СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 536.24

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Ключевые слова: *обратные задачи, псевдообратные матрицы, нормальные псевдорешения.*

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] рассматривались вопросы построения явных выражений градиентов функционалов невязок для идентификации градиентными методами [7] различных параметров многокомпонентных распределенных систем. Основой их построения являются результаты теории оптимального управления состояниями различных многокомпонентных распределенных систем [4–6].

В настоящей статье рассматриваются вопросы использования псевдообратных матриц для идентификации за конечное число арифметических действий некоторых параметров нестационарной теплопроводности многокомпонентных тел.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим задачу восстановления плотности теплового потока $u(t)$ на внешней стороне пластины толщиной b с известным распределением температуры на противоположной ее стороне и заданном на ней условии Фурье.

Состояние системы описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\tilde{f}(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y+\beta,\ x=0,\ t\in(0,T),$$

$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u(t),\ x=b,\ t\in(0,T), \qquad (1)$$

$$y(x,0)=y_0(x),\ x\in\Omega,$$

где $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,b)$.

В точке $x=0$ при $t\in(0,T)$ известна температура

$$y(0,t)=\tilde{f}_0(t). \qquad (2)$$

Задача (1), (2) состоит в определении функции $u=u(t)\in C([0,T])$, при которой решение $y=y(u)=y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (1) удовлетворяет равенству (2).

Пусть $y = y(0; x, t)$ — решение начально-краевой задачи (1) при $u = 0$. Тогда для определения искомой функции $u \in \mathcal{U}$ на основании (1), (2) получаем обратную задачу: состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right), \ (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-k\frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y, \ x = 0, \ t \in (0, T), \tag{3}$$

$$k\frac{\partial y}{\partial x} = u(t), \ x = b, \ t \in (0, T),$$

$$y(x, 0) = 0, \ x \in \Omega;$$

решение задачи должно удовлетворять равенству

$$y(0, t) = f_0(t), \ t \in (0, T), \tag{4}$$

где $f_0 = \widetilde{f}_0 - y(0;\ 0,\ t)$.

При каждой фиксированной функции $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (3) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, z\right) + a(y, z) = l(u; z), \ t \in (0, T), \tag{5}$$

$$(y(x, 0),\ z) = 0, \ x \in \Omega, \tag{6}$$

где $V_0 = W_2^1(\Omega)$ — пространство функций Соболева,

$$W(0, T) = \left\{ v \in L^2(0, T; V): \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V = \{v(x, t): \ v \in W_2^1(\Omega) \ \ \forall t \in (0, T)\},$$

$$a(y, z) = \int_0^b k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}dx + \alpha\, y(0,\ t)\, z(0), \ l(u; z) = u\, z(b), \ (\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi\, dx.$$

Теорема 1. При каждой фиксированной функции $u \in \mathcal{U}$ решение $y = y(u; x, t) \in W(0, T)$ задачи (5), (6) существует и единственно.

Справедливость теоремы устанавливается, следуя [8]. Таким образом, имея решение задачи (5), (6) как функцию $y = y(u; x, t)$ параметра $u = u(t)$, на основании (4) получаем равенство

$$Au = f_0(t), \ t \in (0, T), \tag{7}$$

при этом $Au = y(u; 0, t)$.

Пусть $\{\overline{\varphi}_l(t)\}_{l=1}^m$ — система линейно независимых функций из $\mathcal{U}$, определенных на временном отрезке [0,T]. Искомую функцию $u(t)$ будем находить в виде

$$u = u_m(t) = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l \overline{\varphi}_l(t), \ u_m \in \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}, \ \overline{u}_l \in R, \ l = \overline{1, m}. \tag{8}$$

Поскольку задача (5), (6) линейная, ее решение $y(u_m; x, t)$ представимо в виде

$$y(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l\, y(\overline{\varphi}_l; x, t) = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l\, y_l(x, t), \tag{9}$$

где $y_l(x, t)$ — функция из $W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial y_l}{\partial t}, z\right) + a(y_l, z) = l(\overline{\varphi}_l; z), \ t \in (0, T), \tag{10}$$

$$(y_l, z)(0) = 0, \ l = \overline{1, m}. \tag{11}$$

При каждом фиксированном l каждую из задач (10), (11) будем решать приближенно. Введем в рассмотрение линейное множество $M_{0n} \subset H_0$ функций $v(x)$ с базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$. С помощью этого базиса образуем множество $M_{1n} \subset W(0, T)$ функций $y_n(x, t)$, каждая из которых может быть представлена в виде

$$y_{ln}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l(t) \varphi_i(x), \tag{12}$$

где $\alpha_i^l \in C^1([0, \ T])$, $i = \overline{1, n}$.

С учетом (12) для определения векторов $\alpha^l(t) = (\alpha_1^l(t), \dots, \alpha_n^l(t))^{\mathrm{T}}$ получаем следующие задачи Коши:

$$M\dot{\alpha}^l(t) + K\alpha^l(t) = f^l(t), \ l = \overline{1, m}, \tag{13}$$

$$\alpha^l(0) = 0, \tag{14}$$

где $M = M^{\mathrm{T}} = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $m_{ij} = \int\limits_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx$, $K = K^{\mathrm{T}} = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $k_{ij} = a(\varphi_i \varphi_j)$, $f^l(t) = \{f_i^l(t)\}_{i=1}^n$, $f_i^l(t) = \overline{\varphi}_l(t) \varphi_i(b)$, $i = \overline{1, n}$.

Очевидно, что решения $\alpha^l(t)$, $l = \overline{1, m}$, задач (13), (14) существуют и единственны. Следовательно, приближенное решение $y_n(u_m; x, t) = y_n^m(x, t)$ задачи (5), (6) при $u = u_m$ существует, единственно и представляется в виде

$$y_n^m(x, t) = y_n(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^{m} \overline{u}_l \, y^l(x, t), \tag{15}$$

где $y^l(x, t) = y_{ln}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l(t) \varphi_i(x)$. На основании (9), (15) получаем приближение оператора Au_m:

$$\overline{A} u_m = \sum_{l=1}^{m} \overline{u}_l \, y^l(0, t) \approx Au_m = f_0, \ t \in (0, \ T). \tag{16}$$

Теорема 2. Пусть классические решения $y_l(x, t)$ задач (10), (11) принадлежат классу $C^{k+1,1}(\Omega_T)$. Тогда имеет место оценка

$$\| Au_m - \overline{A} u_m \|_{L_2(0,T)} \le ch^k, \tag{17}$$

где $c = \mathrm{const}$, h — наибольшая из длин всех элементарных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, \overline{N} - 1}$, разбиения отрезка $[0, b]$, $\varphi_i(x)_{i=1}^n$ — базис конечноэлементного пространства $H_{k_0}^N$ функций $v_k^N(x) \in C([0, b])$, которые являются полиномами k-й степени переменной x на каждом конечном элементе $[x_i, x_{i+1}]$.

Решив задачи Коши (13), (14) одним из численных методов, получим дискретное приближение $\overline{A}^j u_m$, $j = \overline{1, M}$, оператора $Au_m(t_j)$ ($M + 1$ — количество точек t_j дискретизации отрезка $[0, T \ ]$),

$$\overline{A}^j u_m = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{lj} \varphi_i(0) \, \overline{u}_l = \sum_{l=1}^{m} y^l(0, t_j) \, \overline{u}_l. \tag{18}$$

Учитывая (4), (18), получаем

$$\sum_{l=1}^{m} y^l(0, t_j) \, \overline{u}_l = f_0(t_j), \ j = \overline{1, M}, \tag{19}$$

или

$$Av = f, \tag{20}$$

где $A \in \mathbb{R}^{M \times m}$ — прямоугольная матрица, $A = \{a_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{M,m}$, $a_{ij} = y^j(0, t_i)$, $f = \{f^i\}_{i=1}^{M}$, $f^i = f_0(t_i)$, $t_i \in (0, T]$, $t_M = T$, $v = \{\bar{u}_l\}_{l=1}^{m}$.

Известно, что при $M = m$ и $\det A \neq 0$ классическое решение v задачи (20) существует и единственно; $v = A^{-1} f$. Если $\det A = 0$ или $M \neq m$, то задача (20) может не иметь классического решения. Тогда рассматривается обобщенное решение v (решение в смысле наименьших квадратов) как вектор, удовлетворяющий равенству

$$\| Av - f \| = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \| Ax - f \|, \tag{21}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Известно, что обобщенные решения и только они являются классическими решениями всегда совместной системы линейных алгебраических уравнений

$$A^{\mathrm{T}} A v = A^{\mathrm{T}} f, \tag{22}$$

где A^{T} — матрица, транспонированная к A.

