

УДК 519.876.5

И.В. СТЕЦЕНКО

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ С ИНФОРМАЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ

Ключевые слова: *временная сеть Петри, имитационное моделирование, матричное уравнение.*

ВВЕДЕНИЕ

Сети Петри — универсальное средство формализации процессов, имеющих событийный характер, интенсивно используются в различных областях. Элементами сети Петри, позволяющими описывать процессы функционирования сложных систем, являются переходы с временными стохастическими задержками [1], многоканальные и конфликтные переходы [2, 3], информационные связи. Последние введены в [4] для отображения специфических процессов управления и применялись в [5–7] для имитационного моделирования. Информационные связи, как и многоканальные переходы, не расширяют класс сетей Петри, однако делают их более удобными для представления сложных систем.

В работе [8] показано, что ингибиторные сети Петри равносильны приоритетным сетям Петри и доказано, что оба вида сетей эквивалентны машине Тьюринга. Построение сети Петри, эквивалентной машине Тьюринга, рассмотрено в [9]. Временные сети Петри предоставляют возможность одновременного исследования как структурно-функциональных свойств системы, так и ее эксплуатационных характеристик [10]. Стохастические сети Петри мощнее марковских процессов [11], в то же время их применение для имитационного моделирования

© И.В. Стеценко, 2012

ограничено, о чем свидетельствует тот факт, что в известной монографии [12] не упоминается о сетях Петри.

Вывод уравнений стохастической временной сети Петри с конфликтными и многоканальными переходами, с информационными связями основан на работах [13, 14]. В [13] описаны фундаментальные уравнения базовой сети Петри и предложены способы аналитического исследования ее свойств. В [14] введены понятия состояния временной сети Петри и количества возможных запусков перехода, найдено уравнение состояний временной детерминированной сети Петри с продвижением времени по тактам.

Основным предназначением полученных в данной статье уравнений является математическое описание правил функционирования временной сети Петри, с помощью которого строится алгоритм имитации ее модели. Эти уравнения приведены к матричному виду и показано, что при нулевых временных задержках они аналогичны уравнениям в [13], а при детерминированных временных задержках — уравнениям в [14].

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И ВРЕМЕННЫЕ СЕТИ ПЕТРИ С ИНФОРМАЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ

Информационные связи между позицией и переходом позволяют моделировать связи между подсистемами управления и объекта управления, характеризующиеся передачей информации о состоянии. Например, на рис. 1 представлена сеть Петри, моделирующая пересечение автомобилем перекрестка на зеленый сигнал светофора. Показана информационная связь (штриховая линия), которая используется для соединения позиции P_4 (есть зеленый свет в направлении движения) и перехода T_1 (пересечение автомобилем перекрестка). Результатом функционирования объекта управления является изменение состояния объекта, но не подсистемы управления. Если подсистема объекта управления «что-то знает» о подсистеме управления, то это приводит к корректировке правил функционирования объекта управления, но не изменяет состояния подсистемы управления. Именно для воспроизведения связи вида «знает, но не изменяет» предназначены информационные связи.

Информационная связь между позицией и переходом означает, что наличие маркеров в позиции в количестве, равном кратности связи, определяется при проверке условия запуска перехода, однако во время самого запуска маркеры не удаляются. Таким образом, при обычной (материальной) связи между позицией и переходом осуществляется перемещение маркеров вдоль этой связи в случае выполнения условия запуска перехода, а при информационной связи такого перемещения маркеров не происходит. Алгоритмическая реализация сети Петри с информационными связями отличается от реализации обычной сети Петри только необходимостью разделять входные позиции перехода на соединенные с ним обычной и информационной дугами. При проверке условия запуска исследуется состояние всех входных позиций перехода, а при его запуске — только позиций, связанных с переходом обычной дугой. Сравнивая информационные дуги с широко известными ингибиторными дугами, отметим, что, и одни и другие применяются только для дуг, направленных

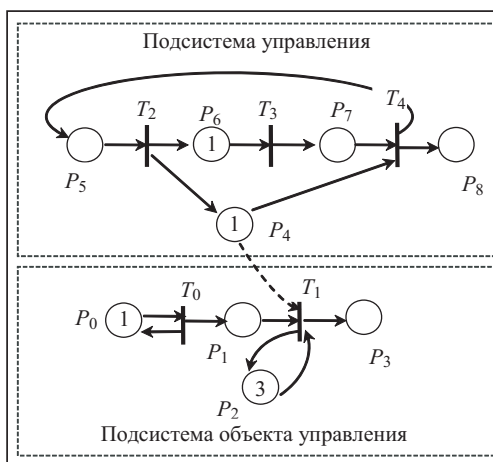


Рис. 1. Сеть Петри, моделирующая пересечение автомобилем перекрестка на зеленый сигнал светофора

ных от позиции к переходу, а переход с информационной связью должен иметь еще и обычную входную дугу. Однако в отличие от ингибиторных дуг информационные позволяют проверять наличие любого заданного на дуге количества маркеров в позиции. Вычислительная сложность сети Петри с информационными связями не отличается от вычислительной сложности обычной сети Петри, в то время как реализация ингибиторной сети Петри требует усложнения условия запуска [8]. Технология построения моделей систем стохастической временной сетью Петри с информационными связями изложена в [15].

ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ С ИНФОРМАЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассмотрим сеть Петри $(\mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{W}, \mathbf{K}, \mathbf{I}, \mathbf{R})$, заданную множествами позиций $\mathbf{P} = \{P\}$; переходов $\mathbf{T} = \{T\}$, $\mathbf{P} \cap \mathbf{T} = \emptyset$; дуг $\mathbf{A} \subseteq (\mathbf{P} \times \mathbf{T} \cup \mathbf{T} \times \mathbf{P})$; информационных дуг $\mathbf{I} \subseteq (\mathbf{P} \times \mathbf{T})$; натуральных чисел $\mathbf{W} : \mathbf{A} \cup \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{N}$, задающих кратности дуг (количество связей); пар значений $\mathbf{K} = \{(c_T, b_T) \mid T \in \mathbf{T}, c_T \in \mathbf{N}, b_T \in [0; 1]\}$, задающих приоритет и вероятность запуска переходов; неотрицательных действительных значений $\mathbf{R} : \mathbf{T} \rightarrow \mathfrak{R}_+$, характеризующих временные задержки в переходах.

Обозначим множества входных и выходных позиций перехода T , как в [13], соответственно $\bullet T$ и $T \bullet$, множества входных и выходных переходов позиции P соответственно $\bullet P$ и $P \bullet$, а множество выходных переходов, связанных с позицией P информационной связью, $P^\circ \subset P \bullet$.

Рассмотрим функционирование сети Петри во времени, продвигающемся от одного события, связанного с выходом маркеров из перехода, до ближайшего следующего. Обозначим t текущий момент времени, а t' следующий момент времени. Отметим, что в течение времени $t' - t$ в сети Петри событий не происходит.

Состояние сети Петри в момент времени t описывается состояниями ее позиций $\mathbf{M}(t)$ и переходов $\mathbf{E}(t) : (\mathbf{M}(t), \mathbf{E}(t)) = \mathbf{S}(t)$. Состояние позиций однозначно определяется маркировкой сети Петри в момент времени $t : \mathbf{M}(t) = \{M_P(t) \mid M_P(t) \in \mathbf{N}_0, P \in \mathbf{P}\}$, где \mathbf{N}_0 — множество целых неотрицательных чисел. Состояние переходов определяется множеством $\mathbf{E}(t) = \{E_T(t) \mid T \in \mathbf{T}\}$, где $E_T(t)$ — множество моментов выхода маркеров из каналов перехода T , которые в момент времени t заняты (активны):

$$E_T(t) = \{[E_T(t)]_q \mid [E_T(t)]_q \in \mathfrak{R}_+, q \in \mathbf{N}\},$$

где q — номер канала перехода, $q = 1, 2, \dots, |E_T(t)|$, $|E_T(t)|$ — количество активных каналов в момент времени t .

