\infty,+\infty)$ плотность распределения $f_{st}(y)$, то $\varphi(x,t)$ является непрерывной на $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ как функция двух переменных.

2. Если функции $f_{pr}(y)$, $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ имеют производные $f'_{pr}(y)$, $f'_{cl}(y)$ на $[0,+\infty)$ и $f'_{st}(y)$ на $(-\infty,+\infty)$ такие, что функции $|f'_{pr}(y)|$ и $|f'_{cl}(y)|$ интегрируемы и ограничены на $[0,+\infty)$, а функции $|f'_{st}(y)|$, $f_{st}(y)e^{-y}$ и $|f'_{st}(y)|e^{-y}$ интегрируемы и ограничены на $(-\infty,+\infty)$, то на $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ существуют частные производные $\varphi(x,t)$ по x и t, непрерывные как функции двух переменных, а $\varphi(x,t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}-\bar r x\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}+(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})\varphi(x,t)-\lambda_{pr}\int_0^{+\infty}\varphi(x+y,t)dF_{pr}(y)-$$

$$-\lambda_{cl}\int_0^{x}\varphi(x-y,t)\,dF_{cl}(y)-\lambda_{st}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(((1-\alpha)+\alpha e^{y})x,t)\,dF_{st}(y)=0 \qquad (10)$$

с граничными условиями $\varphi(x,0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x,t)=1$, при этом для всех $X_0>0$ и $T>0$ имеет место оценка

$$\sup_{\substack{x\in[X_0,+\infty),\\ t\in[0,T]}}\left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|\le\frac{1-e^{(\bar r-\lambda_{pr}-\lambda_{cl}-\lambda_{st})T}}{\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar r}\times$$

$$\times\left(\lambda_{pr}\left(f_{pr}(0)+\int_0^{+\infty}|f'_{pr}(y)|\,dy\right)+\lambda_{cl}\left(f_{cl}(0)+\int_0^{+\infty}|f'_{cl}(y)|\,dy\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_{st}}{\alpha X_0}\left((1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}f_{st}(y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}((1-\alpha)e^{-y}+\alpha)|f'_{st}(y)|\,dy\right)\right). \qquad (11)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, сначала сделаем замену переменной интегрирования $t-s=v$ во внешнем интеграле в правой части (9), а затем в случае существования плотностей распределений $f_{pr}(y)$, $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ у случайных величин Y_i^{pr}, Y_i^{cl} и Y_i^{st}, $i=\overline{1,\infty}$, заменим $xe^{\bar r(t-v)}+y=u$, $xe^{\bar r(t-v)}-y=u$ и $((1-\alpha)+\alpha e^{y})xe^{\bar r(t-v)}=u$ соответственно в первом, втором и третьем внутренних интегралах при $x \neq 0$. После этого получим

$$\varphi(x,t)=e^{-(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}\int\limits_0^t e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})v}\left(\lambda_{pr}\int\limits_{xe^{\bar r(t-v)}}^{+\infty}\varphi(u,v)f_{pr}(u-xe^{\bar r(t-v)})du+\right.$$

$$+\lambda_{cl}\int\limits_0^{xe^{\bar r(t-v)}}\varphi(u,v)f_{cl}(xe^{\bar r(t-v)}-u)du+\lambda_{st}\int\limits_{(1-\alpha)xe^{\bar r(t-v)}}^{+\infty}\frac{\varphi(u,v)}{u+(\alpha-1)xe^{\bar r(t-v)}}\times$$

$$\left.\times f_{st}(\ln(u/(\alpha xe^{\bar r(t-v)})+(\alpha-1)/\alpha))\,du\right)dv+e^{-(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}. \qquad (12)$$

Если функции $f_{pr}(y)$ и $f_{cl}(y)$ непрерывны на $[0,+\infty)$, а функция $f_{st}(y)$ непрерывна на $(-\infty,+\infty)$, то непрерывность $\varphi(x,t)$ как функции двух переменных в произвольной точке $(x_0,t_0)\in(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ следует из того, что, например, для всех $(x,t)\in(0,x_0]\times[0,t_0]$ выполнено

$$\left|\varphi(x_0,t_0)e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t_0}-\varphi(x,t)e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t}\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^t e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})v}\left(\lambda_{pr}\int\limits_{x_0e^{\bar r(t_0-v)}}^{M}|f_{pr}(u-x_0e^{\bar r(t_0-v)})-f_{pr}(u-xe^{\bar r(t-v)})|\,du+\right.$$

