УДК 532.546:539.3

О.А. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, нелинейная система, начально-краевая задача, обобщенное решение, метод конечных элементов, оценка приближенного обобщенного решения.*

В настоящей статье развит изложенный в работах [1, 2] комплексный подход, при котором математическая модель взаимосвязанных процессов влагопереноса–фильтрации и упругой деформации в грунтовой среде сформулирована в виде начально-краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений параболического и гиперболического типов, а нахождение приближенного решения этой задачи сведено к построению и исследованию приближенного обобщенного решения соответствующей начально-краевой задачи для общего операторного уравнения. Также предложено рассматривать в виде одной начально-краевой задачи взаимосвязанные процессы теплопереноса, влагопереноса и деформации в грунтовом массиве, поскольку на состояние и прочность грунтовых гидротехнических, мелиоративных объектов, покрытий автомобильных дорог и аэродромов, рельсошпальной решетки железнодорожной колеи, фундаментов сооружений и т.п. существенное влияние оказывают сезонные изменения температур, следствием которых может являться морозное пучение связных грунтов, потеря ими несущей способности по причине осадки и переувлажнения при оттаивании.

Для моделирования процессов тепло-, влагопереноса в грунтовом массиве, как находящемся в положительном диапазоне температур, так и в промерзающем, используется математическая модель [3, 4], учитывающая фазовые переходы во всем объеме массива без выделения фронта промерзания. Модель представляет собой начально-краевую задачу для нелинейной системы двух дифференциальных уравнений параболического типа: уравнения теплопереноса и уравнения влагопереноса, записанного относительно некоторого «фиктивного» влагосодержания; теплообменные и массообменные характеристики грунта являются функциями суммарной влажности. Такая постановка задачи позволяет, используя известные априори соотношения зависимости количества незамерзшей воды от суммарной влажности грунта до момента начала промерзания, температуры начала замерзания и величины отрицательной температуры, определять приближенные значения суммарной влажности, количества незамерзшей воды и льда в каждой точке грунтового массива в любой момент времени. Представленные в [3, 4] результаты расчетов, полученные, как и в работе [5], без учета в уравнении теплопереноса составляющей конвективного переноса, соответствуют экспериментальным данным о характере перераспределения суммарной влажности вблизи фронта промерзания.

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния грунтового массива, находящегося под воздействием изменений температурного режима, необходимо учитывать, что модули упругости и коэффициент Пуассона ν существенно отличаются для мерзлого и талого грунтов. Отметим также, что модули упругости грунта зачастую зависят от деформаций (могут уменьшаться или увеличиваться в 1,5–4 раза) [6, 7], т.е. обыкновенная линейно-упругая модель сплошной среды может приводить к принципиальным отличиям от экспериментальных данных [7]. Поэтому, считая модули упругости зависимыми от деформаций, для определения напряженно-деформированного состояния грунта получаем нелинейную систему двух гиперболических уравнений, а влияние процессов влагопереноса–фильтрации в ней учитываем заданием в векторе массовых сил градиента напора, выраженного градиентом функции влагосодержания, исходя из известных соотношений зависимости напора от количества незамерзшей воды [4]. В свою очередь, коэффициенты уравнения влагопереноса зависят от объемной деформации θ [8].

Таким образом, для двухмерного случая исследование взаимосвязанных процессов тепло-, влагопереноса и упругой деформации сведется к рассмотрению начально-краевой задачи для нелинейной системы четырех дифференциальных уравнений: двух уравнений параболического типа и двух — гиперболического. Сформулируем задачу следующим образом:

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial w_1}{\partial t} - \operatorname{div}\,(k_1(x, w_2)\operatorname{grad} w_1) - k_0\dfrac{\partial w_2}{\partial t} = f_1(x, t), \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} - \operatorname{div}(k_2(x, w_2, u)\operatorname{grad} w_2) = f_2(x, t), \\ \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (Au)(x, w, u) + G(x, w_2)\operatorname{grad} w_2 = F(x, t),\ (x, t)\in\Omega_T,\ \Omega_T = \Omega\times(0, T], \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^{\mathrm{T}}$, $w(x, t) = (w_1(x, t), w_2(x, t))^{\mathrm{T}}$, $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$; коэффициент

$$k_2(x, w_2, u) = k_2(x, w_2, \theta),\ \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \tag{2}$$

A — оператор теории упругости

$$(Au)(x, w, u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tau_{x_1x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\tau_{x_1x_2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{x_2} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{x_1} = \lambda(x, w, u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu(x, w, u)\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{x_2} = \lambda(x\ w, u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu(x, w, u)\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\tau_{x_1x_2} = \mu(x, w, u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

с коэффициентами $\lambda(x, w, u), \mu(x, w, u)$ [2, 9] вида

$$\begin{aligned} \lambda(x, w, u) &= b_1(x, \nu(w))E\left(x, w, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right), \\ \mu(x, w, u) &= b_2(x, \nu(w))E\left(x, w, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right); \end{aligned} \tag{3}$$

функции $k_1(x, w_2)$, $k_2(x, w_2, u)$, $G(x, w_2)$, $f_i(x, t)$, $b_i(x, \nu)$, $i = 1, 2$, $\nu(w)$, $E\left(x, w, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ и компоненты вектор-функции $F(x, t) = (F_1(x, t), F_2(x, t))^{\mathrm{T}}$ обладают достаточной гладкостью; $c, \rho,\ k_0$ — положительные константы.

Краевые условия сформулируем следующим образом [3, 4]:

$$\frac{\partial w_1}{\partial n} = 0,\ (x, t)\in\Gamma_1\times(0, T], \tag{4}$$

$$k_1\frac{\partial w_1}{\partial n} = k(w_1 - \chi(x, t)),\ (x, t)\in\Gamma_2\times(0, T], \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial n} = 0,\ (x, t)\in(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times(0, T], \tag{6}$$

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T], \tag{7}$$

$$\sigma_n = S(x, t),\ \tau_s = \hat{S}(x, t),\ (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T], \tag{8}$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$; n — внешняя нормаль к контуру; σ_n, τ_s — нормальная и касательная составляющие вектора напряжений; $\chi(x, t)$, $S(x, t)$, $\hat{S}(x, t)$ — заданные функции достаточной гладкости; $k = \mathrm{const} > 0$.