Если выхода маркеров из перехода не ожидается, то множество $E_T(t)$ этого перехода содержит только одно значение: ∞ , т.е. $E_T(t) = \{\infty\}$.

Множество допустимых состояний сети Петри описывается множествами неотрицательных значений маркировок ее позиций и моментов выхода из переходов

$$\mathbf{S}(t) \in \{\mathbf{S}(t) \mid (M_P(t) \geq 0 \ \forall P \in \mathbf{P}) \wedge ([E_T(t)]_q \geq 0 \ \forall T \in \mathbf{T}, \forall q = 1, \dots, |E_T(t)|)\}.$$

Введем переменную $\tau_T(t)$, определяющую наименьший из всех моментов выходов маркеров из перехода $T : \tau_T(t) = \min_q [E_T(t)]_q$. Тогда момент ближайшего со-

бытия представляется минимумом всех значений $\tau_T(t) : t' = \min_T \tau_T(t), t' \geq t$.

Множество каналов перехода $s_T(t)$, которым соответствует наименьший из всех моментов выхода маркеров из перехода, определяется множеством порядковых номеров этих каналов

$$s_T(t) = \{q \in \mathbf{N} \mid [E_T(t)]_q = \tau_T(t)\}. \quad (1)$$

Введем предикат $Y : \mathbf{T} \times \mathfrak{R} \rightarrow \{0; 1\}$ на множестве переходов $T \in \mathbf{T}$ и множестве моментов времени $t' \in \mathfrak{R}$ таким образом, что

$$(\tau_T(t) = t') \Rightarrow Y(T, t') = 1, \quad (\tau_T(t) \neq t') \Rightarrow Y(T, t') = 0.$$

Выход маркеров из перехода $T \mid Y(T, t') = 1$ происходит за два этапа: изменяется маркировка сети Петри (состояние ее позиций) и изменяется состояние переходов. Поскольку выход маркеров может осуществляться из нескольких переходов, следует просуммировать добавляющиеся из переходов $T \in \bullet P$ маркеры. Имеем следующие уравнения, определяющие состояние сети Петри, которое является результатом выхода маркеров из переходов в момент времени t' :

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P^+(t') = M_P(t) + \sum_{T \in \bullet P} Y(T, t') \cdot W_{T, P} |s_T(t)|, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \forall T \in \mathbf{T} \mid Y(T, t') = 1 \\ E_T^+(t') &= \begin{cases} \{\infty\} \leftarrow |s_T(t)| = |E_T(t)|, \\ E_T^+(t') = E_T(t) \setminus \{[E_T(t)]_q \mid q \in s_T(t)\} \leftarrow |s_T(t)| \neq |E_T(t)|, \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

где $|\cdot|$ — количество элементов множества (кардинальное число).

Обозначим преобразование состояния временной сети Петри (2), (3), связанное с выходом маркеров из переходов, $D^+ : \mathbf{E}(t) \times \mathbf{M}(t) \rightarrow \mathbf{E}(t') \times \mathbf{M}(t')$ или $\mathbf{S}(t') = D^+(\mathbf{S}(t))$.

Утверждение 1. Результат преобразования $D^+(\mathbf{S}(t))$ есть всегда допустимое состояние сети Петри.

Пусть $\mathbf{S}(t)$ — допустимое состояние сети Петри, тогда $M_P(t) \geq 0 \quad \forall P \in \mathbf{P}$ и $[E_T(t)]_q \geq 0 \quad \forall T \in \mathbf{T}, \quad \forall q = 1, \dots, |E_T(t)|$. Из уравнения (2) следует, что $M_P^+(t') \geq M_P(t) \geq 0 \quad \forall P \in \mathbf{P}$. Из определения (1) вытекает, что $|s_T(t)| \leq |E_T(t)|$, поэтому $1 \leq |E_T^+(t')| \leq |E_T(t)|$. Из уравнения (3) имеем, что $\forall T \in \mathbf{T} \quad [E_T^+(t')]_q \geq [E_T(t)]_q \geq 0 \quad \forall q = 1, \dots, |E_T^+(t')|$. Тогда $\forall \mathbf{S}(t') : \mathbf{S}(t') = D^+(\mathbf{S}(t))$ $M_P^+(t') \geq 0 \quad \forall P \in \mathbf{P}$ и $[E_T^+(t')]_q \geq 0 \quad \forall T \in \mathbf{T}, \quad \forall q = 1, \dots, |E_T^+(t')|$, что и требовалось доказать. ■

Для новой маркировки $M_P^+(t')$ проверяются условия запуска для всех переходов. Введем предикат $Z : T \times \mathfrak{R} \rightarrow \{0; 1\}$ на множестве переходов $T \in \mathbf{T}$ и множестве моментов времени $t' \in \mathfrak{R}$ таким образом, что

$$(\forall P \in \bullet T \quad M_P^+(t') \geq W_{P, T}) \Rightarrow Z(T, t') = 1,$$

$$(\exists P \in \bullet T \quad M_P^+(t') < W_{P, T}) \Rightarrow Z(T, t') = 0.$$

Тогда следующее множество представляет множество всех переходов, для которых выполнено условие запуска $\Psi(t') = \{T \mid Z(T, t') = 1, T \in \mathbf{T}\}$.

Пусть $\Psi(t') \neq \emptyset$. В общем случае $\Psi(t') = \mathbf{T}_\Psi \cap \bar{\mathbf{T}}_\Psi$, где \mathbf{T}_Ψ и $\bar{\mathbf{T}}_\Psi$ — множества конфликтных и неконфликтных переходов соответственно. Среди конфликтных переходов множества $\mathbf{T}_\Psi \neq \emptyset$ следует разрешить конфликт, в результате чего множество \mathbf{T}_Ψ преобразуется во множество $\bar{\mathbf{T}}_\Psi \subseteq \mathbf{T}_\Psi$, не содержащее конфликтов.

Определение. Конфликтными являются переходы, для которых выполнено условие запуска в текущий момент времени, имеющие хотя бы одну общую входную позицию

$$\mathbf{T}_\Psi = \{T \in \Psi(t') \mid \exists \bar{T} \in (\Psi(t') \setminus T), \exists P \in \bullet T \cap \bullet \bar{T}\}.$$

Определим множество конфликтных позиций как множество позиций, являющихся входными для более чем одного перехода из множества $\Psi(t')$: $\mathbf{P}_\Psi = \{P \mid |P \bullet \cap \Psi(t')| > 1\}$.

Всякая конфликтная позиция определяет подмножество конфликтных переходов $\omega_P = P \bullet \quad \forall P \in \mathbf{P}_\Psi$, причем $\bigcup_{P \in \mathbf{P}_\Psi} \omega_P = \mathbf{T}_\Psi$. Разрешить конфликт означает

выбрать непересекающиеся подмножества $\{\omega_P\} : \bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P = \emptyset, \tilde{\mathbf{P}}_\Psi \subseteq \mathbf{P}_\Psi$, и в каждом из них выбрать один и только один переход, запуск которого осуществляется в текущий момент времени.

Рассмотрим случай $\bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P = \emptyset$, т.е. конфликтные позиции не имеют общих переходов. Тогда конфликт разрешается только внутри каждого подмножества переходов ω_P следующим образом. Осуществляется выбор переходов из подмножества ω_P , имеющих наибольшее значение приоритета c_T и ненулевую вероятность запуска $b_T : \omega'_P = \{T \in \omega_P \mid b_T \neq 0, c_T = \max_{T \in \omega_P} c_T\}$. Если переходов во множестве ω'_P несколько, $|\omega'_P| > 1$, то из него выбираются переходы, имеющие значение вероятности запуска $b_T = 1$. Обозначим это множество $\omega''_P : \omega''_P = \{T \in \omega'_P \mid b_T = 1\}$. Если $|\omega''_P| = 1$, то единственный переход, принадлежащий множеству ω''_P , является результатом разрешения конфликта. Если множество ω''_P содержит несколько переходов, $|\omega''_P| > 1$, то выбирается случайным образом один из них с вероятностью $1/|\omega''_P|$, который и является результатом разрешения конфликта. Если множество $\omega''_P = \emptyset$, то выбор одного из переходов множества ω'_P осуществляется случайным образом по значениям вероятностей запуска $b_T, T \in \omega'_P$, причем $\sum_{T \in \omega'_P} b_T = 1$.