$$+2\lambda_{pr}(1-F_{pr}(M-x_0e^{\bar r t_0}))+\lambda_{pr}F_{pr}(x_0e^{\bar r(t_0-v)}-xe^{\bar r(t-v)})+$$

$$+\lambda_{cl}\int\limits_0^{xe^{\bar r(t-v)}}|f_{cl}(x_0e^{\bar r(t_0-v)}-u)-f_{cl}(xe^{\bar r(t-v)}-u)|\,du+\lambda_{cl}F_{cl}(x_0e^{\bar r(t_0-v)}-xe^{\bar r(t-v)})+$$

$$+\lambda_{st}\int\limits_{M_1(v)}^{M_2}f_{st}(\ln(u/(\alpha x_0e^{\bar r(t_0-v)})+(\alpha-1)/\alpha))/(u+(\alpha-1)x_0e^{\bar r(t_0-v)})-$$

$$-f_{st}(\ln(u/(\alpha xe^{\bar r(t-v)})+(\alpha-1)/\alpha))/(u+(\alpha-1)x_0e^{\bar r(t_0-v)})|\,du+$$

$$+2\lambda_{st}\left(1-F_{st}\left(\ln\left(\frac{M_2}{\alpha x_0e^{\bar r(t_0-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)+F_{st}\left(\ln\left(\frac{M_1(v)}{\alpha x_0e^{\bar r(t_0-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)\right)+$$

$$\left.+\lambda_{st}F_{st}\left(\ln\left(\frac{(1-\alpha)x_0e^{\bar r(t_0-v)}}{\alpha xe^{\bar r(t-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)\right)dv+e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t_0}-e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})t} \qquad (13)$$

(здесь функция $M_1(v)$ и числа M, M_2 такие, что $M>x_0e^{\bar r t_0}$, $(1-\alpha)x_0e^{\bar r(t_0-v)}<$ $<M_1(v)<M_2<+\infty$). Сначала выбором достаточно больших чисел M, M_2 и функции $M_1(v)$ такой, что $\sup\limits_{v\in[0,t_0]}|(1-\alpha)x_0e^{\bar r(t_0-v)}-M_1(v)|$ является достаточно малым, можно выражение

$$\lambda_{pr}(1-F_{pr}(M-x_0e^{\bar r t_0}))+$$

$$+\lambda_{st}\left(1-F_{st}\left(\ln\left(\frac{M_2}{\alpha x_0e^{\bar r(t_0-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)+F_{st}\left(\ln\left(\frac{M_1(v)}{\alpha x_0e^{\bar r(t_0-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)\right)$$

сделать достаточно малым, а затем сделать достаточно малой всю правую часть (13) при x и t, достаточно близких соответственно к x_0 и t_0.

Из равенства (12), установленной непрерывности $\varphi(x,t)$ и теорем [35, с. 661–662, 666–667, 748] следует существование непрерывных частных производных функции $\varphi(x,t)$ по x и t на $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ в случае, когда функции $f_{pr}(y)$, $f_{cl}(y)$ и $f_{st}(y)$ имеют производные $f'_{pr}(y)$, $f'_{cl}(y)$ и $f'_{st}(y)$, удовлетворяющие условию п. 2 теоремы 2, при этом

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}=e^{-(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar r)t}\int_0^t e^{(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar r)v}\Bigg(-\lambda_{pr}f_{pr}(0)\varphi(xe^{\bar r(t-v)},v)-$$

$$-\lambda_{pr}\int_{xe^{\bar r(t-v)}}^{+\infty}\varphi(u,v)f'_{pr}(u-xe^{\bar r(t-v)})du+\lambda_{cl}f_{cl}(0)\varphi(xe^{\bar r(t-v)},v)+$$

$$+\lambda_{cl}\int_0^{xe^{\bar r(t-v)}}\varphi(u,v)f'_{cl}(xe^{\bar r(t-v)}-u)du+\lambda_{st}\int_{(1-\alpha)xe^{\bar r(t-v)}}^{+\infty}\frac{\varphi(u,v)}{(u+(\alpha-1)xe^{\bar r(t-v)})^2}\times \tag{14}$$

$$\times\left((1-\alpha)f_{st}\left(\ln\left(\frac{u}{\alpha xe^{\bar r(t-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)-\frac{u}{xe^{\bar r(t-v)}}f'_{st}\left(\ln\left(\frac{u}{\alpha xe^{\bar r(t-v)}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right)\right)du\Bigg)dv,$$

