

УДК 519.7

В.В. АКИМЕНКО, А.А. ЕФИМЕНКО

---

## МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ФОНДАМИ И КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТЬЮ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

**Ключевые слова:** *информационно-коммуникационная система, фонды предприятия, модель конкуренции, система квазилинейных уравнений параболического типа, Лотке–Вольтерра диффузионная модель, оптимальное управление, численное моделирование.*

### ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального управления предприятием информационно-коммуникационной отрасли за счет внутренних инвестиций в собственные фонды и конкурентоспособность на рынке приводит к моделям организационной двухуровневой иерархической системы [1–4], к моделям управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику фондов [1, 5, 6], к начально-краевым задачам для системы многомерных квазилинейных параболических уравнений типа Лотке–Вольтерра [7–9], описывающих динамику продаж товаров и услуг конкурирующих между собой предприятий, с использованием методов оптимального управления системами с распределенными параметрами [10–14]. Для предложенных моделей конкуренции доказаны теоре-

© В.В. Акименко, А.А. Ефименко, 2012

мы принципа максимума, определены достаточные условия существования оптимальных управлений на построенных классах функций и разработаны устойчивые численные методы поиска оптимальных значений инвестиций в фонды предприятия, параметры его конкурентоспособности на рынке услуг и в рост рынка инновационного продукта. В настоящей работе приведены иллюстративные результаты численного моделирования оптимального управления фондами и конкурентоспособностью информационно-коммуникационного предприятия.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ

Обозначим многомерную область-цилиндр через  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , где  $\Omega = \{x | 0 \leq x_s \leq 1, s = \overline{1, m}\}$ ,  $\Gamma_T$  — сумма его боковой поверхности  $S_T$  и нижнего основания  $\Gamma_0$ . Зададим на  $\Omega$  совокупность  $n$  конкурирующих между собой предприятий, предоставляющих информационно-коммуникационные услуги пользователям в объеме  $\{R^{(k)}\}$  ( $k = \overline{1, n}$ ,  $k$  — номер предприятия). Представим модель активной организационной системы  $k$ -го предприятия, реализующего информационные услуги в распределенной компьютеризированной сети филиалов (подразделений) с помощью двухуровневой иерархической модели (организационной структуры) [1, 2]. На уровне анализа основных видов деятельности предприятия рассматриваются различные виды управления, что приводит к целевой декомпозиции общей модели функционирования системы, представленной на рис. 1. Центр системы  $C_0$  отвечает за принятие решений по распределению финансового ресурса: инвестиций в экстенсивное развитие предприятия (в том числе за счет использования патентов и новых технологий), повышение его конкурентоспособности на рынке  $u_2 \in U_2$ ; инвестиций в интенсивное развитие предприятия (в том числе за счет использования патентов и новых технологий), повышение его конкурентоспособности на рынке  $u_2 \in U_2$ ; инвестиций в рост рынка инновационного продукта  $u_3 \in U_3$ . Тем самым  $C_0$  координирует работу подсистем  $C_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Последние оказывают управляющее воздействие на процесс потребления информационно-коммуникационных услуг. Для удовлетворения принципа координации двухуровневой системы определим задачи каждой подсистемы и множества параметров, что характеризуют систему в целом.

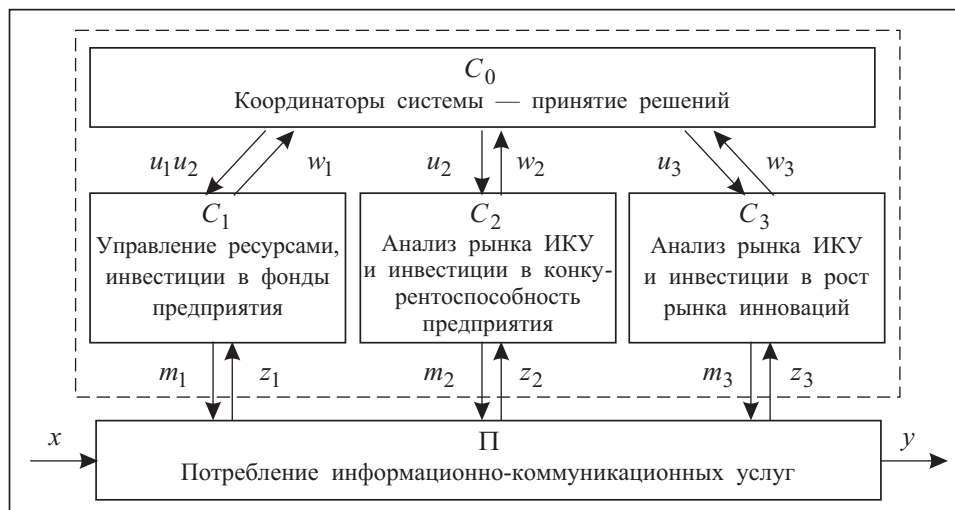


Рис. 1

На уровне управления процессом П подсистемой  $C_1$  «Управление ресурсами, инвестиции в фонды предприятия» решается задача оптимального управления фондами предприятия за счет внутренних инвестиций, выделенных координаторами системы.

натором  $C_0$ , в экстенсивное и интенсивное развитие информационно-коммуникационной системы.

Формализуем распределенную систему  $k$ -го предприятия с помощью сетевой модели  $G = \langle S, L \rangle$ , где  $S = \{s_i | s_i = \langle e_i, o_i, q_i, d_i \rangle; h_i, z_i, q_i \in R^+, d_i \in D (i=1, v(t))\}$  — множество технических узлов сети, обслуживающей потребителей информационно-коммуникационных услуг,  $s_i$  — идентификатор  $i$ -го узла (запись в списке, адрес), который содержит ссылку на структуру с полями:  $e_i$  — пропускная способность узла,  $o_i$  — объем памяти носителей,  $q_i$  — стоимость узла (включая стоимость оборудования, программного обеспечения узла и средств защиты информации),  $d_i$  — каталог информации, записанный на его носителях,  $R^+$  — множество неотрицательных действительных чисел,  $D$  — множество каталогов информации,  $v(t)$  — количество узлов ( $0 \leq v(t) \leq v_0$ ),  $\hat{v}$  — максимальное количество узлов сети,  $t \in [0, T]$  — время моделирования процесса управления сетью. Множество каналов связи между  $s_i$  и  $s_j$  узлами сети имеет вид  $L = \{l_{ij} | l_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij} \rangle; a_{ij}, b_{ij} \in R^+, (i, j=1, v(t))\}$ ,  $l_{ij}$  — идентификатор канала связи, который содержит ссылку на структуру с полями:  $a_{ij}$  — пропускная способность канала,  $b_{ij}$  — его стоимость.

Изначально в системе формируется глобальная сеть  $\hat{G} = \langle \hat{S}, \hat{L} \rangle$ , содержащая множество всех возможных узлов сети и связей между ними, которая является формализацией всех реально существующих объектов информационно-коммуникационной системы, попадающих под интересы координирующего центра  $C_0$ . В долгосрочной перспективе  $\hat{G} = \langle \hat{S}, \hat{L} \rangle$  может развиваться и дополняться новыми элементами, однако за рассматриваемый период моделирования процесса управления  $t \in [0, T]$  сеть  $\hat{G} = \langle \hat{S}, \hat{L} \rangle$  задана и остается неизменной. В начальный момент времени идентификаторы  $s_i \in \hat{S}$ ,  $l_{ij} \in \hat{L}$  содержат исходные адреса узлов и каналов связи  $G(0)$ . В границах множества  $\hat{G}$  рассматривается создание и развитие текущей сети  $G(t)$ , которая может развиваться и переходить из некоторого состояния  $G(t_1)$  в состояние  $G(t_2)$ , изменяя при этом количество узлов, каналов связей между ними, их технические и стоимостные характеристики. Идентификаторы сетей  $s_i$ ,  $l_{ij}$ , содержащие адреса узлов и каналов связей, всегда выбираются из множеств  $\hat{S}$ ,  $\hat{L}$ .

Обозначим стоимость задействованных (активных) фондов  $k$ -го предприятия через  $\Phi^{(k)}(t)$ , включая стоимость работающих узлов и каналов связи информационно-коммуникационной сети. Тогда динамика стоимости фондов описывается задачей Коши для системы уравнений [1, 5]:

$$\dot{\Phi}^{(k)}(t) = f^{(k)}(u_1(t), u_2(t)) - \mu^{(k)}(t)\Phi^{(k)}(t), \quad \Phi^{(k)}(0) = \Phi_0^{(k)}, \quad (1)$$

$$\Phi^{(k)}(t) = \left( \Phi_0^{(k)} + \int_0^t f^{(k)}(u_1(\tau), u_2(\tau)) \exp\left(\int_0^\tau \mu^{(k)}(\xi) d\xi\right) d\tau \right) \exp\left(-\int_0^t \mu^{(k)}(\xi) d\xi\right), \quad (2)$$

где  $\mu^{(k)}(t) > 0$  — коэффициент амортизации фондов,  $u_1(t)$  — инвестиции в фонды предприятия,  $f^{(k)}(u_1(t), u_2(t))$  — функция источника фондов за счет инвестиций в экстенсивный и интенсивный пути развития предприятия. Производственная функция  $P^{(k)} = F^{(k)}(\Phi^{(k)})$  показывает зависимость максимального значения стоимости услуг в сети, предоставляемых предприятием, в зависимости от стоимости его фондов [1, 6]. Стоимость предоставленных предприятием услуг в сети  $R^{(k)} \leq P^{(k)} = F^{(k)}(\Phi^{(k)})$ . Далее будем предполагать, что средства, полученные предприятием от реализации информационно-ком-

муникационных услуг  $K^{(k)}$ , составляют свободные средства предприятия  $I^{(k)}$ , инвестиции  $u_1 \in U_2$ ,  $u_2 \in U_2$ ,  $u_3 \in U_3$  и расходы  $Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)})$ , которые зависят от стоимости фондов и включают в себя стоимость рабочей силы, налоги, производственные затраты, накладные расходы и др.:

$$K^{(k)} = I^{(k)} + \sum_{i=1}^3 u^{(i)} + Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}) = R^{(k)} \leq P^{(k)}(\Phi^{(k)}).$$

Введем общую функцию управления для  $k$ -го предприятия  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  на множестве  $u \in U = U_1 \times U_2 \times U_3$ . Поскольку в модели предусмотрено управление только одним выбранным предприятием, в дальнейшем будем опускать индекс  $k$  в функции управления.