Таким образом, разрешается конфликт по всем подмножествам ω_P . Множество $\tilde{\mathbf{T}}_\Psi$ содержит по одному переходу от каждого подмножества ω_P , и в этом случае количество этих переходов равно количеству конфликтных позиций. Следовательно, $|\tilde{\mathbf{T}}_\Psi| = |\mathbf{P}_\Psi|$ при условии $\bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P = \emptyset$.

Рассмотрим случай $\bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P \neq \emptyset$, т.е. существуют конфликтные позиции, имеющие общие переходы. Обозначим $\bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P = \tilde{\omega}$. Для всех конфликтных позиций $P \in \mathbf{P}_\Psi \setminus \tilde{\omega}$ конфликт разрешается, как в случае $\bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P = \emptyset$. Сформируем

подмножество позиций $P_{\tilde{\omega}} = \left\{ P \mid P \in \tilde{\omega}, M(P) < \sum_{T \in \bullet P} W_{P,T} \right\}$. Для всех пози-

ций $P \notin P_{\tilde{\omega}}$ конфликт разрешается, как в случае $\bigcap_{P \in \tilde{\mathbf{P}}_\Psi} \omega_P = \emptyset$. Для разрешения

конфликта позиций $P \in P_{\tilde{\omega}}$ сформируем множество переходов $\hat{\omega} = \{T \in \tilde{\omega} \mid |\bullet T \cap P_{\tilde{\omega}}| > 1\}$. Для каждого перехода $T \in \hat{\omega}$ случайным образом выбирается одна позиция. После этого разрешается конфликт для множества ω_P этой позиции описанным выше способом.

Множество переходов, выбранных для запуска, состоит из множества неконфликтных переходов и множества переходов, выбранных в результате разрешения конфликтов. Обозначим $\Psi'(t') = \tilde{\mathbf{T}}_\Psi \cup \hat{\mathbf{T}}_\Psi, \Psi'(t') \subseteq \Psi(t)$. Введем предикат $X : \mathbf{T} \times \mathfrak{R} \rightarrow \{0; 1\}$ на множестве переходов $T \in \mathbf{T}$ и множестве моментов времени $t' \in \mathfrak{R}$ таким образом, что

$$T \in \Psi'(t') \Rightarrow X(T, t') = 1, T \notin \Psi'(t') \Rightarrow X(T, t') = 0.$$

Результат входа маркеров в переходы представляется уравнениями:

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t') = M_P^+(t') - \sum_{T \in P \bullet \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot X(T, t'), \quad (4)$$

$$\forall T \in \mathbf{T} \mid X(T, t') = 1 \quad E_T(t') = \begin{cases} \{t' + R_T\} \leftarrow \tau_T = \infty, \\ E_T^+(t') \cup \{t' + R_T\} \leftarrow \tau_T < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим преобразование состояния стохастической временной сети Петри (4), (5), связанное с входом маркеров в переходы, $D^-: \mathbf{E}(t') \times \mathbf{M}(t') \rightarrow \mathbf{E}(t') \times \mathbf{M}(t')$ или $D^-(\mathbf{S}(t'))$.

Утверждение 2. Результат преобразования $D^-(\mathbf{S}(t'))$ есть всегда допустимое состояние сети Петри.

Пусть $\mathbf{S}(t')$ — допустимое состояние сети Петри, тогда $M_P^+(t') \geq 0 \quad \forall P \in \mathbf{P}$ и $[E_T(t')]_q \geq 0 \quad \forall T \in \mathbf{T}, \quad \forall q = 1, \dots, |E_T(t')|$. Из (5) следует, что $\forall T \in \mathbf{T} \mid \tau_T < \infty$ $[E_T(t')]_q = [E_T^+(t')]_q \geq 0 \quad \forall q = 1, \dots, |E_T^+(t')|$ и $[E_T(t')]_q = t' + R_T \geq 0 \quad \forall q = |E_T^+(t')| + 1, \dots, |E_T(t')|$, $\forall T \in \mathbf{T} \mid \tau_T = \infty$, $[E_T(t')]_1 = t' + R_T \geq 0$.

Покажем, что в результате вычислений (4) выполнено $\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t') \geq 0$. Если $X(T, t') = 0$, то удаления $W_{P,T}$ в (4) для такого перехода не происходит. Пусть теперь $X(T, t') = 1$, что возможно только при $T \in \Psi'(t')$. Поскольку $T \in \Psi'(t')$, переход T не имеет общих позиций с другими переходами множества $\Psi'(t')$. Поэтому в (4) $X(T, t') = 1$ только для одного из переходов $\hat{T} \mid \hat{T} \in (P^\bullet \setminus P^\circ) \wedge X(\hat{T}, t') = 1$, случайно выбранного для запуска. Для других переходов $X(T, t') = 0$. Имеем

$$M_P(t') = M_P^+(t') - \sum_{T \in P^\bullet \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot X(T, t') = M_P^+(t') - W_{P,\hat{T}} \geq 0,$$

так как $X(\hat{T}, t') = 1 \Rightarrow Z(\hat{T}, t') = 1$. Следовательно, в (4) $\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t') \geq 0$. Имеем $\forall \mathbf{S}(t') : \mathbf{S}(t') = D^-(\mathbf{S}(t')) \quad M_P(t') \geq 0 \quad \forall P \in \mathbf{P}$ и $[E_T(t')]_q \geq 0 \quad \forall T \in \mathbf{T}, \quad \forall q = 1, \dots, |E_T(t')|$, что и требовалось доказать. ■

Преобразование $D^-(\mathbf{S}(t'))$ представляет результат одного входа маркеров в переходы сети Петри. Количество маркеров во входных позициях многоканального перехода может удовлетворять условию запуска не одного, а нескольких каналов этого перехода. Поэтому вход маркеров в переходы должен осуществляться многократно до тех пор, пока еще есть хотя бы один переход, который запускается. В противном случае может возникнуть ситуация, когда условие запуска перехода выполнено, но он не запущен в момент t' и в результате продвижения времени его можно будет запустить только в момент $t > t'$, что противоречит правилам функционирования временных сетей Петри.

Максимальное количество запусков перехода в момент времени t' определяется величиной $\min_{P \in \mathbf{P}} \left\{ \frac{M_P^+(t')}{W_{P,T}} \right\}$, где используется операция деления целых чисел.

Фактическое количество m входов маркеров в переходы обусловлено требованием достижения маркировки сети Петри, в которой ни один из переходов не запускается:

$$m : (D^-)^m(\mathbf{S}(t')) : \bigvee_T Z(T, t') = 0, \quad (6)$$

где $(D^-)^m = D^- \circ D^- \circ D^- \circ \dots \circ D^-$ — результат m -кратного применения преобразования D^- .