Примем следующие начальные условия:

$$w(x, 0) = w_0(x),\ u(x, 0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = q_0(x),\ x \in \overline{\Omega}; \tag{9}$$

будем полагать известной на момент $t = 0$ динамику процессов тепло-, влагопереноса, т.е.

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = p_0(x),\ x \in \overline{\Omega}. \tag{10}$$

Здесь $w_0 = (w_0^1, w_0^2)^{\mathrm{T}}$, $u_0 = (u_0^1, u_0^2)^{\mathrm{T}}$, $q_0 = (q_0^1, q_0^2)^{\mathrm{T}}$, $p_0 = (p_0^1, p_0^2)^{\mathrm{T}}$ — заданные вектор-функции достаточной гладкости.

Обозначим Z множество вектор-функций $h(x, t) = (w(x, t), u(x, t))^{\mathrm{T}} = (h_1(x, t), h_2(x, t))^{\mathrm{T}} = (h_{11}(x, t), h_{12}(x, t), h_{21}(x, t), h_{22}(x, t))^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих главному краевому условию (7), компоненты которых вместе с компонентами $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$, $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x, t)$ $\forall t \in (0, T]$, $\frac{\partial h}{\partial t}(x, 0)$, $h(x, 0)$ принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$, смешанные производные $\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_k \partial t} = \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t \partial x_k}$, $i, j, k = 1, 2$, почти всюду и принадлежат $L_2(\Omega)$.

Пусть множеству Z_0 принадлежат вектор-функции $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}} = (z_{11}(x), z_{12}(x), z_{21}(x), z_{22}(x))^{\mathrm{T}}$, компоненты которых принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$ и $z_{21} = z_{22} = 0$, $x \in \Gamma_1$.

Слабую форму начально-краевой задачи (1), (4)–(10) с учетом формулы Грина и условий (4)–(6), (8) запишем следующим образом:

$$m\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, z\right) + \overline{m}\left(\frac{\partial h}{\partial t}, z\right) + a(h; h, z) + r(h; h, z) = (\widetilde{F}, z)\ \ \forall z \in Z_0,\ \ \forall t \in (0, T], \tag{11}$$

$$\langle h(x, 0), z(x)\rangle = \langle \widetilde{H}^0(x), z(x)\rangle,\ \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0), z(x)\right\rangle = \langle \widetilde{H}^1(x), z(x)\rangle\ \ \forall z \in Z_0, \tag{12}$$

где

$$m\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, z\right) = \rho \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 h_{21}}{\partial t^2} z_{21} + \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} z_{22}\right) d\Omega;$$

$$\overline{m}\left(\frac{\partial h}{\partial t}, z\right) = \iint_{\Omega} \left(c \frac{\partial h_{11}}{\partial t} z_{11} + \frac{\partial h_{12}}{\partial t} z_{12}\right) d\Omega;$$

$$a(h; h, z) = \mathbf{W}_1(h; h_{11}, z_{11}) + \mathbf{W}_2(h; h_{12}, z_{12}) + \mathbf{W}_3(h; h_2, z_2),$$

$$\mathbf{W}_1(h; h_{11}, z_{11}) = \iint_{\Omega} k_1(x, h_{12}) \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial z_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial z_{11}}{\partial x_2}\right) d\Omega,$$

$$\mathbf{W}_2(h; h_{12}, z_{12}) = \iint_{\Omega} k_2(x, h_{12}, h_2) \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial z_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial z_{12}}{\partial x_2}\right) d\Omega,$$

$$\mathbf{W}_3(h; h_2, z_2) = \iint_{\Omega} \Bigg[\lambda(x, h)\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial h_{22}}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial z_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial z_{22}}{\partial x_2}\right) +$$

$$+2\mu(x,h)\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_1}\frac{\partial z_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial h_{22}}{\partial x_2}\frac{\partial z_{22}}{\partial x_2}\right)+\mu(x,h)\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial h_{22}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial z_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial z_{22}}{\partial x_1}\right)\Bigg]d\Omega;$$

$$r(h;h,z)=\iint_{\Omega}G(x,h_{12})\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}z_{21}+\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}z_{22}\right)d\Omega-$$

$$-\int_{\Gamma_2}k\,h_{11}z_{11}d\Gamma-\iint_{\Omega}k_0\frac{\partial h_{12}}{\partial t}z_{11}d\Omega;$$

$$(\widetilde{F},z)=\iint_{\Omega}(f_1z_{11}+f_2z_{12}+F_1z_{21}+F_2z_{22})\,d\Omega+$$

$$+\int_{\Gamma_2}(S(x,t)z_{2,n}+\hat{S}(x,t)z_{2,s})d\Gamma-\int_{\Gamma_2}k\chi(x,t)z_{11}d\Gamma;$$

$$\widetilde{H}^0(x)=(w_0(x),u_0(x))^{\mathrm{T}};\ \widetilde{H}^1(x)=(p_0(x),q_0(x))^{\mathrm{T}};\qquad(13)$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (4)–(10) называется вектор-функция $h(x,t)\in Z$, которая для любой вектор-функции $z(x)\in Z_0$ удовлетворяет интегральным соотношениям (11), (12).