а с учетом (12) и (14)

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=-(\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st})\varphi(x,t)+\lambda_{pr}\int_0^{+\infty}\varphi(x+y,t)f_{pr}(y)dy+$$

$$+\lambda_{cl}\int_0^x\varphi(x-y,t)f_{cl}(y)dy+\lambda_{st}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(((1-\alpha)+\alpha e^y)x,t)f_{st}(y)dy+\bar r x\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x},$$

откуда получаем уравнение (10).

Из (14) видно, что для всех $x>0$ и $t\ge 0$

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|\le e^{(\bar r-\lambda_{cl}-\lambda_{st})t}\int_0^t e^{(\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar r)v}(\lambda_{pr}f_{pr}(0)+\lambda_{pr}\int_0^{+\infty}|f'_{pr}(y)|dy+$$

$$+\lambda_{cl}f_{cl}(0)+\lambda_{cl}\int_0^{+\infty}|f'_{cl}(y)|dy+\frac{\lambda_{st}(1-\alpha)}{\alpha xe^{\bar r(t-v)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}f_{st}(y)dy+$$

$$+\frac{\lambda_{st}}{\alpha xe^{\bar r(t-v)}}\int_{-\infty}^{+\infty}((1-\alpha)e^{-y}+\alpha)|f'_{st}(y)|dy)\,dv,$$

поэтому для всех $X_0>0$ и $T>0$ справедлива оценка (11). Теорема доказана.

В этом случае имеет место замечание, аналогичное замечанию 2.

ТОЧНОСТЬ И НАДЕЖНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕРАЗОРЕНИЯ ИХ СТАТИСТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ

Предположим, что эволюция капитала $X_x(t)$ описывается уравнением (1) или (8). При произвольном фиксированном $T>0$ функция $\varphi(x,T)$ определена на $[0,+\infty)$. Выберем произвольные числа $X_0>0$, $X>X_0$ и поставим цель равномерно приблизить функцию $\varphi(x,T)$ ее статистической оценкой для всех $x\in[X_0,X]$ и получить соотношение, связывающее точность и надежность такого приближения. Возьмем произвольное достаточно малое число $h>0$ (так, что $h\ll X-X_0$) и обозначим

$$C_0 = \frac{1-e^{(\bar{r}-\lambda_{cl}-\lambda_{st})T}}{\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar{r}}, \qquad C_1 = \lambda_{cl}\,(f_{cl}(0)+\int_0^{+\infty}|f'_{cl}(y)|\,dy)$$

в случае классической модели риска или

$$C_0 = \frac{1-e^{(\bar{r}-\lambda_{pr}-\lambda_{cl}-\lambda_{st})T}}{\lambda_{pr}+\lambda_{cl}+\lambda_{st}-\bar{r}},$$

$$C_1 = \lambda_{pr}\left(f_{pr}(0)+\int_0^{+\infty}|f'_{pr}(y)|\,dy\right)+\lambda_{cl}\left(f_{cl}(0)+\int_0^{+\infty}|f'_{cl}(y)|\,dy\right)$$

в случае модели риска со стохастическими премиями, а также

$$C_2 = \frac{\lambda_{st}}{\alpha}\left((1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}f_{st}(y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}((1-\alpha)e^{-y}+\alpha)\,|f'_{st}(y)|\,dy\right),$$

$$h_1 = h,\ X_1 = X_0 + h_1,$$

$$h_i = h\frac{C_1 X_0 X_{i-1}+C_2 X_{i-1}}{C_1 X_0 X_{i-1}+C_2 X_0},\ X_i = X_{i-1}+h_i,\ i=\overline{2, K-1},$$

где $K = K(X - X_0, h, C_1, C_2)$ определяется из условия $X_{K-1} < X \le X_K$. Положим $h_K = X - X_{K-1}$.