Пусть $X(T, t')_i, i = 1, \dots, m$, — значение предиката в i -м входе маркеров в переход T в момент t' . Вектор $u_T(t') = \sum_{i=1}^m X(T, t')_i$ представляет количество входов маркеров в переход T в серии входов маркеров в переходы $(D^-)^m$, соот-

ветствующей моменту времени t' . Так как удаление маркеров может происходить в результате нескольких входов маркеров в переход, в уравнении (4) следует просуммировать удаленные из позиций маркеры по всем запускам переходов

$$M_P(t') = M_P^+(t') - \sum_{T \in \bullet P \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot u_T(t'). \quad (7)$$

Отметим, что множество значений $\{u_T(t')\}$ в общем случае зависит от случайного выбора перехода из множества запускающихся переходов. Результат этого случайного выбора характеризует значение предиката $X(T, t')_i$ в i -м входе маркеров в переход. Например, на рис. 2 переходы T_1, T_2, T_3, T_4 являются конфликтными и подмножество $\omega_{P_2} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$. Конфликт разрешается случайным выбором одного перехода из подмножества ω_{P_2} . В зависимости от разрешения конфликта между переходами подмножества ω_{P_2} в результате серии входов маркеров в переход возможно возникновение следующих значений (и только их) количества входов маркеров в переходы $\{u_{T_1}, u_{T_2}, u_{T_3}, u_{T_4}\}$:

$$\begin{aligned} & \{0, 4, 0, 0\}, \\ \{1, 3, 0, 0\}, & \{0, 2, 0, 1\}, \\ \{1, 1, 0, 1\}, & \{0, 0, 1, 0\}. \end{aligned}$$

На рис. 3 подмножества ω_{P_1} и ω_{P_2} пересекаются. Конфликт разрешается случайным выбором одного из этих подмножеств, и затем выбором из него одного перехода. Множество всех возможных значений количества входов маркеров в переходы $\{u_{T_1}, u_{T_2}, u_{T_3}, u_{T_4}, u_{T_5}\}$ состоит из следующих значений:

$$\begin{aligned} & \{1, 3, 0, 0, 0\}, & \{0, 4, 0, 0, 0\}, \\ & \{1, 1, 0, 1, 0\}, & \{0, 2, 0, 1, 0\}, \\ & \{0, 3, 0, 0, 1\}, & \{0, 0, 1, 0, 0\}. \\ & \{0, 1, 0, 1, 1\}, \end{aligned}$$

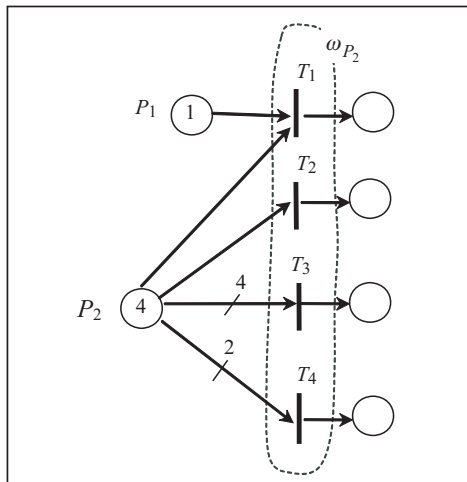


Рис. 2. Разрешение конфликтных переходов в случае непесекающихся множеств ω_P

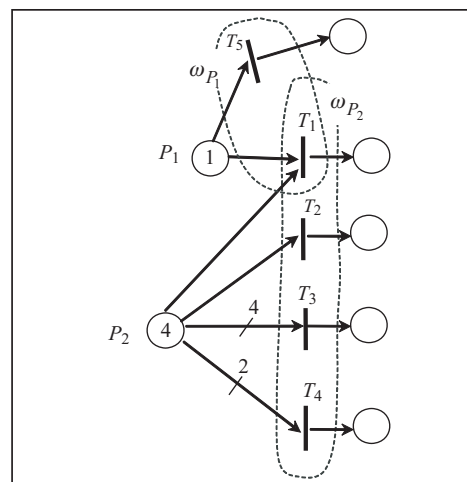


Рис. 3. Разрешение конфликтных переходов в случае пересекающихся множеств ω_P

Таким образом, фактическое количество входов маркеров в переходы ограничено не только сверху — максимальным их количеством, но и снизу — условием (6), которое с учетом (7) можно преобразовать следующим образом:

$$\forall T \in \mathbf{T} \exists P \in \bullet T : M_P(t') < W_{P,T} \Leftrightarrow \exists P \in \bullet T : M_P^+(t') - \sum_{T \in P^\bullet \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot u_T(t') < W_{P,T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists P \in \bullet T : \sum_{T \in P^* \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot u_T(t') > M_P^+(t') - W_{P,T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists P \in \bullet T : \sum_{T \in P^* \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot u_T(t') > \max_{T \in P^* \setminus P^\circ} (M_P^+(t') - W_{P,T}).$$

Имеем следующее условие для количества входов маркеров в переходы :

$$\{u_T(t')\} : \left(u_T(t') \leq \min_{P \in \bullet T} \left\{ \frac{M_P^+(t')}{W_{P,T}} \right\} \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\exists P \in \bullet T : \sum_{T \in P^* \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot u_T(t') > \max_{T \in P^* \setminus P^\circ} (M_P^+(t') - W_{P,T}) \right).$$

Вход маркеров в переходы $T \in \Psi'(t')$ осуществляется за два этапа: изменяется состояние выходных позиций переходов и изменяется состояние переходов. Суммируя маркеры, убывающие из позиции в переходы $T \in \bullet P \setminus \circ P$, получаем уравнения, определяющие преобразование $(D^-)^m$ состояния сети Петри в момент времени t' :

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t') = M_P^+(t') - \sum_{T \in \bullet P \setminus \circ P} W_{P,T} \cdot u_T(t'), \quad (8)$$

$$\forall T \in \mathbf{T} \quad E_T(t') = \begin{cases} \underbrace{\{t' + R_T\} \cup \dots \cup \{t' + R_T\}}_{u_T(t')} \leftarrow \tau_T(t') = \infty, \\ E_T^+(t') \cup \underbrace{\{t' + R_T\} \cup \dots \cup \{t' + R_T\}}_{u_T(t')} \leftarrow \tau_T(t') < \infty. \end{cases} \quad (9)$$

Композиция преобразований $(D^-)^m \circ D^+$ представляет преобразование сети Петри, соответствующее моменту времени t' . Рассмотрим последовательность моментов времени $t_n, n = 1, 2, \dots$. Тогда, полагая в (4), (5) и (8), (9) $t = t_{n-1}$ и $t' = t_n$, получаем следующую систему уравнений, представляющую формальное описание функционирования стохастической временной сети Петри с многоканальными и конфликтными переходами:

$$\begin{cases} t_n = \min_T \left(\min_q [E_T(t_{n-1})]_q \right), \quad t_n \geq t_{n-1}, \\ \mathbf{S}(t_0) = (D^-)^m(\mathbf{S}(t_0)), \\ \mathbf{S}(t_n) = (D^-)^m(D^+(\mathbf{S}(t_{n-1}))), \\ n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

где D^+ описывается уравнениями (4) и (5), а $(D^-)^m$ — уравнениями (8) и (9), m определяется условием (6).

Отметим, что система уравнений (10) отличается от уравнений сети Петри с детерминированными временными задержками наличием уравнения, однозначно определяющего следующий момент времени по текущему состоянию переходов, и требованием к фактическому количеству входов в переходы (6), обеспечивающим достижение состояния сети Петри, при котором для всех ее переходов не выполняется условие запуска.

АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТИ ПЕТРИ С ВРЕМЕННЫМИ ЗАДЕРЖКАМИ, МНОГОКАНАЛЬНЫМИ ПЕРЕХОДАМИ И ИНФОРМАЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ

Система уравнений (10) является математическим описанием следующего алгоритма.

— Формировать данные о структуре и начальном состоянии сети Петри (начальный момент времени t_0 ; множества позиций \mathbf{P} , переходов \mathbf{T} , входных связей $\bullet \mathbf{T}$, выходных связей \mathbf{T}^\bullet ; начальное состояние позиций и переходов $\mathbf{S}(t_0) = (\mathbf{M}(t_0), \mathbf{E}(t_0))$).