На уровне управления процессом П подсистемами  $C_2$  «Анализ рынка ИКУ и инвестиции в конкурентоспособность предприятия»,  $C_3$  «Анализ рынка ИКУ и инвестиции в рост рынка инноваций» рассматривается задача моделирования динамики стоимости услуг, предоставляемых предприятием в условиях рыночной конкуренции, управления конкурентоспособностью предприятия на рынке услуг и управление увеличением инновационного рынка информационно-коммуникационных услуг за счет выделенных внутренних инвестиций. Рассмотрим данную задачу на основе модели диффузии инноваций из [8, 9], основанной на начально-краевой задаче для системы квазилинейных уравнений параболического типа с использованием модели конкурентной борьбы Лотке–Вольтерра. Для стоимости предоставленных всеми предприятиями информационно-коммуникационных услуг в данном регионе  $R(x, t) = \sum_{k=1}^n R^{(k)}(x, t)$  рассмотрим логистическую модель:

$$R_t = v(\alpha_0(t) - R)R + a \sum_{s=1}^m R_{x_s x_s}, \quad (3)$$

$$R_{x_s} \Big|_{\substack{x_s=0 \\ x_s=1}} = 0, \quad (s = \overline{1, m}), \quad R \Big|_{t=0} = \psi, \quad (4)$$

где  $\alpha_0(t) > 0$  — объем рынка информационно-коммуникационных услуг в данном регионе, выраженный в денежном эквиваленте,  $a = \text{const} > 0$  — коэффициент диффузии,  $v = 1/(\hat{\alpha}_0 \tilde{T})$  — коэффициент пропорциональности, определяющий скорость насыщения рынка услуг,  $\hat{\alpha}_0 = \max_{t \in [0, T]} \alpha_0(t)$  — максимальный объем рынка

информационно-коммуникационных услуг в данном регионе,  $\tilde{T} = \text{const} > 0$  — временной параметр, характеризующий период насыщения рынка,  $\psi(x_1, \dots, x_m)$  — начальное распределение потребленной стоимости услуг региона по ареалу  $\Omega$ , удовлетворяющее условию  $0 \leq \psi(x_1, \dots, x_m) \leq \alpha_0(0)$ ,  $\psi(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ . Если ввести параметр  $\hat{a} = a\hat{\alpha}_0\tilde{T}$ , новую переменную  $\hat{t} = t/(\hat{\alpha}_0\tilde{T})$ ,  $\hat{t} \in [0, \hat{T}]$ ,  $\hat{T} = T/(\hat{\alpha}_0\tilde{T})$ ,  $Q_{\hat{T}} = \Omega \times (0, \hat{T})$ , то вместо (3), (4) в многомерной области  $Q_{\hat{T}}$  с границей  $\Gamma_{\hat{T}}$  получаем задачу

$$R_{\hat{t}} = (\alpha_0(\hat{t}) - R)R + \hat{a} \sum_{s=1}^m R_{x_s x_s}, \quad (5)$$

$$R_{x_s} \Big|_{\substack{x_s=0 \\ x_s=1}} = 0, \quad (s = \overline{1, m}), \quad R \Big|_{\hat{t}=0} = \psi(x). \quad (6)$$

Расщепим задачу (5), (6) на  $n$  задач для  $\{R^{(k)}\}$ , получим систему типа Лотке–Вольтерра. В диффузионной модели [8] центры конкурирующих фирм располагаются в  $\Omega$  на равноудаленных расстояниях один от другого, поэтому размерность области  $\Omega$  принимает значение  $m = (n-1)$ :

$$R_{\hat{t}}^{(k)} = (\alpha_0(\hat{t}) - R)R^{(k)} + R^{(k)} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \gamma_{ks}(\hat{t})R^{(s)} + \hat{a} \sum_{s=1}^m R_{x_s x_s}^{(k)}, \quad (7)$$

$$R_{x_s}^{(k)} \Big|_{\substack{x_s=0 \\ x_s=1}} = 0, \quad (s = \overline{1, m}), \quad R^{(k)} \Big|_{\hat{t}=0} = \psi^{(k)}. \quad (8)$$

Здесь  $\gamma_{ks}(\hat{t})$  — безразмерный коэффициент конкуренции между предприятиями ( $\gamma_{ks}(\hat{t}) = -\gamma_{sk}(\hat{t})$ ,  $\gamma_{ks}(\hat{t}) \in [-1; 1]$ ),  $R(x, \hat{t}) = \sum_{k=1}^n R^{(k)}(x, \hat{t})$ ,  $\psi = \sum_{k=1}^n \psi^{(k)}$ ,  $0 \leq \psi^{(k)}(x_1, \dots, x_m) \leq \alpha_0(0)$ ,  $\psi^{(k)}(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ . Сумма уравнений (7) приводит к уравнению (5). Предприятие с номером ( $k$ ) доминирует (является более конкурентоспособным) над предприятием с номером ( $s$ ): ( $k$ )  $\succ$  ( $s$ ), если  $0 \leq \gamma_{ks}(\hat{t}) \leq 1$ . Это условие приводит к неравенству

$$\lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} \max_{x \in \Omega} (R^{(k)}(x, \hat{t})) > \lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} \max_{x \in \Omega} (R^{(s)}(x, \hat{t})),$$

т.е. с течением времени ( $k$ ) предприятие вытесняет с рынка ( $s$ ) предприятие. Зафиксируем номер ( $k$ ) рассматриваемого нами предприятия в общей группе конкурентов. Будем рассматривать управление работой  $k$ -го предприятия в конкурентной среде для коэффициентов конкуренции с фиксированным номером ( $k$ )  $\gamma_{ks}(u_1(\hat{t}), u_2(\hat{t}), \hat{t}) = -\gamma_{sk}(u_1(\hat{t}), u_2(\hat{t}), \hat{t})$ , ( $s = 1, n, s \neq k$ ), зависящих от управляющих инвестиций в фонды ( $k$ )-го предприятия  $u_1(\hat{t})$  и прямых управляющих инвестиций в конкурентоспособность — продвижение продукции предприятия на рынке услуг  $u_2(\hat{t})$  и управление ростом рынка услуг за счет формирования спроса потребителей на предоставляемый вид услуг инновационного характера через коэффициент  $\alpha_0(u_3(\hat{t}), \hat{t})$ .

Для удобства будем рассматривать задачу (1), (2) для переменной  $\hat{t} \in [0, \hat{t}]$ . На уровне координаты  $C_0$  рассмотрим три различные сценария управления  $k$ -м предприятием в зависимости от стратегических целей и планов экстенсивного или интенсивного пути развития, сформулированных в виде соответствующих задач оптимального управления.

1. Задача оптимального управления ОУ I-экстенсивное развитие предприятия (захват рынка) — увеличение количества узлов и каналов связи информационно-коммуникационной сети при ограничениях на объемы финансирования. На пространстве  $\Sigma_{J_1} = \{N \times U_1\}$  ( $N$  — множество натуральных чисел) введем критерий качества управления — функционал  $J_1^{(k)}(v, u_1)$  — и рассмотрим задачу:

$$u_1^*(\hat{t}) = \arg \max_{u_1(\hat{t}) \in U} J_1^{(k)}(v^{(k)}, u_1) = \arg \max_{u_1(\hat{t}) \in U} (v^{(k)}(u_1, T) / \hat{v}), \quad (9)$$

$$I^{(k)} = R^{(k)}(u(\hat{t})) - u_1(\hat{t}) - Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}) \geq 0, \quad R^{(k)} \leq P^{(k)} = F^{(k)}(\Phi^{(k)}),$$

$$G^{(k)}(\hat{t}) \in \hat{G}, \quad u_1(\hat{t}) \geq 0, \quad u_2(\hat{t}) = 0, \quad u_3(\hat{t}) = 0, \quad (10)$$

$v^{(k)}(u_1, T)$  — количество технических узлов сети  $k$ -го предприятия, обслуживающей потребителей информационно-коммуникационных услуг. Ограничение (10) для задачи (9) выступает в роли критерия остановки процесса моделирования, в случае если в некоторый момент времени управление не позволяет удовлетворять этому условию. Тогда предприятие может стать убыточным.