Введем функцию $\overline{\varphi}_{h,X_0,X}(x,T)$, определенную при $x \in [X_0, X]$, следующим образом:

$$\overline{\varphi}_{h,X_0,X}(x,T) = \varphi(X_{i-1},T)+\frac{x-X_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}(\varphi(X_i,T)-(X_{i-1},T))$$

при $x \in [X_{i-1}, X_i)$, $i=\overline{1, K-1}$,

$$\overline{\varphi}_{h,X_0,X}(x,T) = \varphi(X_{K-1},T)+\frac{x-X_{K-1}}{X - X_{K-1}}(\varphi(X,T)-(X_{K-1},T))$$

при $x \in [X_{K-1}, X]$.

С помощью метода Монте-Карло моделируем N раз траектории каждого из процессов $X_{X_i}(t)$, $i=\overline{0, K-1}$, и $X_X(t)$ на интервале $[0,T]$. В результате моделирования разорения страховой компании не наступит $\nu_{X_i}(N)$ раз и $\nu_X(N)$ раз соответственно. Введем функцию $\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(x,T)$ — статистическую оценку вероятности неразорения $\varphi(x,T)$, определенную при $x \in [X_0, X]$, следующим образом:

$$\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X_i,T) = \frac{\nu_{X_i}(N)}{N},\ i=\overline{0, K-1},\ \hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X,T) = \frac{\nu_X(N)}{N},$$

$$\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(x,T) = \hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X_{i-1},T)+$$

$$+\frac{x-X_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}(\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X_i,T)-\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X_{i-1},T))$$

при $x \in (X_{i-1}, X_i)$, $i=\overline{1, K-1}$,

$$\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(x,T) = \hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X_{K-1},T)+\frac{x-X_{K-1}}{X - X_{K-1}}\times$$

$$\times(\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X,T)-\hat{\varphi}_{h,X_0,X}(X_{K-1},T))$$

при $x \in (X_{K-1}, X)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия п. 2 теоремы 1 (в случае классической модели риска) или теоремы 2 (в случае модели риска со стохастическими премиями), достаточные для существования частных производных функции $\varphi(x, t)$. Тогда в сделанных выше предположениях и обозначениях для произвольных $X_0 > 0$, $X > X_0$, $h \in (0, X - X_0)$ и $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{x \in [X_0, X]} |\varphi(x, T) - \hat{\varphi}_{h, X_0, X}(x, T)| \le \varepsilon + C_0 h\left(C_1 + \frac{C_2}{X_0}\right)\right\} \ge 1 - 2(K+1)e^{-2N\varepsilon^2}. \quad (15)$$

Доказательство. Так как на $(0, +\infty)$ производная функции $\varphi(x, T)$ существует, на интервалах $[X_i, X_{i+1})$, $i = \overline{0, K-2}$, с учетом теоремы Лагранжа о среднем имеем

$$|\varphi(x, T) - \overline{\varphi}_{h, X_0, X}(x, T)| \le |\varphi(X_{i+1}, T) - \varphi(X_i, T)| =$$

$$= \varphi'(\xi_{i+1}, T)\, h_{i+1} \le C_0 h_{i+1}\left(C_1 + \frac{C_2}{X_i}\right) = C_0 h\left(C_1 + \frac{C_2}{X_0}\right),$$

а на интервале $[X_{K-1}, X]$ получим

$$|\varphi(x, T) - \overline{\varphi}_{k, X_0, X}(x, T)| \le |\varphi(X, T) - \varphi(X_{K-1}, T)| =$$

$$= \varphi'(\xi_K, T) h_K \le C_0 h_K\left(C_1 + \frac{C_2}{X_{K-1}}\right) \le C_0 h\left(C_1 + \frac{C_2}{X_0}\right)$$

(здесь ξ_i — средние точки: $\xi_i \in [X_{i-1}, X_i]$ при $i = \overline{1, K-1}$, $\xi_K \in [X_{K-1}, X]$). Поэтому с учетом (4) или (11) для всех $X > X_0 > 0$ имеем

$$\sup_{x \in [X_0, X]} |\varphi(x, T) - \overline{\varphi}_{h, X_0, X}(x, T)| \le C_0 h\left(C_1 + \frac{C_2}{X_0}\right). \quad (16)$$