- Осуществить начальный запуск переходов (преобразование $(D^-)^m(\mathbf{S}(t_0))$).
- Пока не исчерпано время моделирования $t_n < \text{timeMod}$, продвинуть время в момент ближайшего события $t_n = \min_T \left(\min_q [E_T(t_{n-1})]_q \right)$, осуществить преобразование состояния сети Петри $(D^-)^m(D^+(\mathbf{S}(t_{n-1})))$.
- Вывести результаты моделирования.

Вычислительная сложность этого алгоритма определяется количеством шагов до достижения условия $t_n < \text{timeMod}$, сложностью поиска следующего момента времени, сложностью преобразований $(D^-)^m$ и D^+ состояния сети Петри. Количество шагов равно среднему количеству событий в единицу времени, умноженному на timeMod . Обозначим v_T среднее количество активных каналов перехода T , $V = \text{mean}_{T \in \mathbf{T}} v_T$ среднее количество активных каналов перехода $T \in \mathbf{T}$.

Тогда количество шагов оценивается величиной $O(V \cdot |\mathbf{T}| \cdot \text{timeMod})$. Сложность преобразования D^+ , как следует из уравнений (2), (3), определяется величиной $|\mathbf{T}| \cdot \left(\text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet| + V \right)$, где $\text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet|$ — среднее количество выходных позиций

перехода. Сложность преобразования D^- , как следует из уравнений (4), (5), оценивается величиной $O \left(|\mathbf{T}| \cdot \left(\text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet| + V \right) + K^2 \right)$, где $\text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet|$ — среднее

количество входных позиций перехода, $K = \text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |\mathbf{T}_\Psi|$ — среднее количество конфликтных переходов. Так как среднее количество входов в переходы меньше среднего количества активных каналов перехода, сложность преобразования $(D^-)^m$ можно оценить величиной $O \left(V \cdot |\mathbf{T}|^2 \cdot \left(\text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet| + V \right) + V \cdot |\mathbf{T}| \cdot K^2 \right)$.

Отсюда вычислительная сложность алгоритма оценивается величиной $O \left(|\mathbf{T}|^2 \cdot V \cdot \text{timeMod} \cdot \left(\text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet| + V + V \cdot |\mathbf{T}| \cdot \text{mean}_{T \in \mathbf{T}} |T^\bullet| + V^2 \cdot |\mathbf{T}| + V \cdot K^2 \right) \right)$. Следовательно, вычислительная сложность уравнений (10) зависит при заданном времени моделирования полиномиально от количества переходов $|\mathbf{T}|$, а задача составления уравнений относится к P-классу сложности.

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВРЕМЕННОЙ СЕТИ ПЕТРИ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Рассмотрим изменение состояния сети Петри, описанное преобразованием $(D^-)^m \circ D^+$. Маркировка сети Петри в момент t_n изменяется в соответствии с уравнениями (2), (8). Подставляя (2) в (8), получаем следующее уравнение:

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t_n) = M_P(t_{n-1}) + \sum_{T \in \bullet^* P} Y(T, t_n) \cdot W_{T,P} |s_T(t_{n-1})| - \sum_{T \in P^* \setminus P^\circ} Z(T, t_n) \cdot W_{P,T} \cdot u_T(t_n). \quad (11)$$

Состояние переходов сети Петри в момент t_n изменяется в соответствии с уравнениями (3), (9), объединяя которые, получаем

$$\forall T \in \mathbf{T} \quad Y(T, t_n) = 1 \quad s_T(t_{n-1}) = \{q | [E_T(t_{n-1})]_q = \tau_T(t_{n-1})\};$$

$$E_T^+(t_n) = \begin{cases} \{\infty\} \leftarrow |s_T(t_{n-1})| = |E_T(t_{n-1})|, \\ E_T(t_{n-1}) \setminus \{[E_T(t_{n-1})]_q | q \in s_T(t_{n-1})\} \leftarrow |s_T(t_{n-1})| \neq |E_T(t_{n-1})|; \end{cases} \quad (12)$$

$$\forall T \in \mathbf{T} \quad Z(T, t_n) = 1 \quad E_T(t_n) = \begin{cases} \underbrace{\{t_n + R_T\} \cup \dots \cup \{t_n + R_T\}}_{u_T(t_n)} \leftarrow \tau_T(t_n) = \infty, \\ E_T^+(t_n) \cup \underbrace{\{t_n + R_T\} \cup \dots \cup \{t_n + R_T\}}_{u_T(t_n)} \leftarrow \tau_T(t_n) < \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Количество активных каналов активного перехода равно мощности множества $|E_T(t_n)|$, а неактивного перехода — нулю. Пусть $v_T(t)$ — количество активных каналов перехода T в момент t , тогда

$$v_T(t) = \begin{cases} |E_T(t)|, & \tau_T < \infty, \\ 0, & \tau_T = \infty. \end{cases} \quad (14)$$

Из уравнений (12), (13) и определения (14) следует, что изменение количества активных каналов происходит согласно уравнению

$$\forall T \in \mathbf{T} \quad v_T(t_n) = v_T(t_{n-1}) - Y(T, t_n) \cdot |s_T(t_{n-1})| + Z(T, t_n) \cdot u_T(t_n). \quad (15)$$

Уравнение (15) имеет очевидный смысл: количество активных каналов перехода в момент t_n равно количеству каналов в момент времени t_{n-1} плюс количество входов в переход и минус количество выходов из него.

Пусть в начальный момент времени t_0 состояние сети Петри $\mathbf{S}(t_0) = (\mathbf{M}(t_0), \mathbf{E}(t_0))$. Составим уравнения (11), (15) для всех моментов t_j , $j = 1, \dots, n$, и просуммируем

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t_n) - M_P(t_0) = \sum_{T \in \bullet P} W_{T,P} \sum_{j=1}^n Y(T, t_j) \cdot |s_T(t_{j-1})| - \sum_{T \in P \bullet \setminus P^\circ} W_{P,T} \sum_{j=1}^n Z(T, t_j) \cdot u_T(t_j), \quad (16)$$

$$\forall T \in \mathbf{T} \quad v_T(t_n) - v_T(t_0) = - \sum_{j=1}^n Y(T, t_j) \cdot |s_T(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^n Z(T, t_j) \cdot u_T(t_j). \quad (17)$$

Заметим, что $\sum_{j=1}^n Z(T, t_j) \cdot u_T(t_j) = \gamma_T(t_n)$ описывает общее количество вхо-

дов в переход T за весь интервал времени $[t_0, t_n]$, а $\sum_{j=1}^n Y(T, t_j) \cdot |s_T(t_{j-1})| =$

$= \eta_T(t_n)$ описывает общее количество выходов из перехода T . Выразим количество выходов из перехода T количеством входов в переход T из уравнения (17) и подставим в (16). Тогда уравнения (16), (17) принимают следующий вид:

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t_n) + \sum_{T \in \bullet P} W_{T,P} v_T(t_n) - \left(M_P(t_0) + \sum_{T \in \bullet P} W_{T,P} v_T(t_0) \right) = \sum_{T \in \bullet P} W_{T,P} \cdot \gamma_T(t_n) - \sum_{T \in P \bullet \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot \gamma_T(t_n), \quad (18)$$

$$\forall T \in \mathbf{T} \quad \eta_T(t_n) = -v_T(t_n) + v_T(t_0) + \gamma_T(t_n). \quad (19)$$

Уравнения (18), (19) имеют следующий смысл. При входе маркеров в переход маркеры из его входных позиций удаляются и занимают его каналы (увеличивается количество активных каналов перехода). При выходе из перехода маркеры покидают его активные каналы и добавляются в его выходные позиции.