Непрерывное по времени приближенное обобщенное решение будем искать методом конечных элементов (МКЭ) в конечно-измеримом подпространстве $Z^N\subset Z$ [10]. Произвольную вектор-функцию $h^N(x,t)\in Z^N$ можно записать в виде

$$h^N(x,t)=\sum_{j=1}^{N'}\alpha_j(t)\,\Phi_j(x),\qquad(14)$$

где $N'=4(N_0+N_2)+2N_1$ — количество базисных функций, соответствующих всем $N=N_0+N_1+N_2$ узловым точкам в разбиении области $\overline{\Omega}$; N_0 — количество узловых точек, не принадлежащих $\Gamma_1\cup\Gamma_2$; N_i — количество узловых точек, принадлежащих Γ_i, $i=\overline{1,2}$; $\alpha_j(t)$, $j=\overline{1,N'}$, — функции, интегрируемые вместе со второй производной на $[0,T]$; $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N'}$ — базис пространства Z_t^N, которое получается из Z^N фиксированием $\forall t\in[0,T]$. Компоненты этого базиса имеют вид

$$\Phi_i=(\varphi_i,0,0,0)^{\mathrm{T}},\ \Phi_{N+i}=(0,\varphi_i,0,0)^{\mathrm{T}},\quad i=\overline{1,N},$$

$$\Phi_{2N+2i-1}=(0,0,\varphi_i,0)^{\mathrm{T}},\ \Phi_{2N+2i}=(0,0,0,\varphi_i)^{\mathrm{T}},\ \ i=\overline{1,N_0+N_2},$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ — совокупность линейно независимых функций, соответствующих узловым точкам МКЭ, построенных на полных полиномах степени k $(k=1,2,3)$ и имеющих в $\overline{\Omega}$ ограниченный носитель.

Базис подпространства $Z_0^N\subset Z_0$ аналогично состоит из N' вектор-функций Φ_j, которые соответствуют функциям $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,N}$, т.е. любую вектор-функцию $z^N(x)\in Z_0^N$ можно представить в виде

$$z^N(x)=\sum_{j=1}^{N'}\beta_j\Phi_j(x),\qquad(15)$$

где β_j — константы.

Приближенное решение $h^N(x,t)\in Z^N$ задачи (11), (12) удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$m\left(\frac{\partial^2h^N}{\partial t^2},z^N\right)+\overline{m}\left(\frac{\partial h^N}{\partial t},z^N\right)+a(h^N;h^N,z^N)+r(h^N;h^N,z^N)=(\widetilde{F},z^N),\quad(16)$$

$$\langle h^N(x,0), z^N(x)\rangle = \langle \widetilde{H}^0(x), z^N(x)\rangle,$$
$$\left\langle \frac{\partial h^N}{\partial t}(x,0), z^N(x)\right\rangle = \langle \widetilde{H}^1(x), z^N(x)\rangle \quad \forall z^N \in Z_0^N, \ \forall t \in (0,T]. \tag{17}$$

Для вектор-функции вида $v=(v_1, v_2)^{\mathrm{T}} = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})^{\mathrm{T}}$ и для скалярной функции u определим следующие нормы:

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \|v_i\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \iint_\Omega (v_{i1}^2 + v_{i2}^2) d\Omega;$$
$$\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \|v_i\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \iint_\Omega \sum_{j,k=1}^2 \left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega;$$
$$|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} = |v\|^2_{L_2(\Omega)} + |v\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \ \|v\|^2_{W_2^0(\Omega)} = \|v\|^2_{L_2(\Omega)};$$
$$\|v\|^2_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le|k|} \|D^\alpha v\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2;$$
$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|; \ \|u\|_{L_\infty(\Omega_T)} = \sup_{(x,t)\in\Omega_T} |u(x,t)|;$$
$$\|v\|^2_{L_\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T]} \|v\|^2_X; \ \|v\|^2_{L_2(0,T;X)} = \int_0^T \|v\|^2_X \, dt,$$

где k, α_1, α_2 — неотрицательные целые числа, пространство X — это $H_0^1(\Omega)$ или $W_2^k(\Omega)$.

Пусть выполняются такие условия:

$$0 < \kappa_0^1 \le |k_1(x, v_{12})| \le \kappa_1^1, \ 0 < \kappa_0^2 \le |k_2(x, v_{12}, v_2)| \le \kappa_1^2,$$
$$|k_1(x, v_{12}) - k_1(x, u_{12})| \le \kappa_2^1 |v_{12} - u_{12}|,$$
$$|k_2(x, v_{12}, v_2) - k_2(x, u_{12}, u_2)| \le \kappa_2^2 \left(|v_{12} - u_{12}| + \left|\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right| \right);$$
$$0 < d_0 \le |G(x, v_{12})| \le d_1, \ |G(x, v_{12}) - G(x, u_{12})| \le d_2 |v_{12} - u_{12}|;$$
$$0 < m_0 \le |b_i(x, \nu(v_1))| \le m_1, \ 0 < E_0 \le \left| E\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \right| \le E_1,$$
$$\left| E\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) - E\left(x, u_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \right| \le$$
$$\le E_2 \left(|v_1 - u_1| + \left|\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right| \right);$$
$$|(k_i)'_t| \le \kappa_3^i, \ |(b_i)'_t| \le m_2, \ |E'_t| \le E_3, \quad |(k_i)''_{tt}| \le \kappa_4^i, \quad |(b_i)''_{tt}| \le m_3, \ |E''_{tt}| \le E_4;$$
$$\forall t \in [0,T] \ k_1(x, v_{12}), \ k_2(x, v_{12}, v_2), \ b_i(x, \nu(v_1)), \ E\left(x, v_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \in C^1(\Omega);$$
$$(k_i)'_{x_j}, (k_i)''_{tx_j}, \ (k_i)'''_{ttx_j}, \ (b_i)'_{x_j}, \ (b_i)''_{tx_j}, \ (b_i)'''_{ttx_j}, \ E'_{x_j}, \ E''_{tx_j}, \ E'''_{ttx_j} \in L_\infty(\Omega_T),$$
$$i, j = 1, 2, \ v, u \in Z. \tag{18}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $h(x, t) \in Z$ — решение задачи (10), (11), а $h^N(x, t) \in Z^N$ — решение задачи (16), (17). Предположим, что $\widetilde{H}^0(x), \widetilde{H}^1(x) \in W_2^{k+1}(\Omega)$; $h, \dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} \in L_2(0, T; W_2^{k+1}(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$. Тогда существует константа C такая, что выполняется оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(h(x,t) - h^N(x,t)) \right\|_{L_\infty(0,T;\, W_2^1(\Omega))} + \| h(x,t) - h^N(x,t) \|_{L_\infty(0,T;\, W_2^1(\Omega))} \le C s^k, \quad (19)$$

где C зависит от T, констант из (18) и норм $\| h \|_{L_2(0,T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\| h'_t \|_{L_2(0,T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\| h''_{tt} \|_{L_2(0,T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}$; s — максимальная длина сторон треугольников, $k = 1, 2, 3$ — степень многочленов МКЭ.