2. Задача оптимального управления ОУ II-интенсивное развитие предприятия — увеличение его свободных средств с помощью инвестиций в инновационные технологии и обновления фондов, а также повышение его конкурентоспособности за счет информационной рекламно-маркетинговой деятельности. На пространстве  $\Sigma_{J_2} = \{C_2^1(Q_{\hat{t}}) \times C^1([0, \hat{t}]) \times U_2\}$  введем критерий качества управления — функционал  $J_2^{(k)}(R^{(k)}, \Phi, u_2)$  и рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} u_2^*(\hat{t}) &= \arg \max_{u^{(2)}(\hat{t}) \in U} J_2^{(k)}(R^{(k)}, \Phi^{(k)}, u_2) = \\ &= \arg \max_{u_2(\hat{t}) \in U} ((R^{(k)}(u(\hat{t})) - u_2(\hat{t}) - Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}(u(\hat{t}), \hat{t}))) / \hat{\alpha}_0), \end{aligned} \quad (11)$$

$$I^{(k)} = R^{(k)}(u(\hat{t})) - u_2(\hat{t}) - Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}(u(\hat{t}), \hat{t})) \geq 0, \quad R^{(k)} \leq P^{(k)} = F^{(k)}(\Phi^{(k)}), \quad (12)$$

$$u_1(\hat{t}) = 0, \quad u_2(\hat{t}) \geq 0, \quad u_3(\hat{t}) = 0.$$

Если ограничение (12) для задачи (11) не выполняется, моделирование процесса останавливается, предприятие переходит в разряд убыточных.

3. Задача оптимального управления ОУ III-интенсивное развитие предприятия вместе с развитием рынка инновации — рост отдельных инновационных сегментов рынка информационно-коммуникационных услуг вместе с объемами продаж предприятия за счет вложения финансовых ресурсов в информационно-рекламную деятельность относительно инноваций. На пространстве  $\Sigma_{J_3} = \{C_2^1(Q_{\hat{T}}) \times C^{(1)}([0, \hat{T}]) \times U^{(3)}\}$  введем критерий качества управления — функционал  $J_3(R^{(k)}, \Phi^{(k)}, u_3)$  — и рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} u^{(3)*}(\hat{t}) &= \arg \max_{u^{(3)}(\hat{t}) \in U} J_3^{(k)}(R^{(k)}, \Phi^{(k)}, u^{(3)}) = \\ &= \arg \max_{u^{(3)}(\hat{t}) \in U} (\alpha_0(u^{(3)}(\hat{t}), \hat{t}) / \hat{\alpha}_0), \end{aligned} \quad (13)$$

$$I^{(k)} = R^{(k)}(u(\hat{t})) - u_3(\hat{t}) - Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}) \geq 0, \quad R^{(k)} \leq P^{(k)} = F(\Phi^{(k)}), \quad (14)$$

$$u_1(\hat{t}) = 0, \quad u_2(\hat{t}) = 0, \quad u_3(\hat{t}) \geq 0.$$

Если ограничение (14) для задачи (13) не выполняется, моделирование процесса останавливается, предприятие переходит в разряд убыточных.

4. Комплексная задача оптимального ОУ управления IV. На основе сценариев (9)–(14) на пространстве  $\Sigma_J = \{N \times C_2^1(Q_{\hat{T}}) \times C^{(1)}([0, \hat{T}]) \times U_1 \times U_2 \times U_3\}$  введем критерий качества управления — функционал  $J^{(k)}(u)$  — и рассмотрим задачу оптимального управления в общем виде:

$$u^*(\hat{t}) = \arg \max_{u(\hat{t}) \in U} J(v^{(k)}, R^{(k)}, \Phi^{(k)}, u) = \arg \max_{u(\hat{t}) \in U} \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_i J_i^{(k)}(u_i(\hat{t})) \right), \quad (15)$$

$$I^{(k)} = R^{(k)}(u(\hat{t})) - \sum_{i=1}^3 \chi(\sigma_i) u_i(\hat{t}) - Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}) \geq 0,$$

$$R^{(k)} \leq P^{(k)} = F(\Phi^{(k)}), G^{(k)}(\hat{t}) \in \hat{G}, \quad (16)$$

$$(1 - \chi(\sigma_i)) u_i(\hat{t}) = 0, u_i(\hat{t}) \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}), \chi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где  $\sigma_i \geq 0$  — весовые множители, определяемые на уровне координации  $C_0$ . Поскольку ключевым параметром модели оптимального управления является объем продаж предприятия, то для построения корректного алгоритма решения задачи (15), (16) в первую очередь необходимо проанализировать теоретические свойства решения системы (5)–(8).

#### ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ОЦЕНКИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Прежде чем исследовать математические свойства решения системы (5)–(8), рассмотрим задачу Коши для уравнения логистического типа:

$$Y_{\hat{t}} = (\alpha_0(\hat{t}) - Y)Y, Y|_{\hat{t}=0} = Y_0, \hat{t} \in [0, \hat{t}].$$

Решение данной задачи из [9] имеет вид

$$Y(\hat{t}) = Y_0 \exp\left(\int_0^{\hat{t}} \alpha_0(\tau) d\tau\right) \left(1 + Y_0 \int_0^{\hat{t}} \exp\left(\int_0^{\tau} \alpha_0(\xi) d\xi\right) d\tau\right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что при  $\alpha_0(\hat{t}) > 0$  и  $Y_0 \leq 0$  возможно существование особой точки  $\hat{t}^*$  — точки разрыва функции  $Y(\hat{t})$ , в которой

$$1 + Y_0 \int_0^{\hat{t}^*} \exp\left(\int_0^{\tau} \alpha_0(\xi) d\xi\right) d\tau = 0.$$

Для рассмотренной задачи моделирования рынка информационно-коммуникационных услуг (системы (5)–(8)) начальные значения функций по сути всегда являются неотрицательными, что должно гарантировать отсутствие особых точек данного типа. Рассмотрим поведение решения задачи Коши при убывающем положительном коэффициенте  $\alpha_0(\hat{t}) > 0, d\alpha_0/d\hat{t} \leq 0$ . Например, рассмотрим зависимость  $\alpha(\hat{t}) = \frac{\Theta Y_0}{1 + \hat{t}}, \hat{t} \in [0, \Theta - 1]$ , где  $\Theta = \text{const} > 1$  — произвольная константа.

Решение  $Y(t)$  в конечной точке  $\hat{t} = \Theta - 1$  имеет вид

$$Y(\Theta - 1) = \frac{Y_0(1 + \Theta Y_0)}{(1 + (\Theta - 1)Y_0)\Theta^{-\Theta Y_0} + \Theta Y_0}.$$

Поскольку при  $\Theta \geq 2, \Theta Y_0 \geq 10$  справедливо  $(1 + (\Theta - 1)Y_0)\Theta^{-\Theta Y_0} < 1$ , то решение задачи  $Y(\Theta - 1) > \alpha_0(\Theta - 1) = Y_0$ . Полученное неравенство для данного частного примера противоречит основному свойству логистической модели, когда решение задачи Коши  $Y(t)$  асимптотически достигает предела насыщения  $\alpha_0(t)$ . Условие убывания коэффициента  $d\alpha_0/dt \leq 0$  является ограничением применимости данной задачи к моделированию процессов насыщения рынка услуг. Рассмотренные свойства точного решения задачи Коши позволят сформулировать и

доказать математические свойства решений задач (5)–(8). Рассмотрим теперь задачу (5), (6) для моделирования динамики стоимости предоставленных информационно-коммуникационных услуг на рынке в целом  $R(x, \hat{t})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $R(x, \hat{t})$  — классическое решение задачи (5), (6) в области  $\overline{Q_{\hat{T}}}$ , для всех  $(x, \hat{t}) \in \overline{Q_{\hat{T}}}$  коэффициенты  $\hat{a} = \text{const} > 0$ ,  $\alpha_0(\hat{t}) > 0$ ,  $0 \leq \psi(x) < \alpha_0(0)$ ,  $\psi \neq 0$  — непрерывные, ограниченные на множестве  $\overline{Q_{\hat{T}}}$  функции. Тогда для  $R(x, \hat{t})$  при любом  $\hat{t} \in [0, \hat{T}]$  справедлива оценка

$$0 \leq \min_{x \in \Omega} (\psi(x)) \leq R(x, \hat{t}) \leq \hat{\alpha}_0, \quad (17)$$

где  $\hat{\alpha}_0 = \max_{\hat{t} \in [0, \hat{T}]} \alpha_0(\hat{t})$ . Если  $\alpha_0(\hat{t})$  дополнительно удовлетворяет условию  $d\alpha_0(\hat{t})/d\hat{t} \geq 0$ , то для  $R(x, \hat{t})$  при любом  $\hat{t} \in [0, \hat{T}]$  справедлива оценка

$$0 \leq \min_{x \in \Omega} (\psi(x)) \leq R(x, \hat{t}) \leq \alpha_0(\hat{t}). \quad (18)$$

**Доказательство.** Выберем произвольную точку  $\hat{t} \in (0, \hat{T})$  и рассмотрим положительный максимум функции  $R(x, \hat{t})$  в некоторой внутренней точке области  $(x_0, \hat{t}_0) \in \Omega \times (0, \hat{t}_1]$ . В этой точке выполняются условия экстремума (максимума):  $\hat{a}R_{x_s x_s}(x_0, \hat{t}_0) \leq 0$ ,  $R_{\hat{t}}(x_0, \hat{t}_0) \geq 0$ ,  $R_{x_j}(x_0, \hat{t}_0) = 0$ . Тогда из уравнения (5) следует, что  $R(x_0, \hat{t}_0)$  должна удовлетворять условию  $(\alpha_0(\hat{t}_0) - R(x_0, \hat{t}_0))R(x_0, \hat{t}_0) \geq 0$ . Отсюда следует  $R(x_0, \hat{t}_0) \leq \alpha_0(\hat{t}_0)$ . В точке положительного максимума  $R(x_0, \hat{t}_0)$  не превышает значения  $\alpha_0(\hat{t}_0) \leq \hat{\alpha}_0$ .