Обобщенное решение v, имеющее наименьшую евклидову норму, называется нормальным обобщенным решением, которое всегда существует и единственно [9].

Для системы линейных алгебраических уравнений с матрицей A полного ранга $r_A = \min\{M, m\}$ различают два случая: при $M < m$ недоопределенная система (20) совместна, но имеет не единственное решение; при $M > m$ переопределенная система (20) может быть несовместной.

Согласно [10] единственное нормальное псевдорешение переопределенной системы (20) с матрицей A полного ранга является классическим решением системы (22) с квадратной невырожденной (в силу равенств рангов матриц $A, A^{\mathrm{T}} A$) матрицей $A^{\mathrm{T}} A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Для недоопределенной системы (20) ее нормальное псевдорешение v_0 из решения y системы [10]

$$A A^{\mathrm{T}} y = f \tag{23}$$

с квадратной невырожденной матрицей $AA^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ получаем так:

$$v_0 = A^{\mathrm{T}} y. \tag{24}$$

Для решения системы (20) с прямоугольной матрицей A неполного ранга или вырожденной квадратной матрицей A часто применяют методы сингулярного разложения [11], использующие псевдообратные матрицы A^{+} [12, 13], методы регуляризации А.Н. Тихонова, предложенные в [14, 15], многочленные методы регуляризации и регуляризованные итерационные процессы [16], итерационные процессы высоких скоростей сходимости [17, 18], прямые методы, описанные в [9].

Следуя [11], существуют ортогональная матрица $U \in \mathbb{R}^{M \times M}$, ортогональная матрица $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и диагональная матрица $\Sigma \in \mathbb{R}^{M \times m}$ такие, что для прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{M \times m}$ ранга r имеет место представление

$$U^{\mathrm{T}} A V = \Sigma, \quad A = U \Sigma V^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

где r ее диагональных элементов строго больше нуля и их можно расположить в невозрастающем порядке, т.е. $\Sigma = \mathrm{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \ \ldots \ \ldots, \sigma_{\min\{M, m\}}]$ при $r = \min\{M, m\}$, а при $r < \min\{M, m\}$ $\Sigma = \mathrm{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0]$. Здесь $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Представление (25) называется сингулярным разложением матрицы A. Диагональные элементы σ_l, $l = \overline{1, r}$, являются неотрицательными значениями квадратных корней из общих собственных значений матриц AA^{T}, $A^{\mathrm{T}}A$ и называются сингулярными числами матрицы A. Матрица U получена из M ортонормированных собственных векторов матрицы AA^{T}, матрица V — из m ортонормированных собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}A$. Зная сингулярное разложение [9, 11, 19], получим псевдообратную матрицу

$$A^{+}=V\Sigma^{+}U^{\mathrm{T}}, \tag{26}$$

позволяющую определить единственное нормальное псевдорешение [11]

$$v^{+}=A^{+}f=V\Sigma^{+}U^{\mathrm{T}}f \tag{27}$$

задачи (20), где $\Sigma=\mathrm{diag}\,[\sigma_1^{+},\sigma_2^{+},\ldots,\sigma_{\min\{M,m\}}^{+}]$, $\sigma_i^{+}=1/\sigma_i$ при $\sigma_i>0$, $i=\overline{1,r}$, и $\sigma_i^{+}=0$ при $\sigma_i=0$, $i=r+1,\ldots,\min\{M,m\}$.

Детальное рассмотрение вопросов построения нормальных обобщенных решений систем линейных алгебраических уравнений (20) с прямоугольными матрицами и с квадратными вырожденными матрицами на основе сингулярного разложения проведено, например, в работах [11, 19].

Следует заметить, что матрица A системы линейных алгебраических уравнений (20) есть дискретное приближение оператора $\bar{A}$, порожденного задачами (10), (11) при $u=u_m(x)=\sum_{l=1}^{m}\bar{u}_l\bar{\varphi}_l(t)$. Столбцы $\bar{A}^{l}$, $l=\overline{1,m}$, оператора $\bar{A}$ образуют значения $y_l(0,t)$ решения $y_l(x,t)$ задачи (10), (11), а матрицу A образуют векторы y^{l}, являющиеся дискретными приближениями решения $y_l(x,t)$ задачи (10), (11) в точке $x=0$ при $t=t_i$, $i=\overline{1,M}$.

В силу того, что оператор A построен численно с использованием базисных функций метода конечных элементов (МКЭ) и численного решения задачи Коши (13), (14), он аппроксимирует оператор $\bar{A}$ с некоторой относительной погрешностью E_A, а вектор f аппроксимирует функцию $\bar{f}$ с погрешностью δ, т.е. вектор f системы (20) имеет относительную погрешность E_f.

Следуя [19], для прямоугольной матрицы $\bar{A}\in\mathbb{R}^{M\times m}$ полного ранга $r(\bar{A})$, т.е. в случае $r(\bar{A})=\min\{M,m\}$, относительная наследственная погрешность нормального псевдорешения при условии $\|\Delta A\|\cdot\|A^{+}\|<1$ для $M>m$ оценивается как

$$\frac{\|v^{+}-\bar{v}^{+}\|}{\|v^{+}\|}\le\frac{h(A)}{1-h(A)E_A}\left(\left((1+h(A))\frac{\|e\|}{\|Av^{+}\|}\right)E_A+E_f\right), \tag{28}$$

а для $M<m$ — как

$$\frac{\|v^{+}-\bar{v}^{+}\|}{\|v^{+}\|}\le\frac{h(A)(2E_A+E_f)}{1-h(A)E_A},$$

где $e=Au-f$, $\|\bar{A}-A\|=\|\Delta A\|$, $\|\bar{f}-f\|=\|\Delta f\|$, $E_A=\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$, $E_f=\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}$, $\bar{f}$ — вектор точных значений замеров-наблюдений в точках $(0,t_i)$, $i=\overline{1,M}$, $h(A)=\|A\|\cdot\|A^{+}\|$.

В работах [14, 15] рассмотрен вопрос получения нормального псевдорешения v^{+} системы линейных алгебраических уравнений (20) с действительной прямоугольной или вырожденной квадратной матрицей A на основе решения системы линейных алгебраических уравнений

$$(A^{\mathrm{T}}A+\alpha E)\,v_\alpha=A^{\mathrm{T}}f, \tag{29}$$

где $\alpha=\mathrm{const}>0$.

Выбору параметра регуляризации α посвящено значительное количество работ. В монографии [15] приведена достаточно полная библиография по данному вопросу. В литературе описаны различные способы нахождения параметра регуляризации. В [15] отмечается, что выбор способа определения параметра регуляризации существенно зависит от той информации, которая имеется относительно приближенных исходных данных.

В [14] показано, что $\| v^{+} - v_{\alpha} \| \le \varepsilon$ при $\| \overline{A} - A \| \le \delta$, $\| \bar{f} - f \| \le \delta$, когда исходная система $\overline{A} v = \overline{f}$ с вырожденной квадратной матрицей $\overline{A}$ совместна, а точность исходных данных удовлетворяет условию $\delta \le \delta_0 (\varepsilon \| v^{+} \|)$ и параметр α выбран в зависимости от ε, δ в интервале $\frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} \le \alpha \le \alpha_0(\delta)$, где $\varepsilon(\delta)$ и $\alpha_0(\delta)$ — функции, стремящиеся к нулю при $\delta \to 0$ и $\frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} \le \alpha_0(\delta)$.

Кратко остановимся на новых методах нахождения нормальных псевдорешений. В работе [16] на основе многочленных предельных представлений предложены и исследованы регуляризованные задачи при вычислении нормальных псевдорешений двух типов для системы (20):

$$(A^{\mathrm{T}} A + \delta E)^{p} v = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (A^{\mathrm{T}} A + \delta E)^{p-k} A^{\mathrm{T}} f, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

и

$$\prod_{k=0}^{n-1} (A^{\mathrm{T}} A + \delta E)^{2^k + 1} v = \prod_{k=0}^{n-1} \{ (A^{\mathrm{T}} A + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E \} A^{\mathrm{T}} f, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{31}$$

Для решений этих систем получены соответственно оценки близости точного значения нормального псевдорешения v^{+} и решений указанных выше задач $v_{\delta, p}$ и $v_{\delta, n}$:

$$\| v^{+} - v_{\delta, p} \| \le \sigma_*^{-1} \delta^{p} (\delta + \sigma_*^2)^{-p} \| f \|, \quad \| v^{+} - v_{\delta, n} \| \le \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)} \| f \|, \tag{32}$$

где σ_* — минимальное ненулевое сингулярное число матрицы A.