Сумма $M_P(t) + \sum_{T \in \bullet P} W_{T,P} v_T(t)$ представляет общее количество маркеров по-

зиции в момент времени t , которое состоит из маркеров, находящихся в позиции, и маркеров, находящихся во входных переходах позиции (их поступление в позицию планируется в следующие моменты времени). Тогда уравнение (18) приобретает такой смысл: общее количество маркеров в позиции в любой момент времени равно общему количеству маркеров в этой позиции в начальный момент времени плюс количество маркеров, добавленных в позицию в течение всего интервала времени $[t_0, t_n]$, минус количество маркеров, удаленных из позиции в течение всего интервала времени $[t_0, t_n]$.

Для того чтобы записать (18) в матричном виде, введем следующие матрицы и векторы:

$$a_{P,T}^+ = \begin{cases} W_{T,P}, & T \in \bullet P, \\ 0, & T \notin \bullet P, \end{cases} \quad a_{\bar{P},T}^- = \begin{cases} W_{P,T}, & T \in P^\bullet \setminus P^\circ, \\ 0, & T \notin P^\bullet \setminus P^\circ. \end{cases} \quad (20)$$

Объединив уравнения (19), (20), получим фундаментальные уравнения временной сети Петри в матричном виде

$$\mathbf{M}(t_n) + \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{v}(t_n) - (\mathbf{M}(t_0) + \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{v}(t_0)) = \mathbf{a}^+ \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n) - \mathbf{a}^- \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n), \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_n) = -\mathbf{v}(t_n) + \mathbf{v}(t_0) + \boldsymbol{\gamma}(t_n), \quad (22)$$

где $\mathbf{M}(t) = M_P(t)$ — вектор маркировки позиций в момент времени t ; $\mathbf{v}(t) = v_T(t)$ — вектор количества активных каналов переходов; $\mathbf{a}^+ = \|a_{P,T}^+\|$ — матрица выходов; $\mathbf{a}^- = \|a_{\bar{P},T}^-\|$ — матрица входов; $\boldsymbol{\gamma}(t) = \|\gamma_T(t)\|$ — вектор количества входов в переходы за период времени $[t_0, t]$; $\boldsymbol{\eta}(t) = \|\eta_T(t)\|$ — вектор количества выходов из переходов за период времени $[t_0, t]$.

Уравнение (21) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) + \mathbf{a}^+ \cdot (\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(t_0)) = (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n). \quad (23)$$

Из (23) следует

$$\Delta \mathbf{M} + \mathbf{a}^+ \cdot \Delta \mathbf{v} = (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \cdot \boldsymbol{\gamma}(t). \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает изменение общего количества маркеров позиций стохастической временной сети Петри с многоканальными переходами, из него следует, что общее количество маркеров позиций сети Петри однозначно определяется матрицей $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-$ и вектором общего количества входов в переходы сети Петри в течение интервала времени $[t_0, t]$.

Введем обозначение $\mu_P(t) = M_P(t) + \sum_{T \in \bullet P} W_{T,P} v_T(t)$, или в векторном виде

$\boldsymbol{\mu}(t) = M(t) + \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{v}(t)$. Будем называть $\boldsymbol{\mu}(t)$ расширенной маркировкой временной сети Петри. Тогда матричные уравнения (21), (22) принимают вид

$$\boldsymbol{\mu}(t_n) = \boldsymbol{\mu}(t_0) + (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n), \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_n) = -\mathbf{v}(t_n) + \mathbf{v}(t_0) + \boldsymbol{\gamma}(t_n). \quad (26)$$

Уравнение (25) имеет вид фундаментального уравнения базовой сети Петри, к которому применимы известные методы исследования функциональных и структурных свойств сети Петри [1, 13]: достижимость, сохраняемость, ограниченность, активность, управляемость, структурная активность и др.

Заметим, что уравнение (25) отличается от известных фундаментальных уравнений сети Петри [13, 1] тем, что в нем вместо обычной маркировки используется понятие расширенной маркировки, включающей маркеры не только в позициях, но и в переходах сети Петри. Уравнение (26) характеризует количество выходов из переходов сети Петри, соответствующее маркировке и количеству входов. Количество завершенных запусков перехода равно наименьшему из значений $\gamma_T(t_n)$ и $\eta_T(t_n)$: $\chi_T(t_n) = \min \{\gamma_T(t_n), \eta_T(t_n)\}$.

Если количество входов в переходы равно количеству выходов из них, то $\boldsymbol{\eta}(t_n) = \boldsymbol{\gamma}(t_n) = \boldsymbol{\chi}(t_n)$. Как следует из (26), это условие эквивалентно условию $\mathbf{v}(t_n) = \mathbf{v}(t_0)$. Тогда из определения расширенной маркировки имеем

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}(t_n) = \mathbf{M}(t_n) + \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{v}(t_n), \\ \boldsymbol{\mu}(t_0) = \mathbf{M}(t_0) + \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{v}(t_0) \Rightarrow \boldsymbol{\mu}(t_n) - \boldsymbol{\mu}(t_0) = \mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) \Rightarrow \Delta \boldsymbol{\mu} = \Delta \mathbf{M}, \\ \mathbf{v}(t_n) = \mathbf{v}(t_0). \end{cases} \quad (27)$$

Уравнение (25) можно записать в виде $\Delta \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n)$, где $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-$. Тогда из (27) и условия $\boldsymbol{\eta}(t_n) = \boldsymbol{\gamma}(t_n) = \boldsymbol{\chi}(t_n)$ следует

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\chi}(t_n). \quad (28)$$

Уравнение (28), полученное при условии, что количество входов в переходы равно количеству выходов из них в течение времени $[t_0, t]$, аналогично уравнениям, полученным в [13, 14]. Действительно, в этих работах используется понятие вектора количества запусков переходов, что не позволяет различать количество входов в переходы и количество выходов из них.

Покажем, что из уравнений (25), (26) можно получить уравнения стохастической временной сети Петри без информационных связей, уравнения базовой сети Петри [13], уравнения временной сети Петри с детерминированными временными задержками [14].

Если сеть Петри не содержит информационных связей, то множество информационных дуг $I = \emptyset$, откуда следует, что в определении матрицы входов (20) $P^\circ = \emptyset$. Таким образом, уравнения (25), (26) описывают стохастическую временную сеть Петри без информационных связей при $P^\circ = \emptyset$.

Если в уравнениях (25), (26) принять, что все временные задержки равны нулю, то $\forall T \in \mathbf{T} E_T(t) = \infty$. Следовательно, $v_T(t) = \mathbf{0}$, а значит, $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{M}(t)$ и $\boldsymbol{\eta}(t_n) = \boldsymbol{\gamma}(t_n)$. Имеем

$$\mathbf{M}(t_n) = \mathbf{M}(t_0) + (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \cdot \boldsymbol{\chi}(t_n), \quad (29)$$

где $\boldsymbol{\chi}(t_n) = \boldsymbol{\eta}(t_n) = \boldsymbol{\gamma}(t_n)$ — количество запусков переходов.

Уравнение (29) совпадает с уравнениями, описанными в [13], если принять обозначения $\mathbf{M}(t_n) = \mathbf{M}_n$, $\mathbf{M}(t_0) = \mathbf{M}_0$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-$, $\boldsymbol{\chi}(t_n) = \mathbf{x}$. Тогда $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_0 + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$, где \mathbf{M}_0 и \mathbf{M}_n — начальная и текущая маркировки сети Петри соответственно, \mathbf{A} — матрица инцидентности, \mathbf{x} — вектор количества запусков переходов.