Введем случайные события

$$A_i^\varepsilon = \{|\overline{\varphi}_{h, X_0, X}(X_i, T) - \hat{\varphi}_{h, X_0, X}(X_i, T)| \le \varepsilon\}, \ i = \overline{0, K-1},$$

$$A_K^\varepsilon = \{|\overline{\varphi}_{h, X_0, X}(X, T) - \hat{\varphi}_{h, X_0, X}(X, T)| \le \varepsilon\}.$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева [36, с. 93] или неравенства Хефдинга [37] для произвольного $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\boldsymbol{P}\left\{\overline{A_i^\varepsilon}\right\} \le 2e^{-2\varepsilon^2 N}, \ i = \overline{0, K},$$

поэтому
$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{x \in [X_0, X]} |\overline{\varphi}_{h, X_0, X}(x, T) - \hat{\varphi}_{h, X_0, X}(x, T)| \le \varepsilon\right\} = \boldsymbol{P}\left\{\bigcup_{i=0}^{K} A_i^\varepsilon\right\} =$$

$$= 1 - \boldsymbol{P}\left\{\bigcup_{i=0}^{K} \overline{A_i^\varepsilon}\right\} \ge 1 - \sum_{i=0}^{K} \boldsymbol{P}\left\{\overline{A_i^\varepsilon}\right\} \ge 1 - 2(K+1)\, e^{-2\varepsilon^2 N}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует неравенство (15).

Замечание 3. Теорема 3 связывает точность и надежность приближения вероятности неразорения $\varphi(x, T)$ функцией $\hat{\varphi}_{h, X_0, X}(x, T)$ для всех $x \in [X_0, X]$.

Из (15) видно, что теоретически любая заданная точность приближения достигается выбором достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $h > 0$, а при заданной точности необходимая надежность обеспечивается выбором достаточно большого N — числа моделируемых реализаций. Действительно, даже поточечная точность метода Монте-Карло весьма ограничена: чтобы обеспечить заданную надежность 10^{-k} (здесь k — натуральное число), необходимо смоделировать $N=(k\ln 10+\ln 2)/(2\varepsilon^2)$ реализаций процесса риска при фиксированном начальном капитале, а это число быстро растет при стремлении ε к нулю. Например, если $k=2$, $\varepsilon=0.001$, то $N=2649159$. Поэтому с помощью метода Монте-Карло практически невозможно адекватно оценить вероятность неразорения при достаточно больших значениях начального капитала: для этого необходимо моделировать очень большое число реализаций процесса риска. Метод Монте-Карло значительно проще метода последовательных приближений, рассмотренного в [29–34], однако последний дает практически недостижимую для метода Монте-Карло точность оценки вероятности неразорения [28].

Замечание 4. В условиях теоремы 3 число $K=K(X-X_0,h,C_1,C_2)$ можно оценить сверху. Действительно, поскольку

$$h_i=h\frac{C_1X_0X_{i-1}+C_2X_{i-1}}{C_1X_0X_{i-1}+C_2X_0}=h\left(1+\frac{C_2(X_{i-1}-X_0)}{X_0(C_1X_{i-1}+C_2)}\right)>$$

$$>h\left(1+\frac{(i-1)hC_2}{X_0(C_1X+C_2)}\right),\ i=\overline{1,K-1},$$

обозначим

$$h_i'=h\left(1+\frac{(i-1)hC_2}{X_0(C_1X+C_2)}\right),\ i=\overline{1,K'},$$

где K' — наименьшее натуральное число такое, что $\sum_{i=1}^{K'}h_i'\geq X-X_0$. Из того, что

$$\sum_{i=1}^{K'}h_i'=h\sum_{i=1}^{K'}\left(1+\frac{(i-1)hC_2}{X_0(C_1X+C_2)}\right)=h\left(K'+\frac{hC_2K'(K'-1)}{2X_0(C_1X+C_2)}\right),$$

следует, что K' — наименьшее натуральное число такое, что

$$K'\geq\Bigg(hC_2-2X_0(C_1X+C_2)+$$

$$+\sqrt{(2X_0(C_1X+C_2)-hC_2)^2+8C_2X_0(C_1X+C_2)(X-X_0)}\Bigg)/2hC_2.$$

Очевидно, что $K\leq K'$. Найденное K' можно использовать в неравенстве (15) вместо K, при этом надежность приближения вероятности неразорения несколько снижается.