Если положительный максимум  $R(x, \hat{t})$  находится в некоторой начальной точке  $(x_0, 0)$ ,  $x_0 \in \Omega$ , то в силу ограничений для  $\psi(x)$  справедливо (17).

Рассмотрим положительный максимум  $R(x_0, \hat{t}_0)$  в некоторой точке  $(x_0, \hat{t}_0)$  боковой границы цилиндра  $\overline{Q_{\hat{T}_1}}$ :  $x_j = 0$  или  $x_j = 1$  для  $1 \leq j \leq m$ ,  $\hat{t}_0 \in (0, T)$ . Рассмотрим для определенности поверхность  $x_j = 0$ , на которой определим бесконечно малую  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  в виде параллелепипеда,  $\Omega_\varepsilon = \{x \mid x_{0s} - \varepsilon \leq x_s \leq x_{0s} + \varepsilon, s = \overline{1, m}, s \neq j, 0 \leq x_j \leq \varepsilon\}$ . Пусть  $\Sigma_s^+$  и  $\Sigma_s^-$  — боковые поверхности  $\Omega_\varepsilon$  для  $x_s = x_{0s} + \varepsilon$  и соответственно  $x_s = x_{0s} - \varepsilon$ . Проинтегрируем уравнение (5) по области  $\Omega_\varepsilon$ . Применяя формулу Остроградского и учитывая (6), получаем уравнение

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (R_{\hat{t}} - (\alpha_0(\hat{t}_0) - R)R) dx - \hat{a} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \left( \int_{\Sigma_s^+} R_{x_s} d\sigma_s - \int_{\Sigma_s^-} R_{x_s} d\sigma_s \right) - \hat{a} \int_{\Sigma_j^+} R_{x_j} d\sigma_j = 0. \quad (19)$$

Из свойств максимума непрерывно дифференцируемой функции следует существование  $\varepsilon > 0$  такого, что при  $\hat{t} = \hat{t}_0$  в каждой точке окрестности  $x \in \Omega_\varepsilon$  максимума  $(x_{0s}, \hat{t}_0)$  частные производные  $R(x, \hat{t})$  удовлетворяют неравенствам  $R_{\hat{t}}(x, \hat{t}_0) \geq 0$ ,  $R_{x_s}(x, \hat{t}_0) \leq 0$  для  $x \in \Sigma_s^+$ ,  $R_{x_s}(x, \hat{t}_0) \geq 0$  для  $x \in \Sigma_s^-$ . Поскольку уравнение (19) справедливо для любого  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , определяющего область  $\Omega_{\tilde{\varepsilon}}$ , то из свойств гладкости подынтегральных функций в (19) следует  $(\alpha_0(\hat{t}_0) - R(x_0, \hat{t}_0))R(x_0, \hat{t}_0) \geq 0$ , откуда вытекает  $R(x_0, \hat{t}_0) \leq \alpha_0(\hat{t}_0)$ . Аналогично рассматривается случай для поверхности  $x_j = 1$  при произвольном  $j = \overline{1, m}$ .



В силу произвольности  $\hat{T}$  результаты, полученные на множестве  $\overline{Q_{\hat{T}_1}}$ , справедливы и для  $\overline{Q_{\hat{T}}}$ , откуда следует, что  $R(x, \hat{t})$  не может превышать максимального значения  $\hat{\alpha}_0 = \max_{\hat{t} \in [0, \hat{T}]} \alpha_0(\hat{t})$  на всем множестве, откуда окончательно вытекает правая часть оценки (17).

В начальный момент времени  $R(x, \hat{t})$  удовлетворяет  $0 \leq R(x, 0) < \alpha_0(0)$ . В точке положительного максимума  $R(x_0, \hat{t}_0) \leq \alpha_0(\hat{t}_0)$  при  $\hat{t}_0 < \hat{T} \forall \hat{T} > 0$ . Отсюда в силу гладкости классического решения  $R(x, \hat{t})$  следует справедливость правой части неравенства (18) при  $0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_0$ . Если  $\alpha_0(\hat{t})$  для всех  $\hat{t} \in [0, \hat{T}]$  дополнительно удовлетворяет  $d\alpha_0(\hat{t})/d\hat{t} \geq 0$ , то из свойства максимума  $R(x_0, \hat{t}_0) \leq \alpha_0(\hat{t}_0)$  следует, что это условие гарантирует выполнение правой части условия (18) для всех  $\hat{t} \in [0, \hat{t}]$ .

Рассмотрим минимум функции  $R(x, \hat{t})$  в некоторой внутренней точке  $(x_0, \hat{t}_0) \in \Omega \times (0, \hat{t}_1]$  и предположим, что  $R(x_0, \hat{t}_0) < \min_{x \in \Omega} (\psi(x))$ . В этой точке выполняются условия экстремума (минимума):  $\hat{a}R_{x_s x_s}(x_0, \hat{t}_0) \geq 0$ ,  $R_{\hat{t}}(x_0, \hat{t}_0) \leq 0$ . Тогда из уравнения (5) следует, что для точки минимума должно выполняться условие

$$(\alpha_0(\hat{t}_0) - R(x_0, \hat{t}_0))R(x_0, \hat{t}_0) \leq 0.$$

Это возможно только при  $R(x_0, \hat{t}_0) < 0$ . Если  $R(x_0, \hat{t}_0) \geq 0$ , то в достаточно малой окрестности точки  $(x_0, \hat{t}_0)$  области  $\Omega \times (0, \hat{t}_1]$  всегда найдется точка  $(x^*, \hat{t}^*)$ , в которой выполняются неравенства

$$\hat{a}R_{x_s x_s}(x^*, \hat{t}^*) \geq 0, R_{\hat{t}}(x^*, \hat{t}^*) < 0, R(x^*, \hat{t}^*) > 0,$$

$$(\alpha_0(\hat{t}^*) - R(x^*, \hat{t}^*))R(x^*, \hat{t}^*) > 0,$$

что противоречит уравнению (5). Решение задачи (5), (6)  $R(x, \hat{t})$  не может принимать неотрицательного минимума во внутренних точках области  $\overline{Q_{\hat{T}}}$ . Аналогично с помощью (6) и (19) рассматривается случай на боковой границе цилиндра  $\overline{Q_{\hat{T}}}$ .

Рассмотрим отрицательный минимум  $R(x_0, \hat{t}_0)$ . Перейдем в уравнении (5) к новой функции  $V(x, \hat{t}) = R(x, \hat{t}) \exp(-\lambda \hat{t})$ , где  $\lambda$  — фиксированная положительная константа. Функции  $V(x, \hat{t})$  и  $R(x, \hat{t})$  одновременно принимают положительные, отрицательные значения либо одновременно обращаются в нуль. Для  $V(x, \hat{t})$  получаем задачу:

$$V_{\hat{t}} = (\alpha_0 - \lambda - V \exp(\lambda \hat{t}))V + \hat{a} \sum_{s=1}^m V_{x_s x_s}, \quad (20)$$

$$V_{x_s} \Big|_{\substack{x_s=0 \\ x_s=1}} = 0, \quad (s = \overline{1, n-1}), \quad V \Big|_{\hat{t}=0} = \psi(x). \quad (21)$$

Рассмотрим отрицательный минимум функции  $V(x, \hat{t})$  в некоторой внутренней точке  $(x_0, \hat{t}_0) \in \Omega \times (0, \hat{t}_1]$ :

$$\hat{a}V_{x_s x_s}(x_0, \hat{t}_0) \geq 0, V_{\hat{t}}(x_0, \hat{t}_0) \leq 0, V(x_0, \hat{t}_0) < 0. \quad (22)$$

Из (20), (22) следует, что

$$(\alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - V(x_0, \hat{t}_0) \exp(\lambda \hat{t}_0)) V(x_0, \hat{t}_0) \leq 0. \quad (23)$$

Последнее возможно только при выполнении неравенств

$$0 \leq (\alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - V(x_0, \hat{t}_0) \exp(\lambda \hat{t}_0)) = (\alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - R(x_0, \hat{t}_0)).$$

В силу гладкости классического решения минимальное значение функции  $R(x_0, \hat{t}_0)$  является ограниченным. Отсюда следует, что для любого  $\hat{T} > 0$  всегда существуют достаточно большие положительные значения произвольного параметра  $\lambda$ , начиная с  $\lambda > \lambda_0 = \hat{\alpha}_0 - R(x_0, \hat{t}_0)$ , при которых данное неравенство не выполняется. Поскольку знак функции  $R(x, \hat{t})$  не зависит от  $\lambda$ , то из полученного противоречия следует, что  $V(x, \hat{t})$  и  $R(x, \hat{t})$  не могут принимать отрицательного значения в области  $\Omega \times (0, \hat{t}_1]$  при произвольном  $\hat{t}_1 \in (0, \hat{T})$ . Аналогично с помощью (6), (19), (21) рассматривается случай на боковой границе цилиндра  $\bar{Q}_{\hat{T}}$ . Следовательно,  $R(x, \hat{t})$  не может принимать в замкнутой области  $\bar{Q}_{\hat{T}}$  минимального значения, удовлетворяющего  $R(x_0, \hat{t}_0) < \min_{x \in \Omega} (\psi(x))$ , откуда следуют левые части оценок (17) и (18).