Если принять в уравнениях (25), (26), что все временные задержки детерминированные, то $t_n = t_0 + (n-1) \cdot \Delta t$, где Δt — продолжительность одного такта времени. Уравнение (25) с учетом определения расширенной маркировки преобразуем к виду

$$\mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) = (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n) - \mathbf{a}^+ \cdot (\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(t_0)).$$

Отсюда

$$\mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) = \mathbf{a}^+ \cdot (\boldsymbol{\gamma}(t_n) - \mathbf{v}(t_n) + \mathbf{v}(t_0)) - \mathbf{a}^- \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n). \quad (30)$$

Вектор количества входов в переходы $\boldsymbol{\gamma}(t_n)$ в работе [14] называется «вектором счета запусков переходов». Вектор $\boldsymbol{\gamma}(t_n) - \mathbf{v}(t_n) + \mathbf{v}(t_0)$ равен вектору количества выходов из переходов $\boldsymbol{\eta}(t_n)$, как следует из уравнения (26), и в работе [14] называется «вектором счета завершений переходов». Уравнение (30) принимает вид

$$\mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) = \mathbf{a}^+ \cdot \boldsymbol{\eta}(t_n) - \mathbf{a}^- \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n). \quad (31)$$

Обозначим согласно [14] $\mathbf{M}(n)$ маркировку сети Петри в такте с номером n , $\mathbf{M}(0)$ начальную маркировку сети Петри, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^+ = \boldsymbol{\eta}(t_n)$ вектор счета завершений переходов, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^- = \boldsymbol{\gamma}(t_n)$ вектор счета запуска переходов, в результате чего уравнение (31) примет вид

$$\mathbf{M}(n) = \mathbf{M}(0) = \mathbf{a}^+ \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}}^+ - \mathbf{a}^- \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}}^-. \quad (32)$$

Уравнение (32) совпадает с фундаментальным уравнением детерминированной временной сети Петри, полученным в [14].

Таким образом, уравнения (25), (26) представляют фундаментальные уравнения стохастической временной сети Петри, включающие, как частный случай, уравнения стохастической временной сети Петри без информационных связей, уравнения базовой сети Петри и детерминированной временной сети Петри.

Заметим, что матричная запись уравнений состояний удобна для исследования структурных и функциональных свойств сети Петри. Алгоритмическая реализация этих уравнений приводит к вычислениям, сложность которых $O(|\mathbf{P}| + |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{T}|^2 + |\mathbf{T}|)$ при условии, что известен вектор количества входов в переходы $\gamma(t_n)$. Однако поиск допустимого вектора $\gamma(t_n)$ является комбинаторной задачей и относится к NP-классу сложности. Поэтому для алгоритмической реализации рекомендуется использовать уравнения состояний (10).

Если $\det((\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)^T (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)) \neq 0$, то матричные уравнения допускают решение обратной задачи. Пусть заданы векторы $\mathbf{M}(t_n)$, $\mathbf{M}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_n)$, $\mathbf{v}(t_0)$. Тогда вектор $\gamma(t_n)$ можно найти следующим образом:

$$\gamma(t_n) = ((\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)^T (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-))^{-1} (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)^T (\mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) + \mathbf{a}^+ \cdot (\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(t_0))).$$

Если компоненты $\gamma(t_n)$ нецелые или отрицательные, то состояние $\mathbf{M}(t_n)$, $\mathbf{v}(t_n)$ недостижимо. Если компоненты $\gamma(t_n)$ целые и неотрицательные, то необходимо исследовать соответствующую последовательность запусков переходов, что в случае временной сети Петри является NP-сложной задачей еще и потому, что не всякая последовательность запусков переходов допускает реализацию во времени.

ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВРЕМЕННОЙ СЕТИ ПЕТРИ

Рассмотрим задачу динамического распределения вычислительных ресурсов (рис. 4). Позиция P_0 представляет количество доступного ресурса, позиции P_1 , P_2 , P_3 — буфер заданий A, B, C соответственно. Предполагается, что в буфере заданий всегда есть задания для вычислений. Временные задержки в переходах T_0, T_1, T_2 определяют время выполнения заданий A, B, C . Неравномерное потребление ресурсов приводит к тому, что при отсутствии процессов управления задания с меньшей потребностью ресурса используют его в полной мере, а задания с большей потребностью находятся в постоянном ожидании освобождения необходимого объема ресурса.

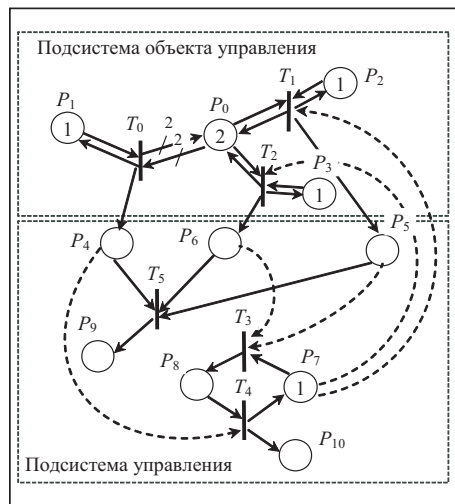


Рис. 4. Сеть Петри, моделирующая управление распределением вычислительных ресурсов

Управление распределением ресурсов осуществляется блокированием возможности захвата ресурсов на основании информации о количестве выполненных заданий. Переход T_5 сравнивает количество выполненных заданий A, B, C с другими заданиями так, что информация о $\min \{N_A, N_B, N_C\}$ содержится в позиции P_9 , а информация о разностях $N_A - \min \{N_A, N_B, N_C\}$, $N_B - \min \{N_A, N_B, N_C\}$, $N_C - \min \{N_A, N_B, N_C\}$ содержится в позициях P_4, P_5, P_6 соответственно. При большем количестве выполненных заданий B и C принимается решение о блокировке их выполнения (переход T_3), а при большем количестве выполненных заданий A — решение о снятии этой блокировки (переход T_4).

Рассмотрим подсистему объекта управления (без подсистемы управления). Соответствующая базовая сеть Петри обладает инвариантами состояния и поведения, и последовательность запусков переходов, которая приводит к одинаковому количеству выполненных заданий, является допустимой. В действительности задания соперничают за захват ресурса настолько, что, например, при временных задержках в переходах T_0, T_1, T_2 в среднем 1, 0.157 и 0.333 соответственно задания B и C ,

однажды захватив ресурс и поочередно его освобождая, не дают возможности заданиям A занять ресурс. Этот эффект невозможен в базовой сети Петри. Следовательно, базовая и временная сети Петри существенно отличаются.

Исследование модели управления ресурсами с помощью матричных уравнений (25), (26) позволяет установить структурные свойства сети Петри, подтверждающие правильность ее построения. Например, из матричных уравнений (25) следует, что достижимыми являются маркировки вида

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t_n) &= \mathbf{M}(t_0) + (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \cdot \gamma(t_n) - \mathbf{a}^+ \cdot (\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(t_0)) = \\ &= (2-2v_0 - v_1 - v_2 \quad 1-v_0 \quad 1-v_1 \quad 1-v_2 \quad \gamma_0 - \gamma_5 - v_0 \quad \gamma_1 - \gamma_5 - v_1 \\ &\quad \gamma_2 - \gamma_5 - v_2 \quad 1-\gamma_3 + \gamma_4 \quad \gamma_3 - \gamma_4 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5)^T, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}(t_n) = (v_0 \ v_1 \ v_2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $\gamma(t_n) = (\gamma_0 \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4 \ \gamma_5)^T$. Отсюда $2-2v_0 - v_1 - v_2 \geq 0$, $v_0 \leq 1$, $v_1 \leq 1$, $v_2 \leq 1$, $\gamma_0 \geq \gamma_5 + v_0$, $\gamma_1 \geq \gamma_5 + v_1$, $\gamma_2 \geq \gamma_5 + v_2$, $0 \leq \gamma_3 - \gamma_4 \leq 1$. Следовательно, недостижимыми являются маркировки, в которых количество маркеров в позиции P_0 больше двух, в позициях P_1, P_2, P_3, P_7, P_8 — больше одного, что соответствует смыслу модели.