Пример. Пусть в классической модели риска величины страховых требований имеют показательное распределение со средним μ_{cl}, а величины скачков процесса $R_{st}(t)$ — нормальное распределение с параметрами $(0,\sigma_{st}^2)$, $\sigma_{st}>0$. Тогда в неравенстве (15)

$$C_1=\frac{2\lambda_{cl}}{\mu_{cl}},\ C_2=\frac{\lambda_{st}}{\alpha}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{st}}+(1-\alpha)e^{\sigma_{st}^2/2}(1+2\Phi(\sigma_{st}))\right),$$

где $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-z^2/2}dz$ — функция Лапласа.

Если, кроме того, в модели риска со стохастическими премиями величины премий имеют показательное распределение со средним μ_{pr}, то

$$C_1=\frac{2\lambda_{pr}}{\mu_{pr}}+\frac{2\lambda_{cl}}{\mu_{cl}}.$$

Например, при $c = 6$ (в классической модели риска) или $\lambda_{pr} = 3$, $\mu_{pr} = 2$ (в модели риска со стохастическими премиями), $\lambda_{cl} = 1$, $\mu_{cl} = 5$, $\lambda_{st} = 2$, $\sigma_{st} = 0.5$, $r = 0.001$, $r_{st} = 0.002$, $\alpha = 0.25$, $T = 1$, $X_0 = 1$, $X = 10$, $h = 0.0001$, точности 0.005 и надежности 0.99 получим $K = 23940$, при этом моделируется $N = 464400$ реализаций каждого из процессов $X_{X_i}(t)$, $i = \overline{0, K-1}$, и $X_{10}(t)$:

$$\boldsymbol{P}\left\{ \sup_{x \in [1,10]} |\varphi(x,1) - \hat{\varphi}_{0.0001,1,10}(x,1)| \le 0.005 \right\} \ge 0.99.$$

Результаты численных расчетов вероятности неразорения приведены в табл. 1 для различных значений α при $x = 10$.

Таблица 1.

Модель	Результаты численных расчетов вероятности неразорения				
	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.99$
Классическая	0.885852	0.885953	0.886387	0.881233	0.875031
Со стохастическими премиями	0.872103	0.874580	0.873232	0.870250	0.862411

Зная вероятности неразорения, страховая компания может принимать решение, например, относительно доли капитала α, инвестируемой в рисковый актив. В рассмотренном примере вероятность неразорения слабо зависит от α (при изменении числовых значений параметров модели, например, увеличении σ_{st}, эта зависимость может оказаться гораздо более сильной), однако из табл. 1 видно, что она несколько снижается, если в рисковый актив инвестируется большая доля капитала. Отметим, что в [14, 18] показано, что инвестирование в рисковый актив небезопасно с точки зрения вероятности разорения на бесконечном интервале времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены обобщения классической модели риска и модели риска со стохастическими премиями, когда страховая компания размещает весь свой капитал на финансовом (B, S)-рынке, а эволюция цены рискового актива описана процессом со скачками. Установлены достаточные условия существования частных производных вероятностей неразорения на конечном интервале времени и при этих условиях выведены интегро-дифференциальные уравнения в частных производных для вероятностей неразорения, а также оценены частные производные этих функций по начальному капиталу. В качестве одного из возможных применений полученных результатов выведены формулы, связывающие точность и надежность приближений вероятностей неразорения их статистическими оценками для всех значений начального капитала из некоторого конечного интервала. Это позволяет рассчитывать вероятности неразорения с любой заданной точностью, при этом необходимая надежность всегда обеспечивается достаточно большим числом реализаций процесса риска.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе и полезные рекомендации, способствующие усовершенствованию полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 260 с.
2. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — К.: Інформтехніка, 1995. — 380 с.