Теорема доказана.

**Замечание.** Если условие к оценке (18) не выполняется и  $d\alpha_0(\hat{t}^*) / d\hat{t} < 0$ , то в некоторой точке  $(x^*, \hat{t}^*)$  окрестности положительного максимума  $R(x^*, \hat{t}^*)$  является невозрастающей функцией своих аргументов  $R_{\hat{t}}(x^*, \hat{t}^*) \leq 0$  и (как это следует из (5))  $R(x^*, \hat{t}^*)$  может в этой точке удовлетворять неравенству  $(\alpha_0(\hat{t}^*) - R(x^*, \hat{t}^*)) R(x^*, \hat{t}^*) \leq 0$ . Данная ситуация возможна только в случае  $d\alpha_0(\hat{t}^*) / d\hat{t} < R_{\hat{t}}(x^*, \hat{t}^*) \leq 0$ , когда  $\alpha_0(\hat{t})$  в окрестности положительного максимума убывает быстрее, чем  $R(x, \hat{t})$ , и  $\alpha_0(\hat{t}^*) < R(x^*, \hat{t}^*)$ , что приводит к нарушению (18).

Оценка (18) отражает в большей степени прикладные свойства решения задачи: для того чтобы стоимость оказанных информационно-коммуникационных услуг  $R(x, \hat{t})$  в данном регионе не превышала объема рынка  $\alpha_0(\hat{t})$ , достаточно потребовать возрастания или, по крайней мере, неубывания рынка потребления услуг:  $d\alpha_0(\hat{t}) / d\hat{t} \geq 0$ . Условие  $d\alpha_0(\hat{t}) / d\hat{t} \geq 0$  показывает достаточные условия применимости модели (5), (6) для описания процессов реализации товаров и услуг на рынке потребления.

Рассмотрим задачу (7), (8) для моделирования динамики стоимости информационно-коммуникационных услуг, предоставляемых конкурирующими предприятиями  $R^{(k)}(x, \hat{t})$ .

**Теорема 2.** Пусть  $R(x, \hat{t})$  — классическое решение задачи (5), (6) в области  $\bar{Q}_{\hat{T}}$ , набор функций  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — классическое решение задачи (7), (8)

в области  $\bar{Q}_{\hat{T}}$ , коэффициенты  $\hat{a} = \text{const} > 0$ ,  $\alpha_0(\hat{t}) > 0$ ,  $0 \leq \psi(x) = \sum_{k=1}^n \psi^{(k)} < \alpha_0(0)$ ,  $\psi^{(k)}(x) \geq 0$ ,  $\psi^{(k)}(x) \neq 0$ ,  $\gamma_{ks}(\hat{t}) \in [-1; 1]$  ( $\gamma_{ks}(\hat{t}) = -\gamma_{sk}(\hat{t})$ ;  $k, s = \overline{1, n}$ ) — непрерывные, ограниченные на множестве своих аргументов функции. Тогда для функций  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  справедливы оценки при любом  $\hat{t} \in [0, \hat{T}]$ :

$$0 \leq R^{(k)}(x, \hat{t}) \leq \hat{\alpha}_0. \quad (24)$$

Если  $\alpha_0(\hat{t})$  дополнительно удовлетворяет условию  $d\alpha_0(\hat{t})/d\hat{t} \geq 0$ , то для  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  справедливы оценки

$$0 \leq R^{(k)}(x, \hat{t}) \leq \alpha_0(\hat{t}). \quad (25)$$

**Доказательство.** Выберем произвольную точку  $\hat{t}_1 \in (0, \hat{T})$  и для фиксированного номера  $(k)$  рассмотрим отрицательный минимум функции  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  в некоторой точке  $(x_0, \hat{t}_0) \in \Omega \times (0, \hat{t}_1]$ . В начальный момент времени  $R^{(k)}|_{\hat{t}=0} = \psi^{(k)}(x) \geq 0$ . Перейдем в уравнениях системы (7) к новым функциям  $V^{(k)}(x, \hat{t}) = R^{(k)}(x, \hat{t}) \exp(-\lambda \hat{t})$ , где  $\lambda > \hat{\alpha}_0$  — фиксированная положительная константа. Функции  $V^{(k)}(x, \hat{t})$  и  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  одновременно принимают положительные, отрицательные значения или одновременно обращаются в нуль. Для  $V^{(k)}(x, \hat{t})$  получаем задачу:

$$V_{\hat{t}}^{(k)} = \left( \alpha_0 - \lambda - R + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \gamma_{ks} V^{(s)} \exp(\lambda \hat{t}) \right) V^{(k)} + \hat{a} \sum_{s=1}^m V_{x_s x_s}^{(k)}, \quad (26)$$

$$V_{x_s}^{(k)} \Big|_{x_s=0} = 0, \quad (s = \overline{1, m}), \quad V^{(k)}|_{\hat{t}=0} = \psi^{(k)}(x). \quad (27)$$

Рассмотрим отрицательный минимум функции  $V^{(k)}(x, \hat{t})$  в некоторой точке  $(x_0, \hat{t}_0) \in \Omega \times (0, \hat{t}_1]$ :

$$\hat{a} V_{x_s x_s}^{(k)}(x_0, \hat{t}_0) \geq 0, \quad V_{\hat{t}}^{(k)}(x_0, \hat{t}_0) \leq 0, \quad V^{(k)}(x_0, \hat{t}_0) < 0. \quad (28)$$

Из (26), (28) следует, что

$$\left( \alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - R + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \gamma_{ks} V^{(s)} \exp(\lambda \hat{t}_0) \right) V^{(k)}(x_0, \hat{t}_0) \leq 0. \quad (29)$$

При отрицательном минимуме  $V^{(k)}(x_0, \hat{t}_0) < 0$  выражение в скобках в (29) должно быть неотрицательным:

$$0 \leq \left( \alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - R + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \gamma_{ks} V^{(s)} \exp(\lambda \hat{t}_0) \right) \leq \left( \alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - R + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n |\gamma_{ks}| |R^{(s)}| \right) \leq \left( \hat{\alpha}_0 + (n-1) \max_{\substack{s=1, n \\ s \neq k}} |R^{(s)}(x_0, \hat{t}_0)| - \lambda - R \right). \quad (30)$$

В силу гладкости классического решения задачи (7), (8) при любом  $\hat{T} > 0$  всегда существуют достаточно большие положительные значения произвольного параметра  $\lambda > \lambda_0 = \hat{\alpha}_0 + (n-1) \max_{\substack{s=1, n \\ s \neq k}} |R^{(s)}(x_0, \hat{t}_0)|$ , при которых последнее выражение в скобках в (30) всегда принимает отрицательные значения, а следовательно

но, (29) не выполняется. Поскольку знак функций  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  не зависит от  $\lambda$ , из полученного противоречия вытекает, что  $V^{(r)}(x, \hat{t})$  и  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  не могут принимать отрицательного минимума в точках  $(x_0, \hat{t}_0) \in \Omega \times (0, \hat{t}_1]$  при любом произвольном  $\hat{t}_1 \in (0, \hat{T})$ .