Доказательство. Положим

$$\psi = h^N - \widetilde{h}, \ \eta = h - \widetilde{h}, \ l = h - h^N, \quad (20)$$

где $\widetilde{h} = \widetilde{h}(x, t) \in Z^N$ и $\forall t \in (0, T]$ удовлетворяет условию

$$a(h; h - \widetilde{h}, z) + \kappa_0^1 \langle k_1(x, h_{12})(h_{11} - \widetilde{h}_{11}), z_{11} \rangle +$$

$$+ \kappa_0^2 \langle k_2(x, h_{12}, h_2)(h_{12} - \widetilde{h}_{12}), z_{12} \rangle +$$

$$+ \widetilde{m}_0 \left\langle E\left(x, h_1, \frac{\partial h_2}{\partial x_1}, \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)(h_2 - \widetilde{h}_2), z_2 \right\rangle = 0 \quad \forall z \in Z_0^N, \quad (21)$$

в котором a имеет вид (13), $\widetilde{m}_0 = \min\{m_0, E_0\}$.

Тогда, используя соотношения (11), (13), (16), (20), (21) и полагая $z := \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$, получаем

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + a\left(h^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = m\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{m}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) +$$

$$+ a\left(h; \widetilde{h}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - a\left(h^N; \widetilde{h}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + r\left(h; h, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - r\left(h^N; h^N, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) -$$

$$- \kappa_0^1 \left\langle k_1(x, h_{12}) \eta_{11}, \frac{\partial \psi_{11}}{\partial t} \right\rangle - \kappa_0^2 \left\langle k_2(x, h_{12}, h_2) \eta_{12}, \frac{\partial \psi_{12}}{\partial t} \right\rangle -$$

$$- \widetilde{m}_0 \left\langle E\left(x, h_1, \frac{\partial h_2}{\partial x_1}, \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right) \eta_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\rangle \quad \forall t \in (0, T]. \quad (22)$$

Исходя из обозначений (13), запишем равенства

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} m\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right),$$

$$a\left(h^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^N; \psi, \psi) - \frac{1}{2} \widetilde{a}(h^N; \psi, \psi), \quad (23)$$

где

$$\widetilde{a}(h^N; \psi, \psi) = \iint_\Omega \left((k_1)'_t (x, h_{12}^N) \left(\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x_2}\right)^2 \right) + \right.$$

$$+(k_2)'_t(x,h_{12}^N,h_2^N)\left(\left(\frac{\partial\psi_{12}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_{12}}{\partial x_2}\right)^2\right)+\lambda'_t(x,h^N)\left(\frac{\partial\psi_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_{22}}{\partial x_2}\right)^2+$$

$$\left.+2\mu'_t(x,h^N)\left(\left(\frac{\partial\psi_{21}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_{22}}{\partial x_2}\right)^2\right)+\mu'_t(x,h^N)\left(\frac{\partial\psi_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_{22}}{\partial x_1}\right)^2\right)d\Omega\quad\forall t\in(0,T].$$

Из последнего равенства, соотношений (3) и условий (18) следует

$$\frac{1}{2}\widetilde{a}(h^N;\psi,\psi)\le\widetilde{c}\,||\psi||^2_{H_0^1(\Omega)}\quad\forall t\in(0,T],\tag{24}$$

где константа $\widetilde{c}$ зависит от $m_i,\kappa_3^i,E_1,E_3,\ i=1,2$.

Оценим разность r из правой части (22). Используя (13), (18) и оценку [11], получаем

$$\left|r\left(h,h,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-r\left(h^N,h^N,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right|\le$$

$$\le\hat{c}\left(||\eta_1||^2_{W_2^1(\Omega)}+||\psi_1||^2_{W_2^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}\right),$$

где $\hat{c}$ зависит от $d_i,k,k_0,\ \left\|\frac{\partial\widetilde{h}_{12}}{\partial x_i}\right\|,\ i=1,2$.

Подставим в равенство (22) соотношения (23) и оценим его правую часть с учетом (2), (3), (13), (18), (24) и последней оценки. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+a(h^N;\psi,\psi)\right]\le c_1\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+||\psi||^2_{W_2^1(\Omega)}\right)+$$

$$+c_2\left(\left\|\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+||\eta||^2_{W_2^1(\Omega)}\right)\quad\forall t\in(0,T],\tag{25}$$

где константы c_1, c_2 зависят от $c,\rho,\ \widetilde{c},\ \hat{c},\ \kappa_s^i,\ m_1,\ E_2,\ E_3,\ \widetilde{m}_0,\ \left\|\frac{\partial\widetilde{h}_{li}}{\partial x_j}\right\|_{L_\infty(\Omega_T)}$, $i,j,l=1,2;\ s=\overline{0,3}$.

Для положительно-определенных форм справедливы следующие соотношения:

$$m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\rho\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)},\quad a(w^N;\psi,\psi)\ge c_3||\psi||^2_{H_0^1(\Omega)}\quad\forall t\in(0,T],\tag{26}$$

где c_3 зависит от $\kappa_0^i,\ m_0,\ E_0,\ i=1,2$.