3. Эмбрехтс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики // Теория вероятностей и ее применения. — 1993. — **38**, вып. 2. — С. 374–416.
4. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Там же. — 2002. — **47**, вып. 3. — С. 549–553.
5. Livshits K.I. Probability of ruin of an insurance company for the Poisson model // Russian Physics J. — 1999. — **42**, N 4. — P. 394–399.
6. Бондарев Б.В., Жмихова Т.В. Модель Крамера–Лундберга зі стохастичними преміями за умови розміщення капіталу на банківському депозиті // Пр. Ін-ту прикладної математики і механіки НАН України. — 2008. — **16**. — С. 55–62.
7. Рагуліна О.Ю. Про диференційовність ймовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 82–116.
8. Klüppelberg C., Stadtmüller U. Ruin probabilities in the presence of heavy-tails and interest rates // Scandinavian Actuarial J. — 1998. — N 1. — P. 49–58.
9. Konstantinides D.G., Tang Q.H., Tsitsiashvili G.Sh. Two-sided bounds for ruin probability under constant interest force // J. Math. Sci. — 2004. — **123**, N 1. — P. 3824–3833.
10. Pervozvansky A.A., Jr. Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force // Insurance: Math. and Econom. — 1998. — **23** (3). — P. 287–295.
11. Sundt B., Teugels J.L. Ruin estimates under interest force // Ibid. — 1995. — **16** (1). — P. 7–22.
12. Андрощук М.О., Мішура Ю.С. Оцінка ймовірності банкрутства у моделі з інвестиціями у ризиковий актив за умови неможливості безвідсоткової позики // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2006. — № 1–2. — С. 4–13.
13. Братик М.В. Ймовірність банкрутства страхової компанії за можливості інвестування капіталу в кілька видів акцій // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2007. — Вип. 77. — С. 1–12.
14. Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S. In the insurance business risky investments are dangerous // Finance and Stochastics. — 2002. — **6** (2). — P. 227–235.
15. Hipp C., Plum M. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers // Ibid. — 2003. — **7** (3). — P. 299–321.
16. Андрощук М.О., Мішура Ю.С. Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії, яка функціонує на BS-ринку // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 11. — С. 1443–1453.
17. Андрощук М.О. Оцінка ймовірності банкрутства у моделі зі змінними преміями і з інвестиціями у облігацію та у декілька акцій // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2007. — Вип. 76. — С. 1–13.
18. Бондарев Б.В., Жмихова Т.В. Ймовірність банкрутства страхової компанії для узагальненої моделі Крамера–Лундберга за умови розміщення капіталу на фінансовому (B,S)-ринку // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2008. — № 1–2. — С. 24–62.
19. Бондарев Б.В., Смоляков А.И., Степанов Е.В. Об одной модели эволюции акции и соответствующей задаче Р. Мертона // Там же. — 2004. — № 2. — С. 11–21.
20. Cont R., Tankov P. Financial modelling with jump processes. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004. — 528 p.
21. Geman H. Pure jump Lévy processes for asset price modelling // J. Banking and Finance. — 2002. — **26** (7). — P. 1297–1316.
22. Merton R.C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. Financial Econometrics. — 1976. — **3** (1–2). — P. 125–144.
23. Press S.J. A compound events model for security prices // J. Business. — 1967. — **40** (3). — P. 317–335.
24. Бондарев Б.В., Орфиняк Е.Ю. Применение статистического моделирования для нахождения вероятности неразорения в классической задаче страхования. I // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 161–173.
25. Наконечный А.Н. Оценка Монте-Карло для вероятности разорения в сложной пуассоновской модели теории риска // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 160–162.

26. Н о р к и н Б. В. Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании // Там же. — 2008. — № 6. — С. 116–130.

27. Б е н и н г В. Е., К о р о л е в В. Ю. Непараметрическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска // Теория вероятностей и ее применения. — 2002. — **47**, вып. 1. — С. 3–20.

28. Н о р к и н Б. В. Распараллеливание методов оценки риска банкротства страховой компании // Теорія оптимальних рішень. — 2010. — № 9. — С. 33–39.

29. Н о р к и н Б. В. Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений теории процессов риска // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 61–73.

30. Н о р к и н Б. В. О вычислении вероятности банкротства непуассоновского процесса риска методом последовательных приближений // Пробл. упр. и информатики. — 2005. — № 2. — С. 133–144.

31. Н о р к и н Б. В. Применение метода последовательных приближений для нахождения вероятности неразорения страховой компании при наличии случайных премий // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 112–127.

32. Н о р к и н Б. В. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Там же. — 2006. — № 5. — С. 157–164.

33. Н о р к и н Б. В. О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 12. — С. 1689–1698.

34. Н о р к и н Б. В. Решение актуарного интегрального уравнения методом последовательных приближений для общего процесса риска-восстановления // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 68–81.

35. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. — Т. 2. — 800 с.

36. Ш и р я е в А. Н. Вероятность. — М.: МЦНМО, 2004. — Кн. 1: Вероятность-1. — 520 с.

37. H o e f f d i n g W. Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. the American Statistical Association. — 1963. — **58** (301). — P. 13–30.

Поступила 12.05.2011