Временная сеть Петри (см. рис. 4) не обладает инвариантами поведения или состояния ввиду наличия позиций-счетчиков P_9, P_{10} . Однако такие позиции-счетчики позволяют сделать уникальным состояние временной сети Петри в каждый момент времени и, как следствие, добиться существования матрицы $((\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)^T (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-))^{-1}$. Пусть целью управления является обеспечение примерно одинакового количества выполненных заданий всех классов. Это требование соответствует тому, что маркировка, для которой количество маркеров в позициях P_4, P_5, P_6 было нулевым, достижима в любой момент времени. Например, состояние сети Петри $\mathbf{M}(t_n) = (2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 50 \ 6)^T$, $\mathbf{v}(t_n) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ достигается при количестве входов в переходы, равном

$$\begin{aligned} \gamma(t_n) &= ((\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)^T (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-))^{-1} (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-)^T (\mathbf{M}(t_n) - \mathbf{M}(t_0) + \mathbf{a}^+ (\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(t_0))) = \\ &= (51 \ 50 \ 50 \ 7 \ 6 \ 50)^T. \end{aligned}$$

Все компоненты найденного вектора целые неотрицательные числа и все последовательности запусков переходов с точки зрения базовой сети Петри допустимы, однако вероятность наблюдения в стохастической сети Петри последовательности запусков переходов с найденным количеством запусков переходов близка к нулю.

Исследование с помощью имитации функционирования в соответствии с уравнениями (10) позволяет оценить среднее количество выполненных заданий и среднее количество свободных ресурсов для заданного времени моделирования, а также осуществить выбор параметров управления, удовлетворяющих определенной цели. Например, при имитации на интервале времени 500 при временных задержках в переходах T_0, T_1, T_2 , равных экспоненциально распределенным случайным величинам со средними значениями 1, 0.157 и 0.333 соответственно, среднее количество выполненных заданий в позиции P_9 равно 379.75, среднее количество выполненных заданий классов — 433.5, 0.5, 0. Введем параметры управления, соответствующие условиям, при которых принимается решение о блокировке $a = w_{5,3} = w_{5,5}$, $b = w_{6,3} = w_{6,5}$, $c = w_{4,4} = w_{4,5} = 1$.

Результаты экспериментов при различных значениях параметров приведены на рис. 5. Из них следует, что $a = 1, b = 2$ — наилучшая комбинация с точки зрения наибольшего общего количества выполненных заданий, $a = 2, b = 1$ — наилучшая комбинация параметров с точки зрения достижения наименьшего преимущества в количестве выполненных заданий различных классов, а комбинация $a = 2, b = 2$ — наилучшая с точки зрения наибольшего количества решенных задач класса C .

Практическое применение стохастической сети Петри для системы управления учебным процессом вуза описано в [7].

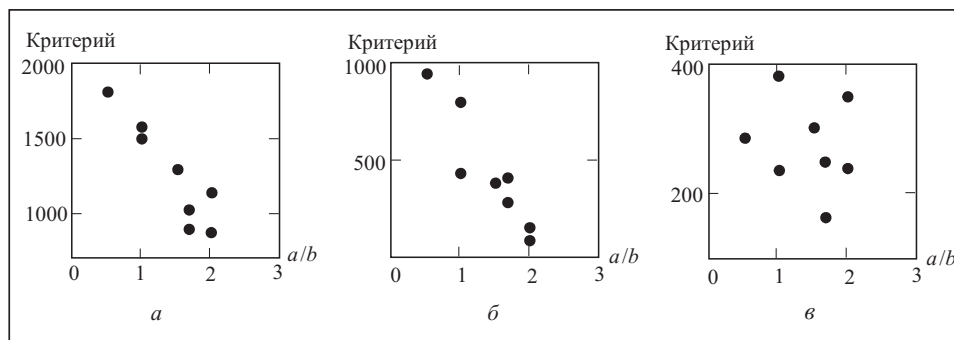


Рис. 5. Результаты экспериментального исследования параметров системы управления распределением ресурсов при различных критериях: общее количество выполненных заданий всех классов (*а*), суммарное превышение количества выполненных заданий всех классов наименьшего количества выполненных заданий (*б*), количество выполненных заданий класса *С* (*в*)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате научного исследования получены логико-алгебраические уравнения преобразований временной сети Петри, соответствующих входам и выходам маркеров из переходов, выведены обычные и матричные уравнения состояний стохастической временной сети Петри с многоканальными и конфликтными переходами, информационными связями. Показано, что фундаментальные матричные уравнения, которые получены для стохастической временной сети Петри, содержат, как частный случай, уравнения стохастической временной сети Петри без информационных связей, уравнение детерминированной временной сети Петри и уравнение базовой сети Петри. Отличия известных уравнений состояний сети Петри от уравнений стохастической временной сети Петри заключаются в следующем:

- вместо обычной маркировки используется расширенная маркировка сети Петри, включающая не только маркеры, которые находятся в данный момент времени в позициях сети Петри, но и маркеры, ожидающие выхода в переходах;

- имеется уравнение, отвечающее за продвижение времени, из которого следует, что момент ближайшего события полностью определяется текущим состоянием переходов сети Петри;

- фактическое количество входов в переходы ограничено требованием достижения такого состояния сети Петри, при котором для всех ее переходов не выполняется условие запуска;

- для разрешения конфликтов переходов предложен алгоритм выбора перехода из множества переходов с выполненным условием запуска, основанный на значениях приоритетов и вероятностей запусков переходов.

Уравнения преобразований сети Петри, соответствующие входу и выходу маркеров из переходов, представляют полное формализованное описание алгоритма имитации стохастической временной сети Петри с конфликтными и многоканальными переходами, с информационными связями. Матричные уравнения состояний применяются для аналитических методов исследования свойств стохастической временной сети Петри.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев Д. А., Слепцов А. И. Уравнения состояний и эквивалентные преобразования временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 5. — С. 59–76.
2. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. — М.: Мир, 1984. — 264 с.
3. Стеценко І. В. Моделювання систем: Навч. посіб. — Черкаси: Маклаут, 2011. — 502 с.
4. Стеценко І. В., Данилюк А. А. Імітаційне моделювання систем управління засобами сіток Петрі // Вісн. Черкас. держ. технол. ун-ту. — 2005. — № 3. — С. 293–295.
5. Стеценко І. В., Бойко О. В. Система імітаційного моделювання засобами сіток Петрі // Мат. машини і системи. — 2009. — № 1. — С. 117–124.

6. Стеценко І.В., Стеценко В.Г., Дифучин Ю.М. Імітаційна модель дорожнього руху на перехресті, керованому світлофором // Вісн. Черкас. держ. технол. ун-ту. — 2005. — № 1. — С. 28–32.
7. Стеценко І.В. Імітаційне моделювання системи управління навчальним процесом ВНЗ з використанням об'єктно-орієнтованого підходу // Мат. машини і системи. — 2011. — № 2. — С. 162–170.
8. Котов В.Е. Сети Петри. — М.: Наука, 1984. — 158 с.
9. Зайцев Д.А. Построение сети Петри, исполняющей машину Тьюринга // Материалы IV междунар. науч.-техн. конф. «Компьютерная математика в науке, инженерии и образовании» (CMSEE-2010), Полтава, 1–31 окт. 2010 г. — Киев: Изд-во НАН Украины, 2010. — С. 12–14.
10. Wang J. Timed Petri nets: theory and application. — Massachusetts: Kluwer Acad. Publ., Oct., 1998. — 290 p.
11. Naas P. J. Stochastic Petri nets: modelling, stability, simulation // Springer Series in Operations Research. — 2002. — 529 p.
12. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. — 3-е изд. — СПб.: Питер; Киев: Изд. группа BHV, 2004. — 847 с.
13. Murata T. Petri nets: properties, analysis and applications // Proc. IEEE. — 1989. — 77, N 4. — P. 541–580.
14. Зайцев Д.А. Инварианты временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 92–106.
15. Стеценко І.В. Моделювання управляючих систем засобами мереж Петрі з інформаційними зв'язками // Вісн. Черкас. держ. технол. ун-ту. — 2011. — № 3. — С. 3–9.

Поступила 25.05.2011