Если положить в (30) $p = 1$, то получим систему (29), для которой справедлива оценка

$$\| v^{+} - v_{\alpha, 1} \| \le \sigma_*^{-1} \alpha (\alpha + \sigma_*^2)^{-1} \| f \|. \tag{33}$$

Следовательно, регуляризованная задача (30) является обобщением регуляризованной задачи (29). Сравнение оценок (32) с оценкой (33) показывает преимущество задач (30), (31) по сравнению с задачей (29) по точности приближений решений этих задач к нормальному псевдорешению системы (20).

В работе [16] на основе разложений псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней предложены регуляризованные итерационные процессы для вычисления нормальных псевдорешений. Так, на основе разложения псевдообратных матриц в матричные степенные произведения предложен и исследован итерационный метод регуляризации для вычисления нормальных псевдорешений

$$v_{\delta,0} = (A^{\mathrm{T}} A + \delta E)^{-1} A^{\mathrm{T}} f, \quad v_{\delta, k} = v_{\delta, k-1} + \delta^{2^{k-1}} (A^{\mathrm{T}} A + \\ + \delta E)^{-(2^{k-1})} v_{\delta, k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

Получена также оценка близости k-го приближения итерационного процесса (34) к нормальному псевдорешению $v^{+} = A^{+} f$:

$$\| v^{+} - v_{\delta, k} \| \le \delta^{2^k} \sigma_*^{-1} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^k)} \| f \|.$$

Следует отметить, что скорость сходимости итерационного метода регуляризации (34) будет выше, чем итерационного метода регуляризации, предложенного в монографии [20].

В [17] как на основе разложений псевдообратных матриц в матричные степенные произведения, так и на основе других подходов построены итерационные процессы для вычисления нормальных псевдорешений с различными скоростями сходимости.

В [18] предложены и исследованы итерационные процессы для вычисления нормальных псевдорешений на основе разложений псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней. Так, на основе разложений псевдообратных матриц в матричные степенные произведения предложен и исследован итерационный процесс

$$v_{1,\alpha} = \alpha[E + (E - \alpha A^{\mathrm{T}} A)] A^{\mathrm{T}} f, \; v_{k,\alpha} = v_{k-1,\alpha} + (E - \alpha A^{\mathrm{T}} A)^{2^{k-1}} v_{k-1,\alpha}, \; k = 2, 3, \ldots$$

Показано, что этот итерационный процесс сходится к $v^{+} = A^{+} f$, причем имеет место оценка

$$\| v^{+} - v_{k,\alpha} \| \le \max_{\sigma_i \ne 0} (\sigma_i^{-1} |1 - \alpha \sigma_i^2|^{2^k}) \, \| f \| ,$$

где $0 < \alpha < 2\sigma_{\max}^{-2}$, $\sigma_{\max}$ — максимальное сингулярное число матрицы A.

Замечание. Отметим, что в работах [16–18] рассматривается более общая задача, а именно построение методов нахождения взвешенных нормальных псевдорешений. Нормальные псевдорешения представляют частный случай взвешенных, когда веса — единичные матрицы.

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (1), где функция $u = u(t) \in \mathcal{U}$ является неизвестной. Пусть в некоторых точках $d_i \in (0, b)$, $i = \overline{1, \overline{N}}$, на промежутках времени $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$ известны значения решения $y(x, t)$ начально-краевой задачи (1), заданные равенствами

$$y(d_i, t) = \tilde{f}_i, \; t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}], \; i = \overline{1, \overline{N}}, \tag{35}$$

где $\bigcup_{i=1}^{\overline{N}} [\bar{t}_i, \; \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$.

Полученная задача (1), (35) состоит в определении функции $u = u(t) \in \mathcal{U}$, при которой решение $y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (1) удовлетворяет равенствам (35).

Пусть $y = y(0; x, t)$ — решение начально-краевой задачи (1) при $u = 0$. Тогда для определения искомой функции $u \in \mathcal{U}$ на основании (1), (35) получаем задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей (3), а на основании (35) имеем равенства

$$y(d_i, t) = f_i \;, \; t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}], \; i = \overline{1, \overline{N}}, \tag{36}$$

где $f_i = \tilde{f}_i - y(0; d_i, t)$, $t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, $i = \overline{1, \overline{N}}$.

При каждой фиксированной функции $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (3) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам (5), (6). Следовательно, имея решение задачи (5), (6) как функцию $y = y(u; x, t)$ параметра $u = u(t) \in \mathcal{U}$, на основании (36) получаем равенство

$$Au = f, \tag{37}$$

при этом $Au = \{A_i u\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $f = \{f_i\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $A_i u = y(u; d_i, t)$, $f_i = f_i(t)$, $t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, $i = \overline{1, \overline{N}}$.

Пусть $\{\overline{\varphi}_l(t)\}_{l=1}^m$ — система линейно независимых функций из $\mathcal{U}$, определенных на временном отрезке $[0,T]$. Искомую функцию $u(t)$ будем находить в виде (8). Поскольку задача (5), (6) линейная, ее решение $y=y(u_m;x,t)$ представляется в виде (9), где $y_l(x,t)$ — решение задачи (10), (11). Используя метод конечных элементов, для определения коэффициентов $\alpha_i^l(t)$, $i=\overline{1,n}$, приближения $y_{l\,n}(x,t)$ (12) решения $y_l(x,t)$ задачи (10), (11) получаем задачи Коши (13), (14). С учетом (15) получаем приближение $\overline{A}u_m=\{\overline{A}_i u_m\}_{i=1}^{\overline{N}}$ оператора Au_m, где

$$\overline{A}_i u_m=\sum_{l=1}^m \overline{u}_l\, y^l(d_i,t)\,,\ t\in[\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}]\,,\ i=\overline{1,\overline{N}}. \tag{38}$$

Теорема 3. Пусть решения $y_l(x,t)$ задачи (10), (11) принадлежат классу $C^{k+1,1}(\Omega_T)$. Тогда имеет место оценка

$$\|Au_m-\overline{A}u_m\|_{L_2}\le ch^k\,, \tag{39}$$

где $\|Au_m-\overline{A}u_m\|_{L_2}^2=\sum_{i=1}^{\overline{N}}\int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}}(A_i(u_m)-\overline{A}_iu_m)^2\,dt$; c, h, k определены в теореме 2.

Решив задачи Коши (13), (14) с помощью одного из численных методов, получим дискретное приближение $\overline{A}_i^j u_m$, $j=\overline{m_i,M_i}$, составляющей $A_iu_m(t_j)$, где M_i-m_i+1 — количество точек t_j дискретизации отрезка $[\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}]$,

$$\sum_{l=1}^m y^l(d_i,t_j)\,\overline{u}_l=f_i(t_j)\,,\ j=\overline{m_i,M_i},\ i=\overline{1,\overline{N}}, \tag{40}$$

или

$$AU=F, \tag{41}$$

где $A\in\mathbb{R}^{\overline{M}\times m}$ — прямоугольная матрица, F — вектор:

$$A=\begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 & \dots & Y_1^m\\ Y_2^1 & Y_2^2 & \dots & Y_2^m\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ Y_{\overline{N}}^1 & Y_{\overline{N}}^2 & \dots & Y_{\overline{N}}^m \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ .\\ .\\ .\\ F_{\overline{N}}\end{pmatrix},\ Y_i^l=\{Y_{ij}^l\}_{j=m_i}^{M_i},\ F_i=\{F_{ij}\}_{j=m_i}^{M_i}, \tag{42}$$

$$Y_{ij}^l=y^l(d_i,t_j),\ f_{ij}=f_i(t_j),\ j=\overline{m_i,M_i},\ \overline{M}=\sum_{i=1}^{\overline{N}}(M_i-m_i)+\overline{N}.$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (41) остаются в силе все замечания, высказанные относительно системы (20).