Следуя выкладкам в [1], из оценки (25) с учетом (26) получаем оценку

$$\left\|\frac{\partial l}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}+||l||_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}\le$$

$$\le c_4\left(\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+||\eta||_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\right).\tag{27}$$

Далее пространство Z представим в виде следующей прямой суммы трех пространств $Z=Z_1\oplus Z_2\oplus Z_3$. Элементами каждого из Z_i, $i=\overline{1,3}$, являются соответствующие компоненты $h_{11}(x,t),h_{12}(x,t),h_2(x,t)$ вектор-функции $h(x,t)\in Z$. Аналогично запишем $Z_t=Z_{t,1}\oplus Z_{t,2}\oplus Z_{t,3}$, где Z_t — пространство, получаемое из Z фиксированием $\forall t\in(0,T]$; $Z^N=Z_1^N\oplus Z_2^N\oplus Z_3^N$, $Z_0^N=Z_{0,1}^N\oplus Z_{0,2}^N\oplus Z_{0,3}^N$.

Введем на Z_t форму

$$a_t(p,q) = a_t^1(p_{11}, q_{11}) + a_t^2(p_{12}, q_{12}) + a_t^3(p_2, q_2),$$

где

$$a_t^1(p_{11}, q_{11}) = \mathbf{W}_1(p; p_{11}, q_{11}) + \kappa_0^1 \langle k_1(x, p_{12}) p_{11}, q_{11} \rangle, \;\; p_{11}, q_{11} \in Z_{t,1};$$

$$a_t^2(p_{12}, q_{12}) = \mathbf{W}_2(p; p_{12}, q_{12}) + \kappa_0^2 \langle k_2(x, p_{12}, p_2) p_{12}, q_{12} \rangle, \;\; p_{12}, q_{12} \in Z_{t,2};$$

$$a_t^3(p_2, q_2) = \mathbf{W}_3(p; p_2, q_2) + \widetilde{m}_0 \left\langle E\left(x, p_1, \frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right) p_2, q_2 \right\rangle, \;\; p_2, q_2 \in Z_{t,3}.$$

Для оценок норм $\eta, \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ используем уже известные результаты. Из [12] следует, что для формы $a_t(p,q)$, определенной таким образом, и при выполнении условий теоремы и условия (21) для $p = \eta = w - \widetilde{w}$ справедливы оценки

$$\| \eta \|_{L_2(\Omega)}(t) \le S_1 s^{k+1} \| h \|_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t), \;\; \| \eta \|_{H_0^1(\Omega)}(t) \le S_2 s^k \| h \|_{W_2^{k+1}(\Omega)}(t), \quad (28)$$

где S_1, S_2 — некоторые константы, зависящие от $c_3, m_l, \kappa_l^i, E_l$, $l = 0, 1$, $i = 1, 2$, и не зависящие от h, s.

Оценки норм $\dfrac{\partial \eta}{\partial t}(x, \cdot)$, $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(x, \cdot)$ в пространствах $L_2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, аналогичные оценкам (28), выводятся согласно [12].

Таким образом, существует константа c_5, зависящая от m_l, κ_s^i, E_s, $l = \overline{0, 3}$, $i = \overline{1, 2}$, $s = \overline{0, 4}$, из (18) и норм $\| h \|_{L_2(0,T; W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\| h'_t \|_{L_2(0,T; W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\| h''_{tt} \|_{L_2(0,T; W_2^{k+1}(\Omega))}$, такая, что

$$\left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(0,T; W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T; W_2^1(\Omega))} + \| \eta \|_{L_2(0,T; W_2^1(\Omega))} \le c_5 s^k. \quad (29)$$

Из неравенств (27), (29) следует оценка (19).

Теорема доказана.

Для оценки дискретного по времени приближенного обобщенного решения используем схему Кранка–Николсона [1, 10].

Пусть $T = J\tau$ для некоторого целого $J \ge 1$. Будем искать последовательность $\{H^j(x)\}_{j=0}^J \subset Z_t^N$ такую, чтобы H^j аппроксимировало $h^N \in Z^N$ оптимально в $W_2^1(\Omega)$. Определим следующие соотношения:

$$\partial_\tau P^j = \frac{1}{\tau}(P^{j+1} - P^j), \;\; P^{j+1/2} = \frac{1}{2}(P^{j+1} + P^j), \;\; j = \overline{0, J-1}. \quad (30)$$

Схему Кранка–Николсона для задачи Коши (16), (17) запишем в виде

$$\langle H^0, z^N \rangle = \langle \widetilde{H}^0, z^N \rangle \quad \forall z^N \in Z_0^N, \quad (31)$$

$$\langle \theta^0, z^N \rangle = \langle \widetilde{H}^1, z^N \rangle \quad \forall z^N \in Z_0^N, \quad (32)$$

$$m(\partial_\tau \theta^j, z^N) + \overline{m}(\theta^{j+1/2}, z^N) + a(H^{j+1/2}; H^{j+1/2}, z^N) +$$
$$+ r(H^{j+1/2}; H^{j+1/2}, z^N) = (\widetilde{F}^{j+1/2}, z^N) \quad \forall z^N \in Z_0^N, \quad (33)$$

$$H^{j+1} = H^j + \tau \theta^{j+1/2}, \; j = \overline{0, J-1}. \quad (34)$$

Здесь

$$H^{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i^{j+1} \Phi_i(x), \;\; \theta^{j+1}(x) = \sum_{i=1}^{N'} d_i^{j+1} \Phi_i(x), \;\; j = \overline{0, J-1}. \quad (35)$$

Теорема 2. Пусть $h(x,t)$ — решение задачи (11), (12) и $\{H^j(x)\}_{j=0}^J \subset Z_t^N$ — решение задачи (31)–(34). Предположим, что выполняются условия (18) и $h \in W_2^{k+1}(\Omega)$. Тогда существует константа $C = C(T) > 0$, не зависящая от s, τ и такая, что

$$\max_{0\le j\le J} \| H^j - h^j \|_{W_2^1(\Omega)} \le C(s^k + \tau^2).$$

Доказательство. Запишем уравнение (11) при $t_{j+1/2} = (j+1/2)\tau$ в виде

$$m\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^j + \rho^j,\, z^N\right) + \overline{m}(\partial_\tau h^j + \sigma^j,\, z^N) + a(h^{j+1/2} + \delta^j;\, h^{j+1/2} + \delta^j,\, z^N) +$$

$$+\, r(h^{j+1/2} + \delta^j;\, h^{j+1/2} + \delta^j,\, z^N) = (\widetilde{F}^{j+1/2} + \gamma^j,\, z^N) \quad \forall z^N \in Z_0^N,\; j = \overline{0, J-1}, \tag{36}$$