Для фиксированного номера  $k$  рассмотрим отрицательный минимум функции  $V^{(k)}(x_0, \hat{t}_0) < 0$  в некоторой точке  $(x_0, \hat{t}_0)$  на боковой границе цилиндра  $\overline{Q_{\hat{t}}}$ :  $x_j = 0$  или  $x_j = 1$  для  $1 \leq j \leq n-1$ . Рассмотрим для определенности поверхность  $x_j = 0$ , на которой определим бесконечно малую  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  в виде параллелепипеда,  $\Omega_\varepsilon = \{x \mid x_{0s} - \varepsilon \leq x_s \leq x_{0s} + \varepsilon, s = 1, \overline{m}; s \neq j, 0 \leq x_j \leq \varepsilon\}$ . Обозначим  $\Sigma_s^+$  и  $\Sigma_s^-$  боковые поверхности  $\Omega_\varepsilon$  для  $x_s = x_{0s} + \varepsilon$  и соответственно  $x_s = x_{0s} - \varepsilon$ . Проинтегрируем уравнение (26) по области  $\Omega_\varepsilon$ . Применяя формулу Остроградского и учитывая (27), получаем уравнение

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left( V_{\hat{t}}^{(k)} - \left( \alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - R + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \gamma_{ks} V^{(s)} \exp(\lambda \hat{t}) \right) V^{(k)} \right) dx - \\ - \hat{a} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \left( \int_{\Sigma_s^+} V_{x_s}^{(k)} d\sigma_s - \int_{\Sigma_s^-} V_{x_s}^{(k)} d\sigma_s \right) - \hat{a} \int_{\Sigma_j^+} V_{x_j}^{(k)} d\sigma_j = 0.$$

Из свойств минимума непрерывно дифференцируемой функции следует существование  $\varepsilon > 0$  такого, что при  $\hat{t} = \hat{t}_0$  в каждой точке окрестности  $x \in \Omega_\varepsilon$  минимума  $(x_{0s}, \hat{t}_0)$  частные производные  $V^{(k)}(x, \hat{t})$  удовлетворяют неравенствам:  $V_{\hat{t}}^{(k)}(x, \hat{t}_0) \leq 0$ ,  $V_{x_s}^{(k)}(x, \hat{t}_0) \geq 0$  для  $x \in \Sigma_s^+$ ,  $V_{x_s}^{(k)}(x, \hat{t}_0) \leq 0$  для  $x \in \Sigma_s^-$ . Поскольку данное уравнение справедливо для любого  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , определяющего область  $\Omega_{\tilde{\varepsilon}}$ , из свойств гладкости

подынтегральных функций следует 
$$\left( \alpha_0(\hat{t}_0) - \lambda - R + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \gamma_{ks} V^{(s)} \exp(\lambda \hat{t}) \right) V^{(k)} \leq 0,$$

откуда вытекает неравенство (30) и соответственно противоречие для достаточно больших положительных значений произвольного параметра  $\lambda$ . Аналогично рассматривается случай для поверхности  $x_j = 1$  при произвольном  $j = \overline{1, m}$ .

Поскольку для всех номеров  $k = \overline{1, n}$  справедливо  $R^{(k)}(x, \hat{t}) \geq 0$ ,  $R^{(k)}(x, \hat{t}) \leq R(x, \hat{t})$ , из теоремы 1 вытекает справедливость оценок сверху для максимальных значений функций  $R^{(k)}(x, \hat{t})$  — правые части неравенств (24), (25).

Теорема доказана.

Таким образом, решение начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений, описывающих динамику стоимости информационно-коммуникационных услуг конкурирующих предприятий, является ограниченной неотрицательной функцией, устойчивой на любом произвольном интервале времени, независимо от вида начального неотрицательного распределения по ареалу моделирования данного процесса.

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ДЛЯ ЗАДАЧИ (15), (16)**

Полученные априорные оценки для классических решений задач (5)–(8) позволяют сформулировать достаточные условия существования оптимальных управлений для задачи (15), (16). Рассмотрим теорему существования оптимального управления для случая, когда от управления  $u(\hat{t}) \in U$  зависят  $\gamma_{ks}(u(\hat{t}), \hat{t})$  — коэффициент конкурентоспособности ( $k$ ) — предприятия системы (31), (32) с остальными ( $s$ ) — предприятиями, участниками рынка, финансовая емкость рынка  $\alpha_0(u(\hat{t}), \hat{t})$  из уравнения (3), скорость изменения инвестиций в основные фонды  $f^{(k)}(u(\hat{t}))$  — из уравнения (1).

**Теорема 3.** Пусть коэффициенты уравнений (5), (7) удовлетворяют условиям теорем 1, 2, множества  $\Gamma^{(k)} = \{\gamma_{ks}(u, \hat{t}), s = \overline{1, n}, s \neq k: u(\hat{t}) \in U\}$ ,  $A = \{\alpha_0(u, \hat{t}): u(\hat{t}) \in U\}$  при заданном  $k$  компактны в  $C([0, \hat{T}])$ ,  $\Theta^{(k)} = \{f^{(k)}(u(\hat{t})): u(\hat{t}) \in U\}$  компактно в  $L_2([0, \hat{T}])$ , функционал  $J(v^{(k)}, R^{(k)}, \Phi^{(k)}, u)$  из (15) полунепрерывный снизу на пространстве  $\Sigma_J$ , тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление  $u(\hat{t}) \in U$  задачи (15), (16).

**Доказательство.** Пусть выполнены условия теорем 1, 2, начальные значения функций  $v^{(k)}, R^{(k)}, \Phi^{(k)}$  удовлетворяют ограничениям (16). Тогда функция управления  $u(\hat{t}) = (u_1(\hat{t}), u_2(\hat{t}), u_3(\hat{t}))$  будет удовлетворять ограничениям (16) и для функционала (15) можно построить минимизирующую последовательность  $\{u_l\}$ . Рассмотрим соответствующие ей последовательности  $v_l(\hat{t})$  — количество узлов сети,  $\Phi_l(\hat{t}) = \Phi_l(\hat{t}, u_l)$ ,  $R_l^{(k)}(x, \hat{t}) = R^{(k)}(x, \hat{t}, u_l)$  — решения задач (1), (7), (8). Из компактности множеств  $\Gamma^{(k)}$ ,  $A$  в  $C([0, \hat{T}])$ ,  $\Theta^{(k)}$  в  $L_2([0, \hat{T}])$ , выражений (2), (24), (25) следует ограниченность  $v_l(\hat{t})$ ,  $\Phi_l(\hat{t})$ ,  $R_l^{(k)}(x, \hat{t})$  в норме  $C([0, \hat{t}])$ . Тогда из последовательностей  $\{v_l\}$ ,  $\{\Phi_l\}$ ,  $\{R_l^{(k)}\}$  можно выделить сходящиеся подпоследовательности к некоторым элементам  $\hat{v}_l$ ,  $\hat{\Phi}_l$ ,  $\{\hat{R}^{(k)}\}$ . Из условий теорем 1, 2 для множеств  $\Gamma^{(k)}$ ,  $A$ ,  $F$  следует, что из последовательности коэффициентов  $\gamma_{sk}(u_l, \hat{t})$ ,  $\alpha_0(u_l, \hat{t})$  можно выделить сходящиеся в  $C([0, \hat{T}])$  и для  $f^{(k)}(u_l(\hat{t}))$  сходящиеся в  $L_2([0, \hat{T}])$  подпоследовательности к некоторым элементам  $\hat{\gamma}_{sk}(\hat{t}) = \gamma_{sk}(\hat{u}, \hat{t}) \in \Gamma^{(k)}$ ,  $\hat{\alpha}_0(\hat{t}) = \alpha_0(\hat{u}, \hat{t}) \in A$ ,  $\hat{f}^{(k)}(\hat{t}) = f^{(k)}(\hat{u}(\hat{t})) \in \Theta^{(k)}$ . Таким образом, элементы подпоследовательностей  $v_{l_p}(\hat{t})$ ,  $\Phi_{l_p}(\hat{t})$ ,  $\{R_{l_p}^{(k)}(x, \hat{t})\}$  являются решениями задачи (1), (7), (8), соответствующими элементам последовательности  $\{u_{l_p}\}$ . Из сформулированных свойств сходящихся подпоследовательностей коэффициентов задачи (1), (7), (8) и свойств сходящихся подпоследовательностей решений  $v_{l_p}(\hat{t})$ ,  $\Phi_{l_p}(\hat{t})$ ,  $\{R_{l_p}^{(k)}(x, \hat{t})\}$  следует сходимость интеграла в (2) при  $l_p \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $\hat{v}(\hat{t})$ ,  $\hat{\Phi}(\hat{t})$ ,  $\{\hat{R}^{(k)}(x, \hat{t})\}$  является также решением задачи (1), (7), (8) с коэффициентами  $\hat{\gamma}_{sk}(\hat{t}) = \gamma_{sk}(\hat{u}, \hat{t})$ ,  $\hat{\alpha}_0(\hat{t}) = \alpha_0(\hat{u}, \hat{t})$ ,  $\hat{f}^{(k)}(\hat{t}) = f^{(k)}(\hat{u}(\hat{t}))$ . Учитывая полунепрерывность снизу на пространстве  $\Sigma_J$  функционала  $J$ , при ограничениях (16) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \lim_{l_p \rightarrow \infty} J(v, R_{l_p}^{(1)}, \dots, R_{l_p}^{(n)}, \Phi_{l_p}) &\geq J(\hat{v}, \hat{\gamma}^{(1)}, \dots, \hat{\gamma}^{(n)}, \hat{\Phi}) = \\ &= J(v(\hat{u}), R^{(1)}(\hat{u}), \dots, R^{(n)}(\hat{u}), \Phi(\hat{u})). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\hat{u}$  — оптимальное управление для задачи (1), (7), (8), (15), (16).

Теорема 3 доказана.

**Замечание.** Для практического использования результатов теоремы 3 условия компактности множеств  $\Gamma^{(k)}$ , а в  $C([0, \hat{T}])$ ,  $\Theta^{(k)}$  в  $L_2([0, \hat{T}])$  можно заменить условиями для  $U$ : если функции  $\gamma_{sk}(u, \hat{t})$ ,  $\alpha_0(u, \hat{t})$ ,  $f^{(k)}(u(\hat{t}))$  непрерывно зависят от управления  $u(x, t)$  и множество  $u \in U$  является компактным в  $C([0, \hat{T}])$ , то теорема 3 справедлива. Это следует из теорем о непрерывных отображениях компактных пространств [16].