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ФИНАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (1), где функция $u=u(t)\in\mathcal{U}$ неизвестна. Пусть при $t=T$ известно решение начально-краевой задачи (1), заданное равенством

$$y(x,T)=\tilde{f}_0,\ x\in\overline{\Omega}\,. \tag{43}$$

Полученная задача (1), (43) состоит в определении функции $u=u(t)\in\mathcal{U}=C([0,T])$, при которой решение $y=y(u;x,t)$ задачи (1) удовлетворяет равенству (43).

Пусть $y=y(0;\,x,t)$ — решение начально-краевой задачи (1) при $u=0$. Тогда для определения искомой функции $u(t)\in\mathcal{U}$ на основании (1), (43) получаем обратную задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей (3), а на основании (43) получаем равенство

$$y(x,T) = f_0(x), \; x \in \overline{\Omega}, \tag{44}$$

где $f_0 = \widetilde{f}_0 - y(0;x,T)$.

При каждой фиксированной функции $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (3) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y = y(u;x,t) \in W(0,T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам (5), (6). Следовательно, имея решение задачи (5), (6) как функцию $y = y(u) = y(u;x,t)$ параметра $u = u(t) \in \mathcal{U}$, на основании (44) получаем равенство

$$Au = f_0, \tag{45}$$

при этом $Au = y(u;\, x, T),\; x \in \overline{\Omega}$.

Пусть $\{\overline{\varphi}_l(t)\}_{l=1}^m$ — система линейно независимых функций из $\mathcal{U}$, определенных на временном отрезке $[0,T]$. Искомую функцию $u(t)$ будем находить в виде (8). В силу линейности задачи (5), (6) ее решение $y = y(u_m;x,t)$ представляется в виде (9), где $y_l(x,t)$ — решение задачи (10), (11). Используя метод конечных элементов, на основании (10), (11) для определения коэффициентов $\alpha_i^l(t)$, $i = \overline{1,n}$, приближения $y^l(x,t) = y_{l\,n}(x,t)$ (12) решения $y_l(x,t)$ задачи (10), (11) получаем задачу Коши (13), (14). С учетом (15) находим приближение оператора Au_m

$$\overline{A}u_m = \sum_{l=1}^m \overline{u}_l\, y^l(x,T).$$

Теорема 4. Пусть классические решения $y_l(x,t)$ задачи (10), (11) принадлежат классу $C^{k+1,1}(\Omega_T)$. Тогда имеет место оценка

$$\| Au_m - \overline{A}u_m \|_{L_2} \le ch^k,$$

где $\|\varphi\|_{L_2}^2 = \int\limits_{\Omega} \varphi^2 dx$; c, h, k определены в теореме 2.

Решив задачу Коши (13), (14) одним из численных методов, получим дискретное приближение оператора Au_m

$$\overline{A}^M u_m = \{\overline{A}_i^M u_m\}_{i=0}^N, \; \overline{A}_i^M u_m = \sum_{l=1}^m y^l(x_i,T)\overline{u}_l = \sum_{l=1}^m y_l^M(x_i), \; i = \overline{0,N},$$

или

$$AU = F, \tag{46}$$

где $A \in \mathbb{R}^{\overline{M} \times m}$ — прямоугольная матрица, F — вектор:

$$A = \begin{pmatrix} y_1^M(0) & y_2^M(0) & \ldots & y_m^M(0) \\ y_1^M(x_1) & y_2^M(x_1) & \ldots & y_m^M(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^M(b) & y_2^M(b) & \ldots & y_m^M(b) \end{pmatrix},$$

$$F = \{f_i\}_{i=0}^N, \; f_i = f_0(x_i), \; 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \; \overline{M} = N+1.$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (46) остаются в силе все замечания, высказанные относительно системы (20).

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕКОТОРЫХ ВНУТРЕННИХ ТОЧКАХ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\tilde{f}(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,\\
-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y+\beta,\ x=0,\ t\in(0,T),\\
k\frac{\partial y}{\partial x}=\beta_1,\ x=b,\ t\in(0,T),\\
y(x,0)=u(x),\ x\in\overline{\Omega}.
\end{gathered}\tag{47}$$

В некоторых точках $d_i\in(0,b)$, $i=\overline{1,\overline{N}}$, на временных отрезках $[\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}]\subseteq[0,T]$ известны значения решения $y(x,t)$ начально-краевой задачи (47), заданные равенствами (35).

Пусть $y=y(0;x,t)$ — решение начально-краевой задачи (47) при $u=0$. Тогда для определения искомой функции $u\in\mathcal{U}$ на основании (47), (35) получаем обратную задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ (x,t)\in\Omega_T,\\
-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y,\ x=0,\ t\in(0,T),\\
k\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ x=b,\ t\in(0,T),\\
y(x,0)=u(x),\ x\in\overline{\Omega},
\end{gathered}\tag{48}$$

а на основании (35) получаем равенства (36).

При каждой фиксированной функции $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (48) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет системе равенств

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t},z\right)+a(y,z)=0,\ t\in(0,T),\tag{49}$$

$$(y,z)(0)=(u,z).\tag{50}$$

Следовательно, имея решение задачи (49), (50) как функцию $y=y(u;x,t)$ параметра $u=u(x)\in\mathcal{U}$, на основании (36) получаем равенство (37).

Пусть $\{\overline{\varphi}_l(x)\}_{l=1}^m$ — система линейно независимых функций из $\mathcal{U}$. Искомую функцию $u(x)$ будем находить в виде

$$u=u_m(x)=\sum_{l=1}^m\bar{u}_l\,\overline{\varphi}_l(x),\ u_m\in\mathcal{U}_m\subset\mathcal{U},\ \bar{u}_l\in R,\ l=\overline{1,m}.\tag{51}$$

Поскольку задача (49), (50) линейная, ее решение $y=y(u_m;x,t)$ представимо в виде (9), где $y_l(x,t)$ — функция из $W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial y_l}{\partial t},z\right)+a(y_l,z)=0,\ t\in(0,T),\tag{52}$$

$$(y_l,z)(0)=(\overline{\varphi}_l,z),\ l=\overline{1,m}.\tag{53}$$

При каждом фиксированном l каждую из задач (52), (53) будем решать приближенно, используя ранее введенные в рассмотрение множества $M_{0n}\subset H_0$, $M_{1n}\subset W(0,T)$. Используя (12), на основании (52), (53) получаем задачу Коши

$$M\dot{\alpha}^l(t) + K\alpha^l(t) = 0,\ t \in (0, T), \tag{54}$$

$$M\alpha^l(0) = F_0,\ l = \overline{1, m}, \tag{55}$$

где $F_0 = \{f_{0i}\}_{i=1}^n$, $f_{0i} = (\overline{\varphi}_l, \varphi_i)$.

Имеют место представление (38) и равенства (40), (41). Для системы линейных алгебраических уравнений вида (41), полученной применительно к рассматриваемой задаче данного раздела, остаются в силе замечания, высказанные относительно системы (20).

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ МОЩНОСТЕЙ ИСТОЧНИКОВ/СТОКОВ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей:

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \widetilde{f}(x, t) + \chi(\Omega_0)u(x, t),\ (x, t) \in \Omega_T, \\ -k\frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta,\ x = 0,\ t \in (0, T), \\ k\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1,\ x = b,\ t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x),\ x \in \Omega, \end{gathered} \tag{56}$$

где $\Omega_0 \subseteq \Omega = (0, b)$. В некоторых точках $d_i \in (0, b)$, $i = \overline{1, \overline{N}}$, на промежутках времени $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$ известны значения решения $y(x, t)$ начально-краевой задачи (56), заданные равенствами

$$y(d_i, t) = \widetilde{f}_i(t),\ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}],\ i = \overline{1, \overline{N}}, \tag{57}$$

где $\bigcup_{i=1}^{\overline{N}} [\bar{t}_i,\ \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$.

Пусть $y = y(0; x, t)$ — решение начально-краевой задачи (56) при $u = 0$. Тогда для определения искомой функции $u(x, t) \in \mathcal{U} = L^2(0, T; L_2(\Omega_0))$ на основании (56) получаем задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \chi(\Omega_0)u(x, t),\ (x, t) \in \Omega_T, \\ -k\frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y,\ x = 0,\ t \in (0, T), \\ k\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ x = b,\ t \in (0, T), \\ y(x, 0) = 0,\ x \in \Omega, \end{gathered} \tag{58}$$

а на основании (57) получаем равенства

$$y(d_i, t) = f_i(t),\ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}],\ i = \overline{1, \overline{N}}, \tag{59}$$

где $f_i = \widetilde{f}_i - y(0;\ d_i,\ t)$, $t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, $i = \overline{1, \overline{N}}$.