где

$$\rho^j = O(\tau^2),\;\; \delta^j = O(\tau^2),\;\; \sigma^j = O(\tau^2),\;\; \gamma^j = O(\tau^2). \tag{37}$$

Введем следующие обозначения:

$$\eta^j = h^j - \widetilde{h}^j,\;\; \psi^j = H^j - \widetilde{h}^j,\;\; \xi^j = \theta^j - \left(\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t}\right)^j, \tag{38}$$

где $\widetilde{h}^j \in Z^N$ удовлетворяет условию

$$a(h^{j+1/2} + \delta^j;\, h^{j+1/2} + \delta^j - \widetilde{h}^{j+1/2} - \zeta^j,\, z^N) +$$
$$+\, \kappa_0^1 \langle k_1(x, h_{12}^{j+1/2} + \delta_{12}^j)(h_{11}^{j+1/2} + \delta_{11}^j - \widetilde{h}_{11}^{j+1/2} - \zeta_{11}^j),\, z_{11}^N \rangle +$$
$$+\, \kappa_0^2 \langle k_2(x, h_{12}^{j+1/2} + \delta_{12}^j, h_2^{j+1/2} + \delta_2^j)(h_{12}^{j+1/2} + \delta_{12}^j - \widetilde{h}_{12}^{j+1/2} - \zeta_{12}^j),\, z_{12}^N \rangle +$$
$$+\, \widetilde{m}_0 \left\langle E\left(x, h_1^{j+1/2} + \delta_1^j, \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2^{j+1/2} + \delta_2^j), \frac{\partial}{\partial x_2}(h_2^{j+1/2} + \delta_2^j)\right) \times\right.$$
$$\left.\times\, (h_2^{j+1/2} + \delta_2^j - \widetilde{h}_2^{j+1/2} - \zeta_2^j),\, z_2^N \right\rangle = 0 \quad \forall z^N \in Z_0^N,\; j = \overline{0, J-1}, \tag{39}$$

в котором a имеет вид (13), $\widetilde{m}_0$ выбирается как в (21), $\zeta^j = O(\tau^2)$.

С учетом обозначений (38) и соотношений (33), (36), (13), (39) можем записать:

$$m(\partial_\tau \xi^j,\, z^N) + \overline{m}(\partial_\tau \psi^j,\, z^N) + a(H^{j+1/2};\, \psi^{j+1/2},\, z^N) = m\left(\partial_\tau\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^j + \rho^j,\, z^N\right) +$$
$$+\, \overline{m}(\partial_\tau \eta^j + \sigma^j,\, z^N) + a(h^{j+1/2} + \delta^j;\, \widetilde{h}^{j+1/2} + \zeta^j,\, z^N) - a(H^{j+1/2};\, \widetilde{h}^{j+1/2},\, z^N) +$$
$$+\, r(h^{j+1/2} + \delta^j;\, h^{j+1/2} + \delta^j,\, z^N) - r(H^{j+1/2};\, H^{j+1/2},\, z^N) -$$
$$-\, \kappa_0^1 \langle k_1(x, h_{12}^{j+1/2} + \delta_{12}^j)(\eta_{11}^{j+1/2} + \delta_{11}^j - \zeta_{11}^j),\, z_{11}^N \rangle -$$
$$-\, \kappa_0^2 \langle k_2(x, h_{12}^{j+1/2} + \delta_{12}^j, h_2^{j+1/2} + \delta_2^j)(\eta_{12}^{j+1/2} + \delta_{12}^j - \zeta_{12}^j),\, z_{12}^N \rangle -$$
$$-\, \widetilde{m}_0 \left\langle E\left(x, h_1^{j+1/2} + \delta_1^j, \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2^{j+1/2} + \delta_2^j), \frac{\partial}{\partial x_2}(h_2^{j+1/2} + \delta_2^j)\right) \times\right.$$
$$\left.\times\, (\eta_2^{j+1/2} + \delta_2^j - \zeta_2^j),\, z_2^N \right\rangle - (\gamma^j,\, z^N) \quad \forall z^N \in Z_0^N,\; j = \overline{0, J-1}. \tag{40}$$

Далее доказательство проводится аналогично [1]. Учитывая соотношения (40), (12), (17), (18), (28), (30)–(32), (34), (37), (38), а также положительную определенность формы $a(w; v, v)$, неотрицательную определенность $\overline{m}(v, v)$, симметричность $a(w; v, v)$, $\overline{m}(v, v)$, окончательно получаем оценки

$$\| \psi^l \|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \bar{c} \left(a_0 \| \psi^0 \|^2_{L_2(\Omega)} + a_1(T)\tau \sum_{j=0}^{l} \| \eta^j \|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_2 \tau \sum_{j=0}^{l-1} (\| \kappa^j \|^2_{L_2(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \| \delta^j \|^2_{W_2^1(\Omega)} + \| \zeta^j \|^2_{W_2^1(\Omega)} + \| \gamma^j \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \rho^j \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \sigma^j \|^2_{L_2(\Omega)}) \right), \ 1 \le l \le J;$$

$$\| H^l - h^l \|_{W_2^1(\Omega)} \le \| \psi^l \|_{W_2^1(\Omega)} + \| \eta^l \|_{W_2^1(\Omega)} \le$$

$$\le \bar{a}_0 \sqrt{T}\, O(\tau^2) + (S_1^2 s^{2(k+1)} + S_2^2 s^{2k})^{1/2} \| h^l \|_{W_2^{k+1}(\Omega)} +$$

$$+ \bar{a}_1 \sqrt{T} \left(\sum_{j=0}^{l} (S_1^2 s^{2(k+1)} + S_2^2 s^{2k}) \| h^j \|^2_{W_2^{k+1}(\Omega)} \right)^{1/2}, \ 1 \le l \le J.$$

Из последней оценки следует справедливость теоремы.