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим численное моделирование процесса оптимального управления для трех конкурирующих предприятий:  $n=3$ . Рассмотрим задачу (1), (2), (5)–(8) в цилиндре  $Q_{\hat{T}} = \Omega \times (0, \hat{T})$ ,  $\Omega = \{x | 0 \leq x_s \leq 1, s=1,2\}$ . Центры конкурирующих предприятий расположим в  $\Omega$  на равноудаленных расстояниях. Зафиксируем номер  $k=2$  для управляемого предприятия. Будем рассматривать задачу (15), (16) оптимального управления фондами и конкурентоспособностью второго предприятия в пространстве  $\Sigma_J = \{N \times V_2^1(Q_{\hat{T}}) \times C^{(1)}([0, \hat{T}]) \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times U^{(3)}\}$ .

Введем в рассматриваемой области равномерную разностную сетку  $\bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau} = \{(x_{1_{i_1}}, x_{2_{i_2}}, \hat{t}_j) | x_{k_{i_k}} = i_k h_k, \hat{t}_j = j\tau, 0 \leq i_k \leq I_k, 0 \leq j \leq M\}$ . Обозначим  $\tilde{R}_{i_1 i_2}^{(k)}$ ,  $R_{i_1 i_2}^{(k)}$ ,  $\hat{R}_{i_1 i_2}^{(k)}$  значения сеточных функций  $R_{i_1 i_2}^{(k)j}$  в моменты времени  $t_{j-1}$ ,  $t_j$ ,  $t_{j+1}$  соответственно. Решение (2) задачи Коши (1) аппроксимируем сеточной функцией  $\Phi^j$ .

Для численного моделирования задачи (1) используем в (2) метод Симпсона, для уравнений системы (5)–(8) используем интегро-интерполяционный метод из [17, 18], позволяющий строить разностные схемы для дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Следуя работе [18], наложим дополнительные условия в начальный момент времени:

$$R_{\hat{t}} |_{\hat{t}=0} = 0, R_{\hat{t}}^{(k)} |_{\hat{t}=0} = 0.$$

Заменим в уравнениях (5), (7) функции  $R = \exp(\hat{\alpha}_0 \hat{t})Y$ ,  $R^{(k)} = \exp(\hat{\alpha}_0 \hat{t})Y^{(k)}$ .

Для квазилинейных уравнений параболического типа используем явные трехслойные разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами из [18]. Для устойчивости разностной схемы на шаг по времени накладываются ограничения:

$$\tau < \left( \hat{\alpha}_0 (1 + 2 \exp(\hat{\alpha}_0 \hat{T})) + 2 \hat{\alpha} \sum_{s=1}^m h_s^{-2} \right)^{-1}. \quad (31)$$

Рассмотрим модель оптимального управления для задачи (15), (16) со следующими параметрами:  $n=3$ ,  $m=2$ ,  $\hat{a}=0,1$ ,  $\tilde{T}=50$ ,  $\hat{T}=1$ ,  $\hat{a}_0=1$ ,  $x_1^{(1)}=0,25$ ,  $x_2^{(1)}=0,25$ ,  $x_1^{(2)}=0,75$ ,  $x_2^{(2)}=0,25$ ,  $x_1^{(3)}=0,5$ ,  $x_2^{(3)}=0,683$ .

Параметры  $x_i^{(k)}$  — это координаты равноудаленных центров конкурирующих предприятий по ареалу  $\Omega = \{x | 0 \leq x_s \leq 1, s=1,2\}$ . Параметры разностной сетки  $I_1 = I_2 = 100$ , шаг по времени выбирается из условия устойчивости разностной схемы (31)  $\tau = 2 \times 10^{-4}$ . Зададим условия:

$$\psi^{(s)}(x_1, x_2) = \psi_0^{(s)} \alpha_0(0) (0,01 + \exp(-500((x_1 - x_1^{(s)})^2 + (x_2 - x_2^{(s)})^2))),$$

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^3 \psi^{(s)}(x_1, x_2),$$

где  $\psi_0^{(s)}$  — начальные значения доли рынка  $s$ -го предприятия, рассматриваемые ниже. Также приведены начальные значения коэффициентов конкуренции между предприятиями  $\gamma_{sk}^0$  (коэффициенты  $\gamma_{ks}^0 = -\gamma_{sk}^0$ ). Для данного тестового примера установим эмпирическую зависимость коэффициентов задачи (5)–(8) от функций управления, исходя из качественных соображений о поведении параметров управления:

$$P^{(k)} = F(\Phi^{(k)}) = \xi_0 \Phi^{(k)}(u_1, u_2), \quad f^{(k)}(u_1, u_2) = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2,$$

$$Z_0^{(k)}(\Phi^{(k)}) = \xi_3 \Phi^{(k)},$$

$$\gamma_{2s}(u_1, u_2) = \gamma_{2s}^0 + (1 - \gamma_{2s}^0) (2/\pi) \arctg(3(u_2 + \xi_4 u_1) / \hat{\alpha}_0), \quad (s=1, 3),$$

$$\alpha_0(u_3, \hat{t}) = \hat{\alpha}_0 (\alpha_1 + (1 - \alpha_1) (2/\pi) \arctg(4(\hat{t} / \hat{T} + u_3 / \hat{\alpha}_0))), \quad u_i(0) = 0.$$

Здесь  $\xi_i > 0$  — коэффициенты пропорциональности для различных функций,  $\alpha_{01}$  — начальная доля от максимального объема рынка второго предприятия.

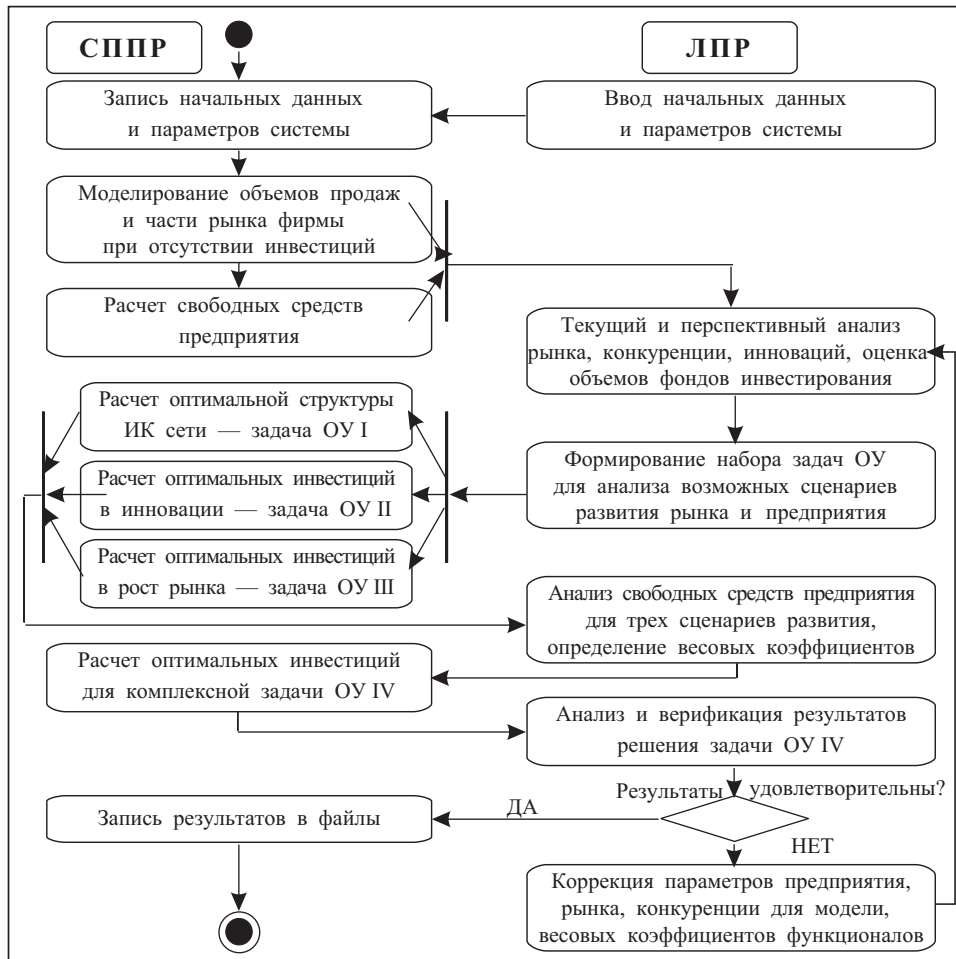


Рис. 2

Приведем значения всех параметров:  $\psi_0^{(1)} = 0,10$ ,  $\psi_0^{(2)} = 0,15$ ,  $\psi_0^{(3)} = 0,20$ ,  $\gamma_{12}^0 = 0,4$ ,  $\gamma_{13}^0 = 0,8$ ,  $\gamma_{23}^0 = 0,5$ ,  $\Phi_0^{(2)} = 0,5$ ,  $\mu = 0,05$ ,  $\xi_0 = 0,3$ ,  $\xi_1 = 0,5$ ,  $\xi_2 = 0,5$ ,  $\xi_3 = 0,1$ ,  $\xi_4 = 10$ ,  $\alpha_1 = 0,5$ .