При каждой фиксированной функции $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (58) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам (5), (6), где

$$l(u; z) = \int_{\Omega_0} u\, z\, dx. \tag{60}$$

Теорема 5. При каждой фиксированной функции и $u \in \mathcal{U}$ обобщенное решение начально-краевой задачи (58) существует и единственно.

Имея обобщенное решение задачи (58) как функцию $y = y(u; x, t)$ параметра $u = u(x, t) \in \mathcal{U}$, на основании (59) получаем равенство

$$Au = f, \tag{61}$$

при этом $Au = \{A_i u\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $A_i u = y(u; d_i, t)$, $t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, $i = \overline{1, \overline{N}}$, $f = \{f_i\}_{i=1}^{\overline{N}}$.

Пусть $\{\overline{\varphi}_l(x, t)\}_{l=1}^{m}$ — система линейно независимых функций из $\mathcal{U}$, определенных на области $\Omega_{0T} = \Omega_0 \times (0, T)$. Функцию $u = u(x, t)$ будем искать в виде

$$u = u_m(x, t) = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l \overline{\varphi}_l(x, t), \ u_m \in \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}, \ \bar{u}_l \in R, \ l = \overline{1, m}. \tag{62}$$

Поскольку задача (5), (6) линейная, ее решение $y(u_m; x, t)$ представимо в виде

$$y(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l\, y(\overline{\varphi}_l; x, t) = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l\, y_l(x, t), \tag{63}$$

где $y_l(x, t)$ — функция из $W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial y_l}{\partial t}, z\right) + a(y_l, z) = (\overline{\varphi}_l, z)_{L_2(\Omega_0)}, \ t \in (0, T), \tag{64}$$

$$(y_l, z)(0) = 0, \ l = \overline{1, m}. \tag{65}$$

При каждом фиксированном l каждую из задач (64), (65) будем решать приближенно, используя множества $M_{0n} \subset H_0$, $M_{1n} \subset W(0, T)$. В результате для определения коэффициентов α_i^l разложения вида (12) приближения $y_{l\,n}(x, t)$ по решениям $y_l(x, t)$ задачи (64), (65) получаем задачу Коши (13), (14), где $F^l(t) = f_i^l(t)_{i=1}^n$, $f_i^l(t) = (\overline{\varphi}_l, \varphi_i)_{L_2(\Omega_0)}$.

Приближенное решение $y_n(u_m; x, t) = y_n^m(x, t)$ задачи вида (5), (6), рассматриваемой в данном разделе, существует, единственно и представляется в виде

$$y_n^m(x, t) = y_n(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l\, y^l(x, t), \tag{66}$$

где $y^l(x, t) = y_{ln}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l(t) \varphi_i(x)$. На основании (66) получаем приближение оператора Au_m в виде

$$\overline{A} u_m = \{\overline{A}_i u_m\}_{i=1}^{\overline{N}}, \ \overline{A}_i u_m = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l\, y^l(d_i, t), \ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}],$$

$$Au_m = \{A_i u_m\}_{i=1}^{\overline{N}}, \ A_i u_m = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l\, y_l(d_i, t), \ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}].$$

Следовательно,

$$\overline{A}_i u_m = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l\, y^l(d_i, t) \approx A_i u_m = f_i(t), \ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}], \ i = \overline{1, \overline{N}}. \tag{67}$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2. Решив задачу Коши вида (13), (14) одним из численных методов, получим дискретные приближения $\overline{A}_i^j u_m$, $j = \overline{m_i, M_i}$, $i = \overline{1, \overline{N}}$, где $M_i - m_i + 1$ — количество точек t_j дискретизации временного отрезка $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$.

Получаем

$$\overline{A}_i^j u_m = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^{lj} \varphi_\nu(d_i) \bar{u}_l = f_i(t_j), \ j = \overline{m_i, M_i}, \ i = \overline{1, \overline{N}}. \tag{68}$$

Система равенств (68) порождает систему линейных алгебраических уравнений

$$AU=F \tag{69}$$

для определения неизвестного вектора $U=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)^{\mathrm{T}}$, где $A=\{a_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{M,\, m}$,

$$A=\begin{pmatrix} V_1^1 & V_1^2 & \dots & V_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{\bar{N}}^1 & V_{\bar{N}}^2 & \dots & V_{\bar{N}}^m \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ . \\ F_{\bar{N}} \end{pmatrix},$$

$$V_i^l=(V_{i1}^l, V_{i2}^l, \dots, V_{iN_i}^l)^{\mathrm{T}},\ F_i=(F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{iN_i}),$$

V_{ij}^l — значение конечно-элементного решения $y_k^N(\bar{\varphi}_l; x, t)$ задачи (64), (65) в точке $x=d_i$ при $t=t_j$, $F_{ij}=f_i(t_j)$, $j=\overline{m_i, M_i}$, $N_i=M_i-m_i+1$, $M=\sum\limits_{i=1}^{\bar{N}} N_i$. При $x=d_i$ на временном участке $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$ расположены N_i точек t_j его дискретизации.

Относительно системы (69) справедливы все замечания, высказанные применительно к системе (20).

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть на каждом интервале $\Omega_1=(0,\xi)$, $\Omega_2=(\xi, b)$, $0<\xi<b<\infty$, определено параболическое уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\tilde{f}(x, t),\ t\in(0,T). \tag{70}$$

На концах отрезка [0, b] заданы смешанные краевые условия

$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y+\beta,\ x=0,\ t\in(0,T), \tag{71}$$

$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u(t),\ x=b,\ t\in(0,T), \tag{72}$$

где $u(t)$ — неизвестная функция.

Условия сопряжения неидеального контакта в точке $x=\xi$ при $t\in(0,T)$ имеют вид

$$\left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0,\ \left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm}=r[y], \tag{73}$$

где $[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^{\pm}=\{\varphi\}^{\pm}=\varphi(\xi\pm 0, t)$.

При $t=0$ имеем начальное условие

$$y(x,0)=y_0(x),\ x\in\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2. \tag{74}$$

В точке $x=0$ при $t\in(0,T)$ известна температура

$$y(0,t)=\tilde{f}_0(t). \tag{75}$$

Полученная задача (70)–(75) состоит в определении функции $u=u(t)\in$ $\in C([0,T])$, при которой решение $y=y(u)=y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (70)–(74) удовлетворяет равенству (75).

Пусть $y=y(0; x, t)$ — решение начально-краевой задачи (70)–(74) при $u=0$. Тогда для определения искомой функции $u\in\mathcal{U}$ на основании (70)–(75) получаем обратную задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ (x,t)\in\Omega_T,$$
$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y,\ x=0,\ t\in(0,T),$$
$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u(t),\ x=b,\ t\in(0,T),$$
$$\left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0,\ \left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm}=r[y],\ x=\xi,\ t\in(0,T), \tag{76}$$
$$y(x,0)=0,\ x\in\Omega,$$
а на основании (75) получаем равенство
$$y(0,t)=f_0(t),\ t\in(0,T), \tag{77}$$
где $f_0=\tilde{f}_0-y(0;0,t)$.

При каждой фиксированной функции $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (76) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам
$$\left(\frac{\partial y}{\partial t},z\right)+a(y,z)=l(u;z),\ t\in(0,T), \tag{78}$$
$$(y,z)(0)=0, \tag{79}$$
где $V_0=\{v(x):\ v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i), i=1,2\}$, $W(0,T)=\left\{v(x,t):\ v\in L^2(0,T;V),\right.$ $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{\Omega_i}\in L_2(0,T;\Omega_i),\ i=1,2\right\}$, $V=\{v(x,t):\ v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2,\ t\in(0,T)\}$,
$$a(y,z)=\int_0^b k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}dx+\alpha y(0,t)z(0)+r[y][z],\ l(u;z)=uz(b).$$

Теорема 6. При каждой фиксированной функции $u\in\mathcal{U}$ решение $y=y(u;x,t)\in W(0,T)$ задачи (78), (79) существует и единственно.