Схему (31)–(34), исходя из (14), (15), (35), можно переписать в виде

$$\alpha^0 = \widetilde{M}^{-1} \overline{H}^0, \ d^0 = \widetilde{M}^{-1} \overline{H}^1,$$

$$\left(M + \frac{\tau}{2} \overline{M} + \frac{\tau^2}{4} L\left(\frac{H^{j+1} + H^j}{2} \right) \right) d^{j+1} = \left(M - \frac{\tau}{2} \overline{M} - \frac{\tau^2}{4} L\left(\frac{H^{j+1} + H^j}{2} \right) \right) d^j -$$

$$- \tau L\left(\frac{H^{j+1} + H^j}{2} \right) \alpha^j + \frac{\tau}{2} (\widetilde{F}^{j+1} + \widetilde{F}^j),$$

$$\alpha^{j+1} = \alpha^j + \frac{\tau}{2} (d^{j+1} + d^j), \ j = \overline{0, J-1}. \qquad (41)$$

Матрицы $\widetilde{M}$, M, $\overline{M}$ и $L = A + R$ имеют размерность $(N' \times N')$ и структуру

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho M_3 \end{pmatrix}, \ \overline{M} = \begin{pmatrix} cM_1 & k_0 M_1 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (42)$$

Здесь

$$M_1 = M_2 = \{ m_{si} \}_{s,i=1}^{N}, \ M_3 = \{ M_{si} \}_{s,i=1}^{N_0 + N_2}, \ M_{si} = \begin{pmatrix} m_{si} & 0 \\ 0 & m_{si} \end{pmatrix},$$

$$m_{si} = \iint_\Omega \varphi_i(x) \varphi_s(x) d\Omega, \ s, i = \overline{1, N};$$

$$A_1 = \{ a_1^{si} \}_{s,i=1}^{N}, \ a_1^{si} = \iint_\Omega k_1(x, H^{j+1/2}) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \right) d\Omega,$$

$$A_2 = \{ a_2^{si} \}_{s,i=1}^{N}, \ a_2^{si} = \iint_\Omega k_2(x, H^{j+1/2}) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \right) d\Omega,$$

$$A_3 = \{ A_{si} \}_{s,i=1}^{N_0 + N_2}, \ A_{si} = \begin{pmatrix} a_{11}^{si} & a_{12}^{si} \\ a_{21}^{si} & a_{22}^{si} \end{pmatrix},$$

$$a_{11}^{si} = \iint_\Omega \left((\lambda(x, H^{j+1/2}) + 2\mu(x, H^{j+1/2})) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} + \mu(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \right) d\Omega,$$

$$a_{12}^{si} = \iint_\Omega \left(\lambda(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} + \mu(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \right) d\Omega,$$

$$a_{21}^{si} = \iint_\Omega \left(\lambda(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} + \mu(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} \right) d\Omega,$$

$$a_{22}^{si} = \iint_\Omega \left((\lambda(x, H^{j+1/2}) + 2\mu(x, H^{j+1/2})) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} + \mu(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} \right) d\Omega ;$$

$$R_1 = \{r^{si}\}_{s,i=1}^{N}, \quad r^{si} = -\int_{\Gamma_2} k\varphi_i(x)\varphi_s(x)\, d\Gamma ,$$

$$R_2 = \{R_{si}\}_{s=\overline{1, N_0+N_2},\, i=\overline{1, N}}, \quad R_{si} = \begin{pmatrix} r_1^{si} \\ r_2^{si} \end{pmatrix},$$

$$r_1^{si} = \iint_\Omega G(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_s d\Omega , \quad r_2^{si} = \iint_\Omega G(x, H^{j+1/2}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \varphi_s d\Omega . \qquad (43)$$

Векторы $\overline{H}^0$, $\overline{H}^1$, $\widetilde{F}$ имеют структуру

$$\overline{H}^0 = \begin{pmatrix} \overline{H}_1^0 \\ \overline{H}_2^0 \\ \overline{H}_3^0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H}^1 = \begin{pmatrix} \overline{H}_1^1 \\ \overline{H}_2^1 \\ \overline{H}_3^1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F} = \begin{pmatrix} \widetilde{F}^1 \\ \widetilde{F}^2 \\ \widetilde{F}^3 \end{pmatrix}, \qquad (44)$$

где

$$\overline{H}_{1,s}^0 = \iint_\Omega w_0^1(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad \overline{H}_{2,s}^0 = \int_\Omega w_0^2(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad s = \overline{1, N},$$

$$\overline{H}_{3,2s-1}^0 = \int_\Omega u_0^1(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad \overline{H}_{3,2s}^0 = \iint_\Omega u_0^2(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad s = \overline{1, N_0 + N_2};$$

$$\overline{H}_{1,s}^1 = \iint_\Omega p_0^1(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad \overline{H}_{2,s}^1 = \int_\Omega p_0^2(x)\varphi_s(x) d\Omega , \quad s = \overline{1, N},$$

$$\overline{H}_{3,2s-1}^1 = \iint_\Omega q_0^1(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad \overline{H}_{3,2s}^1 = \iint_\Omega q_0^2(x)\varphi_s(x)\, d\Omega , \quad s = \overline{1, N_0 + N_2};$$

$$\widetilde{F}_s^1(t) = \iint_\Omega f_1(x,t)\varphi_s(x)\, d\Omega - \int_{\Gamma_2} k\chi(x,t)\varphi_s(x)\, d\Gamma ,$$

$$\widetilde{F}_s^2(t) = \iint_\Omega f_2(x,t)\varphi_s(x)\, d\Omega, \quad s = \overline{1, N} ,$$

$$\widetilde{F}_{2s-1}^3(t) = \iint_\Omega F_1(x,t)\varphi_s(x)\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} (S(x,t) l_0 \varphi_s(x) + \hat{S}(x,t) m_0 \varphi_s(x))\, d\Gamma ,$$

$$\widetilde{F}_{2s}^3(t) = \iint_\Omega F_2(x,t)\varphi_s(x)\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} (S(x,t) m_0 \varphi_s(x) - \hat{S}(x,t) l_0 \varphi_s(x))\, d\Gamma, \qquad (45)$$

$$s = \overline{1, N_0 + N_2},$$

$l_0 = \cos(n, x_1)$, $m_0 = \cos(n, x_2)$, n — внешняя нормаль к контуру.