Согласно замечанию к теореме 3 решение задачи (15), (16) можно искать на классе функций, компактных в  $C([0, \hat{T}])$ . Интегро-интерполяционный метод [18, 19] за счет операции сглаживания на шаблонах позволяет расширить данный класс функций и строить разностные схемы на классе кусочно-постоянных ограниченных функций (компакте) вида

$$u_s(\hat{t}) = \sum_{j=1}^{\tilde{M}} u_{sj} \chi(\hat{t} - t_{j-1}) \chi(t_j - \hat{t}), \quad (32)$$

где  $\{u_{sj}\}$  — набор ограниченных коэффициентов ( $0 \leq u_{sj} \leq u_{s0}(\hat{t})$ ) на интервалах  $[\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$ ,  $\chi(\hat{t})$  — функция Хевисайда,  $\tilde{M} = M/2$ . Алгоритм численного решения задачи оптимального управления (15), (16) на классе функций (32) сводится к последовательному анализу вариантов решения экстремальных задач для определения наборов числовых параметров  $\{u_{sj}\}$  по аналогии с [8, 13, 20].

Для численного моделирования процесса оптимального управления предприятием важной является стратегия развития, принимаемая на уровне координатора  $C_0$ . На рис. 2 показан алгоритм on-line взаимодействия системы поддержки принятия решений (СППР) по оптимальному управлению инвестициями предприятия в условиях конкуренции с лицом, принимающим решение (ЛПР). В основу алгоритма положено поэтапное циклическое решение задач оптимального управления ОУ I (9), (10), ОУ II (11), (12), ОУ III (13), (14), ОУ IV (15), (16). Формально стратегия развития предприятия определяется заданием весовых множителей для функционала (15). Для тестового примера рассматривался случай, когда интересы интенсивного развития предприятия в фонды и его конкурентоспособность значительно преобладают над интересами экстенсивного расширения информационно-коммуникационной сети предприятия и инвестиций в развитие рынка. В этом случае можно принять  $\sigma_1 = 0,6$ ;  $\sigma_2 = 0,3$ ;  $\sigma_3 = 0,1$ . Численные алгоритмы решения задач оптимального управления (9)–(16) построены на основе подходов и методов, содержащихся в работе [20]. Результаты численного решения задачи оптимального управления (15), (16) для выбранного сценария развития системы (2), (5)–(8) показаны на рис. 3, 4. На рис. 3 приведены графики функций:  $\alpha_0(u_3(\hat{t}), \hat{t})$  — объем рынка услуг (1);  $R^*(\hat{t}) = \sum_{k=1}^3 \max_{x_1, x_2} (R^{(k)}(x_1, x_2, \hat{t}))$  —

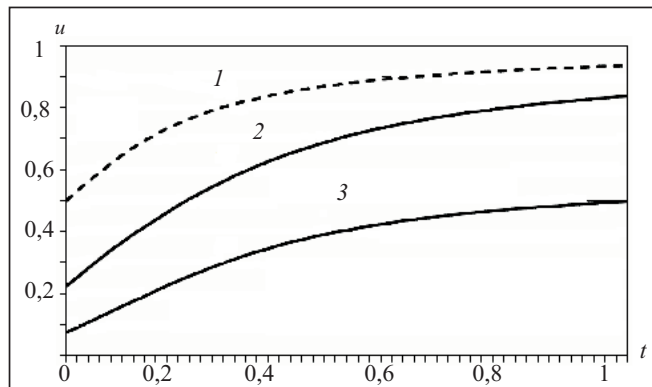


Рис. 3

максимальное значение стоимости предоставленных всеми предприятиями услуг (2);



$R^{(2)*}(\hat{t}) = \max_{x_1, x_2}(R^{(2)}(x_1, x_2, \hat{t}))$  — максимальное значение стоимости пре-

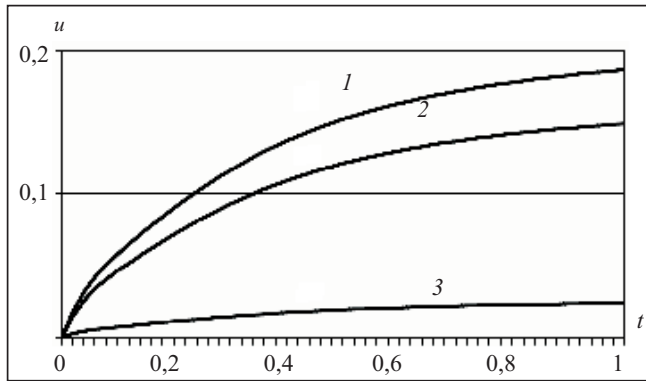


Рис. 4

доставленных вторым (управляемым) предприятием услуг (3). На рис. 4 приведены графики функций управления: 1 —  $u_1(\hat{t})$ ; 2 —  $u_2(\hat{t})$ ; 3 —  $u_3(\hat{t})$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тестовые расчеты показали, что использование явной трехслойной разностной схемы совместно с линейным сглаживающим разностным оператором для системы (5)–(8) квазилинейных уравнений параболического типа позволяет, с одной стороны, избежать линеаризации уравнений Лотке–Вольтерра, а с другой стороны, в режиме реального времени моделировать достаточно сложные многомерные процессы конкуренции предприятий. Ограничения (31) на шаг разностной сетки по времени не сказывается существенно на быстродействии вычислительного алгоритма для рассмотренного тестового примера.

Численные решения системы (2), (5)–(8), полученные интегро-интерполяционным методом, удовлетворяют оценкам из теорем 1 и 2, являются неотрицательными ограниченными функциями в условиях неубывающего рынка услуг ( $da_0 / d\hat{t} \geq 0$ ). В тестовом примере процесс конкуренции затрагивает три предприятия. Оптимальное управление основано на сценарии вывода второго предприятия на высокий уровень конкуренции (50 % доли рынка) (см. рис. 3). Решение задачи возможно при значительном доминировании инвестиционных ресурсов данной компании по сравнению с инвестициями других компаний. С одной стороны, необходимость больших инвестиций объясняется тем, что второе предприятие не доминирует над первым (1)  $\succ$  (2), а с другой, возможность завоевания 50 % рынка обусловлено доминированием второго предприятия над третьим (2)  $\succ$  (3). При этом функции управления  $u_i(\hat{t})$  (см. рис. 4) являются монотонно возрастающими и принимают максимально возможные значения, ограниченные размерами внутренних инвестиций. В силу большого количества интервалов  $\tilde{M}$ , задающих участки кусочно-постоянных функций  $u_i(\hat{t})$ , интерполяционные графики на рис. 4 в выбранном масштабе показывают практически непрерывные зависимости функций управления от времени. В целом можно сделать вывод о применимости рассмотренного в работе подхода к построению моделей конкуренции и оптимального управления для разработки систем поддержки принятия решений по управлению инвестиционными проектами предприятий, работающих в сфере информационно-коммуникационных услуг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1986. — 487 с.
2. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. — М.: Мир, 1973. — 344 с.
3. Системы: декомпозиция, оптимизация и управление / Сост. М. Сингх, А. Титли — М.: Машиностроение, 1986. — 496 с.
4. Новиков Д. А. Сетевые структуры и организационные системы. — М.: ИПУРАН, 2003. — 102 с.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Айрис-Пресс, 2002. — 553 с.
6. Акименко В. В., Наконечный А. Г., Сугоняк И. И. Моделирование процессов оптимального управления в условиях неопределенности в экономических системах с иерархией // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 134–146.
7. Takeuchi Y. Global dynamical properties of Lotka–Volterra systems. — Singapore: World Sci. Publ., 1996. — 297 p.
8. Акименко В. В., Сугоняк И. И. Нелинейное моделирование многомерного процесса диффузии инноваций на основе метода расщепления // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 120–133.
9. Акіменко В.В., Сугоняк І.І. Динамічні моделі життєвого циклу інновацій в умовах невизначеності // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. — 2007. — № 3. — С. 149–155.
10. Menaldi J. L., Rofman E., Sulem A. Optimal control and partial differential equations — innovations & applications. — Amsterdam: IOS Press, 2001. — 600 p.
11. Kunisch K., Leugering G., Sprekels J., Troltsch F. Control of coupled partial differential equations. International series of numerical mathematics, Vol. 155. — Springer, 2007. — Issue VI. — 382 p.
12. Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука. — 1972. — 576 с.
13. Акименко В. В., Наконечный А. Г. Модели оптимального управления процессами межрегиональной миграции в условиях рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 107–122.
14. Акименко В. В., Наконечный А. Г., Трофимчук О. Ю. Модель оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений с вырождающейся параболичностью // Там же. — 2007. — № 6. — С. 90–102.
15. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 286 с.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
17. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
18. Акименко В. В., Ефименко А. А. Численный метод решения диффузионной системы Лотке–Вольтерра с разрывными коэффициентами для задачи конкуренции компаний // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 2. — С. 42–50.
19. Акименко В. В., Черемных О. К. Моделирование вихревых течений на фоне двумерного процесса конвективного теплообмена // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2. — С. 64–80.
20. Акименко В. В., Наконечный А. Г., Волощук С. Д. Сценарии оптимального управления межрегиональными миграционными процессами в условиях рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 1. — С. 16–33.

*Поступила 04.04.2011*