Справедливость теоремы устанавливается, следуя [4, 6]. Отсюда, имея решение задачи (78), (79) как функцию $y=y(u;x,t)$ параметра $u=u(t)$, на основании (77) получаем равенство
$$Au=f_0(t),\ t\in(0,T), \tag{80}$$
при этом $Au=y(u;0,t)$.

Пусть $\{\overline{\varphi}_l(t)\}_{l=1}^m$ — система линейно независимых функций из множества $\mathcal{U}$, определенных на временном отрезке $[0,T]$. Функцию $u(t)$ будем искать в виде
$$u=u_m(t)=\sum_{l=1}^m \overline{u}_l\overline{\varphi}_l(t),\ u_m\in\mathcal{U}_m\subset\mathcal{U},\ \overline{u}_l\in R,\ l=\overline{1,m}. \tag{81}$$
В силу линейности задачи (78), (79) ее решение $y(u_m;x,t)$ представляется в виде
$$y(u_m;x,t)=\sum_{l=1}^m \overline{u}_l\, y(\overline{\varphi}_l;x,t)=\sum_{l=1}^m \overline{u}_l\, y_l(x,t), \tag{82}$$
где $y_l(x,t)$ — функция из $W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам
$$\left(\frac{\partial y_l}{\partial t},z\right)+a(y_l,z)=l(\overline{\varphi}_l;z),\ t\in(0,T), \tag{83}$$
$$(y_l,z)(0)=0,\ l=\overline{1,m}. \tag{84}$$

При каждом фиксированном l каждую из задач (83), (84) будем решать приближенно. Введем в рассмотрение линейное множество $M_{0n} \subset H_0$ функций $v(x)$ с базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$. С помощью этого базиса образуем множество $M_{1n} \subset W(0,T)$ функций $y_n(x,t)$, каждая из которых может быть представлена в виде

$$y_{l\,n}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l(t)\varphi_i(x), \tag{85}$$

где $\alpha_i^l \in C^1([0,T])$, $i=\overline{1,n}$.

С учетом (85) для определения векторов $\alpha^l(t)=(\alpha_1^l(t),\ldots,\alpha_n^l(t))^{\mathrm{T}}$ получаем следующие задачи Коши:

$$M\dot{\alpha}^l(t)+K\alpha^l(t)=f^l(t),\ l=\overline{1,m}, \tag{86}$$

$$\alpha^l(0)=0, \tag{87}$$

где $M=M^T=\{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $m_{ij}=\int\limits_{\Omega}\varphi_i\varphi_j\,dx$, $K=K^T=\{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $k_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$, $f^l(t)=\{f_i^l(t)\}_{i=1}^n$, $f_i^l(t)=\overline{\varphi}_l(t)\,\varphi_i(b)$, $i=\overline{1,n}$.

Очевидно, что решения $\alpha^l(t)$, $l=\overline{1,m}$, задач (86), (87) существуют и единственны. Следовательно, приближенное решение $y_n(u_m;x,t)=y_n^m(x,t)$ задачи (83), (84) при $u=u_m$ существует, единственно и представляется в виде

$$y_n^m(x,t)=y_n(u_m;x,t)=\sum_{l=1}^{m}\overline{u}_l\,y^l(x,t), \tag{88}$$

где $y^l(x,t)=y_{ln}(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^l(t)\varphi_i(x)$. На основании (80), (88) получаем приближение $\overline{A}u_m$ оператора Au_m:

$$\overline{A}u_m=\sum_{l=1}^{m}\overline{u}_l\,y^l(0,t)\approx Au_m=f_0,\ t\in(0,T). \tag{89}$$

Теорема 7. Пусть решения $y_l(x,t)$ задач (83), (84) на каждой из областей $\overline{\Omega}_{iT}$ принадлежат классу $C^{k+1,1}(\Omega_{iT})$, $i=1,2$. Тогда имеет место оценка

$$\|Au_m-\overline{A}u_m\|_{L_2(0,T)}\le ch^k. \tag{90}$$

Решив задачи Коши (86), (87) с помощью одного из численных методов, получим дискретные приближения $\overline{A}^j u_m$, $j=\overline{1,M}$, оператора $Au_m(t_j)$ ($M+1$ — количество точек t_j дискретизации отрезка $[0,\mathrm{T}]$)

$$\overline{A}^j u_m=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{lj}\varphi_i(0)\,\overline{u}_l=\sum_{l=1}^{m}y^l(0,t_j)\,\overline{u}_l\,. \tag{91}$$

Учитывая (80), (91), получаем

$$\sum_{l=1}^{m}y^l(0,t_j)\,\overline{u}_l=f_0(t_j),\ j=\overline{1,M}, \tag{92}$$

или

$$AU=F, \tag{93}$$

где $A\in\mathbb{R}^{M\times m}$ — прямоугольная матрица, $A=\{a_{ij}\}_{i=1,\,j=1}^{M,\ m}$, $a_{ij}=y^j(0,t_i)=$ $=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^{ji}\varphi_\nu(0)$, $F=\{f_i\}_{i=1}^{M}$, $f_i=f_0(t_i)$.

Для системы линейных алгебраических уравнений (93) остаются в силе все замечания, относящиеся к системе (20).

7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (70)–(74), где функция $u = u(t) \in \mathcal{U} = C([0, T])$ является неизвестной. В некоторых точках $d_i \in \Omega$, $i = \overline{1, \overline{N}}$, на промежутках $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$ известны значения решения $y(x, t)$ начально-краевой задачи (70)–(74), заданные равенствами

$$y(d_i, t) = \widetilde{f}_i\ ,\ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}],\ i = \overline{1, \overline{N}}\ , \tag{94}$$

где $\bigcup_{i=1}^{\overline{N}} [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$.

Пусть $y = y(0; x, t)$ — решение начально-краевой задачи (70)–(74) при $u = 0$. Тогда для определения искомой функции $u \in \mathcal{U}$ на основании (70)–(74), (94) получаем обратную задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей (76), а на основании (94) получаем равенства

$$y(d_i, t) = f_i,\ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}],\ i = \overline{1, \overline{N}}, \tag{95}$$

где $f_i = \widetilde{f}_i - y(0; d_i, t)$, $t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, $i = \overline{1, \overline{N}}$.

При каждой фиксированной функции $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (76) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. решение задачи (78), (79).

Следовательно, имея решение задачи (78), (79) как функцию $y = y(u;\ x, t)$ параметра $u = u(t) \in \mathcal{U}$, на основании (95) получаем равенство

$$Au = f, \tag{96}$$

при этом $Au = \{A_i u\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $f = \{f_i\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $A_i u = y(u, d_i, t)$.

С учетом (85) на основании (83), (84) получаем задачи Коши вида (86), (87). Решив эти задачи с помощью одного из численных методов, получим дискретные приближения $\overline{A}_i^{\,j} u_m$, $j = \overline{m_i, M_i}$, составляющей $A_i u_m(t_j)$, где $N_i = M_i - m_i + 1$ — количество точек t_j дискретизации отрезка $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$,

$$\sum_{l=1}^{m} y^l(d_i, t_j)\bar{u}_l = f_i(t_j),\quad j = \overline{m_i, M_i},\ i = \overline{1, \overline{N}}, \tag{97}$$

или

$$AU = F, \tag{98}$$

где $A \in \mathbb{R}^{\overline{M} \times m}$ — прямоугольная матрица и F — вектор:

$$A = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 & \dots & Y_1^m \\ Y_2^1 & Y_2^2 & \dots & Y_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{\overline{N}}^1 & Y_{\overline{N}}^2 & \dots & Y_{\overline{N}}^m \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{\overline{N}} \end{pmatrix},\ Y_i^l = \{Y_{ij}^l\}_{j=m_i}^{M_i},\ F_i = \{F_{ij}\}_{j=m_i}^{M_i}, \tag{99}$$

$$Y_{ij}^l = y^l(d_i, t_j),\ f_{ij} = f_i(t_j),\ j = \overline{m_i, M_i},\ \overline{M} = \sum_{i=1}^{\overline{N}} (M_i - m_i) + \overline{N}.$$

Для системы (98) остаются в силе все замечания, относящиеся к системе (20).

8. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ И ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\widetilde{f}(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$
$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y+\beta,\ x=0,\ t\in(0,T),$$
$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u_1,\ x=b,\ t\in(0,T),\tag{100}$$
$$\left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\xi}=0,\ \left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm}=r[y],\ x=\xi,\ t\in(0,T),$$
$$y(x,0)\big|_{\Omega_1}=u_2(x)\big|_{\Omega_1},\ y(x,0)\big|_{\Omega_2}=y_0(x)\big|_{\Omega_2}.$$

В точках $d_i\in\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $i=\overline{1,\overline{N}}$, на временных отрезках $[\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}]\subseteq[0,T]$ известны значения решения $y(x,t)$ начально-краевой задачи (100), заданные равенствами (94).

Пусть $y=y(0;x,t)$ — решение начально-краевой задачи (100) при $u=0$. Тогда для определения искомой вектор-функции $u=(u_1,u_2)\in\mathcal{U}=C([0,T])\times C(\overline{\Omega}_1)$ на основании (100), (94) получаем обратную задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ (x,t)\in\Omega_T,$$
$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y,\ x=0,\ t\in(0,T),$$
$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u_1,\ x=b,\ t\in(0,T),\tag{101}$$
$$\left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\xi}=0,\ \left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm}=r[y],\ x=\xi,\ t\in(0,T),$$
$$y\big|_{\Omega_1}=u_2(x)\big|_{\Omega_1},\ y\big|_{\Omega_2}=0$$

(на основании (94) получаем равенства (95)), где $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$.

При каждой фиксированной функции $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (101) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет системе равенств

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t},z\right)+a(y,z)=l(u;z),\ t\in(0,T),\tag{102}$$
$$y\big|_{\Omega_1}=u_2\big|_{\Omega_1},\ y\big|_{\Omega_2}=0,\tag{103}$$

где множества $W(0,T)$, V_0 и билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определены в разд. 6, $l(u;z)=u_1\,z(b)$.

Теорема 8. При каждой фиксированной функции $u\in\mathcal{U}$ обобщенное решение начально-краевой задачи (101) существует и единственно.

Имея обобщенное решение начально-краевой задачи (101) как функцию параметра $u\in\mathcal{U}$, на основании (95) получаем равенство

$$Au=f,\tag{104}$$

при этом $Au=\{A_iu\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $A_iu=y(u;d_i,t)$, $t\in[\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}]$, $i=\overline{1,\overline{N}}$, $f=\{f_i\}_{i=1}^{\overline{N}}$.

Составляющие u_{1m}, u_{2m} искомой вектор-функции $u_m \in \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}$ будем находить в виде

$$u_{1m}(t) = \sum_{l=1}^{m_1} \bar{u}_{1l} \varphi_{1l}(t), \ t \in (0, T),$$

$$u_{2m}(x) = \sum_{l=1}^{m_2} \bar{u}_{2l} \varphi_{2l}(x), \ x \in \overline{\Omega}_1, \tag{105}$$

где $\{\varphi_{1l}\}_{l=1}^{m_1}$, $\{\varphi_{2l}\}_{l=1}^{m_2}$ — системы линейно независимых функций, определенных соответственно на области $[0, T]$ и $\overline{\Omega}_1$, $m = m_1 + m_2$.

В силу линейности задачи (102), (103) при $u = u_m = (u_{1m}, u_{2m})$ ее решение представляется в виде

$$y(u_m; x, t) = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l \, y(\overline{\varphi}_l; x, t) = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l \, y_l(x, t), \tag{106}$$

где $y_l(x, t)$ — функция из $W(0, T)$, которая $\forall z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, z \right) + a(y_l, z) = l(\overline{\varphi}_l; z), \ t \in (0, T), \tag{107}$$

$$(y_l, z)(0) = 0, \ \overline{\varphi}_l = \varphi_{1l}, \ \bar{u}_l = \bar{u}_{1l}$$

при $l = \overline{1, m_1}$, а при $l = \overline{m_1 + 1, m}$ — равенствам

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, z \right) + a(y_l, z) = 0, \ t \in (0, T),$$

где

$$(y_l, z) = (\overline{\varphi}_l, z)\Big|_{L_2(\Omega_1)}, \tag{108}$$

$$\overline{\varphi}_l = \varphi_{2, l - m_1 + 1}, \ \bar{u}_l = \bar{u}_{2, l - m_1 + 1}.$$

При каждом фиксированном l каждую из задач (107) или (108) будем решать приближенно, используя множества $M_{0n} \subset H_0$, $M_{1n} \subset W(0, T)$. Для каждого l приближенное решение имеет вид

$$y_{l\,n}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l \, \varphi_i(x), \tag{109}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — система линейно независимых известных функций.

С учетом (109) для определения векторов $\alpha^l = \alpha^l(t)$ на основании (107) получаем задачи Коши вида

$$M\dot{\alpha}^l(t) + K\alpha^l(t) = f^l(t), \ l = \overline{1, m_1}, \ t \in (0, T), \tag{110}$$

$$\alpha^l(0) = 0, \tag{111}$$

а на основании (108) задачи Коши имеют вид

$$M\dot{\alpha}^l(t) + K\alpha^l(t) = 0, \ l = \overline{m_1 + 1, m}, \ t \in (0, T), \tag{112}$$

$$M\,\alpha^l(0) = F_0, \tag{113}$$

где $M = M^T = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $m_{ij} = \int\limits_{\Omega} \varphi_i \, \varphi_j \, dx$, $K = K^T = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, $f^l(t) = \{f_i^l\}_{i=1}^{n}$, $f_i^l = \varphi_{1l}(t) \varphi_i(b)$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m_1}$, $\alpha^l = (\alpha_1^l(t), \alpha_2^l(t), \ldots, \alpha_n^l(t))^{\mathrm{T}}$, $l = \overline{1, m}$; $F_0 = \{f_{0i}\}_{i=1}^{n}$, $f_{0i} = \int\limits_{\Omega_1} \overline{\varphi}_l \, \varphi_i \, dx$, $\overline{\varphi}_l = \varphi_{2, l - m_1}$, $l = \overline{m_1 + 1, m}$.

На основании решений задач (110) – (113) получаем приближение $\bar{A} u_m = \{\bar{A}_i u_m\}_{i=1}^{\bar{N}}$ оператора $A u_m$, где

$$\bar{A}_i u_m = \sum_{l=1}^{m} \bar{u}_l y^l(d_i, t) \approx A_i u_m = f_i(t), \ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}], \ i = \overline{1, \bar{N}}. \tag{114}$$

Решив задачи Коши (110) – (113) с помощью одного из численных методов, получим дискретные приближения

$$\bar{A}_i^j u_m = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{ij} \varphi_\nu(d_i) \bar{u}_l = f_i(t_j), \ j = \overline{m_i, M_i}, \ i = \overline{1, \bar{N}}, \tag{115}$$

или

$$\sum_{l=1}^{m} y^l(d_i, t_j) \bar{u}_l = f_i(t_j), \ j = \overline{m_i, M_i}, \ i = \overline{1, \bar{N}}. \tag{116}$$

В матричном виде систему (116) можем записать так:

$$Av = f, \tag{117}$$

где $A \in \mathbb{R}^{M \times m}$ — прямоугольная матрица, $A = \{a_{ij}\}_{i=1, \ j=1}^{M, \ m}$,

$$A = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 & \dots & Y_1^{m_1} & Y_1^{m_1+1} & \dots & Y_1^m \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{\bar{N}}^1 & Y_{\bar{N}}^2 & \dots & Y_{\bar{N}}^{m_1} & Y_{\bar{N}}^{m_1+1} & \dots & Y_{\bar{N}}^m \end{pmatrix}, \ v = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}^{\mathrm{T}},$$

$$f = \{\bar{f}_i\}_{i=1}^{\bar{N}}, \ \bar{f}_i = \{f_{ij}\}_{j=m_i}^{M_i}, \ Y_i^l = \{Y_{ij}^l\}_{j=m_i}^{M_i}, \ Y_{ij}^l = y_l(d_i, t_j).$$

При $l = \overline{1, m_1}$ $y_l = y_l(x, t)$ — решение задачи (107), а при $l = \overline{m_1 + 1, m}$ — задачи (108).

Для системы (117) остаются в силе все замечания, высказанные применительно к задаче (20).

9. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА/СТОКА И ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \tilde{f}(x, t), \ (x, t) \in \Omega_T, \\ -k \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \ x = 0, \ t \in (0, T), \\ k \frac{\partial y}{\partial x} = u_1, \ x = b, \ t \in (0, T), \\ [y] = 0, \ \left[k \frac{\partial y}{\partial x} \right] = u_2, \ x = \xi, \ t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), \ x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2. \end{gathered} \tag{118}$$

где условия сопряжения в точке $x = \xi$ отражают наличие источника/стока наперед неизвестной мощности $u_2 = u_2(t)$.