Искомый вектор решения $\alpha(N')$ задачи (41) на j-м временном слое, $j = \overline{1, J}$, имеет такую структуру:

$$\alpha(t_j) = (\alpha_1(t_j), \alpha_2(t_j), \alpha_3(t_j))^{\mathrm{T}} =$$

$$= (\alpha_{1,1}(t_j), \alpha_{1,2}(t_j), \ldots, \alpha_{1,N}(t_j), \alpha_{2,1}(t_j), \alpha_{2,2}(t_j), \ldots$$

$$\ldots, \alpha_{2,N}(t_j), \alpha_{3,1}(t_j), \ldots, \alpha_{3,2(N_0+N_2)}(t_j))^{\mathrm{T}} .$$

Заметим, что исходя из изложенной в (42)–(45) блочной структуры матриц и векторов, схема (41) легко раскладывается на три следующих схемы для матриц меньшей размерности, которые на каждом временном шаге и на каждой итерации применяются последовательно:

$$\alpha_k^0 = M_k^{-1}\overline{H}_k^0,\ k=\overline{1,3},\qquad \alpha_k^{1,0}=\alpha_k^0+\tau M_k^{-1}\overline{H}_k^1,\ k=\overline{1,3},$$

$$\left(cM_1+\frac{\tau}{2}\left(A_1\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)+R_1\right)\right)\alpha_1^{j+1}=\left(cM_1-\frac{\tau}{2}\left(A_1\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)+R_1\right)\right)\alpha_1^j+$$

$$+\frac{\tau}{2}k_0M_1\cdot(\alpha_2^{j+1}+\alpha_2^j)+\frac{\tau}{2}(F_1^{j+1}+F_1^j),\ j=\overline{0,J-1};$$

$$\left(M_2+\frac{\tau}{2}A_2\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)\right)\alpha_2^{j+1}=$$

$$=\left(M_2-\frac{\tau}{2}A_2\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)\right)\alpha_2^j+\frac{\tau}{2}(F_2^{j+1}+F_2^j),\ j=\overline{0,J-1};$$

$$d_3^0=M_3^{-1}\overline{H}_3^1,$$

$$\left(\rho M_3+\frac{\tau^2}{4}A_3\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)\right)d_3^{j+1}=\left(\rho M_3-\frac{\tau^2}{4}A_3\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)\right)d_3^j-$$

$$-\tau A_3\left(\frac{\alpha^{j+1}+\alpha^j}{2}\right)\alpha_3^j-\frac{\tau}{2}R_2\left(\frac{\alpha_2^{j+1}+\alpha_2^j}{2}\right)\cdot(\alpha_2^{j+1}+\alpha_2^j)+\frac{\tau}{2}(F_3^{j+1}+F_3^j),$$

$$\alpha_3^{j+1}=\alpha_3^j+\frac{\tau}{2}(d_3^{j+1}+d_3^j),\ j=\overline{0,J-1},$$

$\alpha_k^{1,0}$ — нулевая итерация вектора $\alpha_k^1, k=\overline{1,3}$.

Таким образом, в работе предложен алгоритм приближенного решения сформулированной параболо-гиперболической задачи и получены оценки скорости сходимости для непрерывного по времени и полностью дискретного приближенных обобщенных решений.

Данная статья является продолжением цикла работ, написанных в соавторстве с В.В. Скопецким, светлая память о котором, полная уважения и благодарности, навсегда останется в наших сердцах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скопецкий В.В., Марченко О.А., Самойленко Т.А. Построение и исследование нелинейной дифференциальной модели двухфазных сред // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 2. — С. 92–104.

2. Скопецкий В.В., Марченко О.А., Самойленко Т.А. Приближенное решение для нелинейной дифференциальной модели фильтрующих грунтов // Компьютер. математика. — 2009. — № 1. — С. 49–59.

3. Павлов А.Р., Пермяков П.П. Математическая модель и алгоритмы расчета на ЭВМ тепло- и массопереноса при промерзании грунта // ИФЖ. — 1983. — **44**, № 2. — С. 311–316.

4. Марченко О.А., Лежнина Н.А. Приближенное решение методом конечных элементов задачи влаготеплопереноса в промерзающих грунтах // Компьютер. математика. — 2002. — № 1. — С. 24–33.

5. Васильев В.И., Попов В.В. Численное решение задачи промерзания грунта // Мат. моделирование. — 2008. — **20**, № 7. — С. 119–128.

6. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. — Рн/Д.: Изд-во Ростов. ун-та, 1989. — 608 с.

7. Гасилов В.А., Головин М.В. О расчетах упругих деформаций на основе модели изотропно-упругой разномодульной среды // Мат. моделирование. — 2008. — **20**, № 4. — С. 117–127.

8. Флорин В.А. Основы механики грунтов. — Л.: Гостехиздат, 1959. — Т. I. — 357 с.

9. Колдоба А.В., Пергамент А.Х., Повещенко Ю.А., Симус Н.А. Напряженно-деформированное состояние насыщенной пористой среды, вызванное фильтрацией жидкости // Мат. моделирование. — 1999. — **11**, № 10. — С. 3–16.

10. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — К.: Наук. думка, 1998. — 614 с.

11. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 590 с.

12. Wheeler M.F. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — **10**, N 4. — P. 723–759.

Поступила 25.01.2011