Пусть в точках $d_i \in \bar{\Omega}$, $i = \overline{1, \bar{N}}$, на временных отрезках $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \subseteq [0, T]$ известны значения решения $y(x, t)$ начально-краевой задачи (118), заданные равенствами (94), а $y = y(0; x, t)$ — решение начально-краевой задачи (118) при $u = 0$. Тогда для определения искомой вектор-функции $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{U} = C([0, T]) \times C([0, T])$ на основании (118), (94) получаем обратную задачу, где состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ (x,t)\in\Omega_T,$$
$$-k\frac{\partial y}{\partial x}=-\alpha y,\ x=0,\ t\in(0,T),$$
$$k\frac{\partial y}{\partial x}=u_1,\ x=b,\ t\in(0,T), \tag{119}$$
$$[y]=0,\ \left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]=u_2,\ x=\xi,\ t\in(0,T)$$
$$y(x,0)=0,\ x\in\overline{\Omega},$$

а на основании (94) получаем равенства (95).

При каждой фиксированной вектор-функции $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (119) будем использовать ее обобщенное решение как функцию $y=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет системе равенств

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t},z\right)+a(y,z)=l(u;z),\ t\in(0,T),$$
$$y=0,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{120}$$

где $V_0=\{v(x):\ v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2;\ [v]\big|_{x=\xi}=0\}$, $W(0,T)=\Big\{v(x,t):$ $v\in L^2(0,T;V),\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{\Omega_i}\in L^2(0,T;L_2(\Omega_i)),\ i=1,2\Big\}$, $V=\{v(x,t):\ v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),$ $i=1,2;\ [v]\big|_{x=\xi}=0,\ t\in(0,T)\}$,

$$a(y,z)=\int_0^b k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}dx+\alpha y(0,t)z(0),\ l(u;z)=u_1z(b)-u_2z(\xi).$$

Теорема 9. При каждой фиксированной функции $u\in\mathcal{U}$ решение $y=y(u;x,t)\in W(0,T)$ задачи (120) существует и единственно.

Справедливость теоремы устанавливается, следуя [4, 6]. Отсюда, имея решение задачи (120) как функцию $y=y(u;x,t)$ векторного параметра $u\in\mathcal{U}$, на основании (95) получаем равенство

$$Au=f, \tag{121}$$

при этом $Au=\{A_iu\}_{i=1}^{\overline{N}}$, $A_iu=y(u;d_i,t)$, $f=\{f_i\}_{i=1}^{\overline{N}}$.

Составляющие u_{1m}, u_{2m} искомой вектор-функции $u=u_m\in\mathcal{U}_m\subset\mathcal{U}$ будем находить в виде

$$u_{1m}(t)=\sum_{l=1}^{m_1}\bar{u}_{1l}\varphi_{1l}(t),\ t\in[0,T],$$
$$u_{2m}(t)=\sum_{l=1}^{m_2}\bar{u}_{2l}\varphi_{2l}(t),\ t\in[0,T], \tag{122}$$

где $m=m_1+m_2$.

Поскольку задача (120) линейная при $u=u_m=(u_{1m},u_{2m})$, ее решение представимо в виде

$$y(u_m;x,t)=\sum_{l=1}^{m}\bar{u}_l\,y(\overline{\varphi}_l;x,t)=\sum_{l=1}^{m}\bar{u}_l\,y_l(x,t), \tag{123}$$

где $y_l(x,t)$ — функция из $W(0,T)$, которая $\forall z(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial y_l}{\partial t},z\right)+a(y_l,z)=l(\overline{\varphi}_l;z),\ t\in(0,T),$$
$$y=0,\ x\in\overline{\Omega},\ t=0, \tag{124}$$

$l(\overline{\varphi}_l; z) = \overline{\varphi}_l^1 z(b) - \overline{\varphi}_l^2 z(\xi)$, $\overline{\varphi}_l = (\overline{\varphi}_l^1, \overline{\varphi}_l^2)$, $\overline{\varphi}_l^1 = \varphi_{1l}$, $\overline{\varphi}_l^2 = 0$ при $l = \overline{1, m_1}$; $\overline{\varphi}_l^1 = 0$, $\overline{\varphi}_l^2 = \varphi_{2, l-m_1+1}$ при $l = \overline{m_1+1, m}$.

При каждом фиксированном l каждую из задач (124) будем решать приближенно, используя множества $M_{0n} \subset H_0$, $M_{1n} \subset W(0, T)$. Для каждого l приближенное решение имеет вид

$$y_{ln}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l \varphi_i(x), \tag{125}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ — система линейно независимых известных функций. С учетом (124), (125) для определения векторов $\alpha^l = \alpha^l(t)$ получаем задачи Коши

$$M\dot{\alpha}^l(t) + K\alpha^l(t) = f^l(t), \ t \in (0, T), \ l = \overline{1, m_1}, \tag{126}$$

$$\alpha^l(0) = 0, \tag{127}$$

где $M = M^T = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $m_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx$, $K = K^T = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, $f^l(t) = \{f_i^l\}_{i=1}^n$, $f_i^l(t) = \overline{\varphi}_l^1 \varphi_i(0) - \overline{\varphi}_l^2 \varphi_i(\xi)$.

На основании решений задач (126), (127) получаем приближение $\overline{A} u_m = \{\overline{A}_i u_m\}_{i=1}^{\overline{N}}$ оператора Au_m, где

$$\overline{A}_i u_m = \sum_{l=1}^{m} \overline{u}_l y^l(d_i, t) \approx A_i u_m = f_i(t), \ t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}], \ i = \overline{1, \overline{N}}.$$

Решив задачи Коши (126), (127) с помощью одного из численных методов, получим дискретные приближения

$$\overline{A}_i^j u_m = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{lj} \varphi_\nu(d_i) \overline{u}_l = f_i(t_j), \ j = \overline{m_i, M_i}, \ i = \overline{1, \overline{N}},$$

или

$$\sum_{l=1}^{m} y^l(d_i, t_j) \overline{u}_l = f_i(t_j), \ j = \overline{m_i, M_i}, \ i = \overline{1, \overline{N}}. \tag{128}$$

В матричном виде систему (128) можем записать так:

$$Av = f, \tag{129}$$

где $A \in \mathbb{R}^{M \times m}$ — прямоугольная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 & \dots & Y_1^{m_1} & Y_1^{m_1+1} & \dots & Y_1^m \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{\overline{N}}^1 & Y_{\overline{N}}^2 & \dots & Y_{\overline{N}}^{m_1} & Y_{\overline{N}}^{m_1+1} & \dots & Y_{\overline{N}}^m \end{pmatrix}, \ v = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_m\}^{\mathrm{T}},$$

f — вектор длины $M = \sum_{i=1}^{\overline{N}} (M_i - m_i) + \overline{N}$,

$$f = \{\bar{f}_i\}_{i=1}^{\overline{N}}, \ \bar{f}_i = \{f_{ij}\}_{j=m_i}^{M_i}, \ Y_i^l = \{Y_{ij}^l\}_{j=m_i}^{M_i}, \ Y_{ij}^l = y_l(d_i, t_j).$$

Для системы (129) остаются в силе все замечания, высказанные применительно к задаче (20).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены системы линейных алгебраических уравнений, позволяющие за конечное число арифметических действий получать решения линейных обратных задач теплопроводности для многокомпонентных тел с включениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системый анализ. — 2007. — № 5. — С. 48–71.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач термоупругости // Пробл. управления и информатики. — 2007. — № 5. — С. 64–87.
3. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.
4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
5. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2005. — 364 с.
6. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. — 400 p.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
8. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
9. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. — 223 с.
10. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
11. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
12. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — **26.** — P. 394–395.
13. Penrose R.A. A generalized inverse for matrices // Proc. Camridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, N 3. — P. 406–413.
14. Тихонов А.Н. Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1965. — **5**, № 4. — С. 718–722.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
16. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 5. — С. 747–766.
17. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Там же. — 2005. — **45**, № 10. — С. 1731–1755.
18. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Там же. — 2009. — **49**, № 8. — С. 1347–1363.
19. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. и др. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. — Киев: Наук. думка, 2008. — 248 с.
20. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986. — 183 с.

Поступила 16.06.2011