УДК 519.21

А.В. ЛИВИНСКАЯ, Е.А. ЛЕБЕДЕВ

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПЕРЕГРУЖЕННЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Ключевые слова: *многоканальная стохастическая сеть, перегруженный режим, гауссовская аппроксимация.*

Основная математическая модель, которая изучается в настоящей работе, представляет сеть массового обслуживания из r обслуживающих узлов. На i-й узел сети поступает пуассоновский поток требований $\nu_i(t)$ с ведущей функцией $\Lambda_i(t)$, $i=1,2,\ldots,r$ (неубывающая, непрерывная справа функция). Каждый из r узлов функционирует как многоканальная стохастическая система. При поступлении требования в такую систему сразу начинается его обслуживание. Время обслуживания в i-м узле показательно распределено с параметром μ_i, $i=1,2,\ldots,r$. После завершения обслуживания в i-м узле требование с вероятностью p_{ij} поступает для обслуживания в j-й узел и с вероятностью $p_{ir+1}=1-\sum_{j=1}^{r}p_{ij}$ покидает сеть, $P=\|p_{ij}\|_1^r$ — матрица маршрутизации сети. Дополнительный узел с номером $r+1$ интерпретируется как выход из сети.

В соответствии с системой обозначений, которая принята в теории стохастических сетей, описанную выше модель будем обозначать $[M_t|\,M\,|\,\infty]^r$.

Пусть $Q_i(t)$, $i=1,2,\ldots,r$, — число требований в i-м узле сети в момент времени t. Процессом обслуживания требований в сети типа $[M_t|\,M\,|\,\infty]^r$ будем называть r-мерный процесс $Q'(t)=(Q_1(t),\ldots,Q_r(t))$. Главная цель настоящей публикации — изучить процесс $Q(t)$, $t\ge 0$, в условиях критической нагрузки в сети.

Следуя работе [1], введем пространство функций $D[0,T]$, которые определены на отрезке $[0,T]$, принимают конечные действительные значения, имеют в каждой точке предел слева и непрерывны справа (при $t=T$ слева). Будем говорить, что последовательность функций $x_n(t)\in D[0,T]$ сходится к $x_0(t)\in D[0,T]$ в равномерной топологии U ($x_n(t)\underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}}x_0(t)$), если $\sup\limits_{t\in[0,T]}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0$ при $n\to\infty$. Пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,T]$, будем обозначать $C[0,T]$.

Режим критической нагрузки обусловлен следующим поведением параметров сети.

Условие 1. Входные потоки требований зависят от n (номера серии) таким образом, что на любом конечном промежутке $[0,T]$ имеем

$$n^{-1}\Lambda_i^{(n)}(nt)\underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}}\Lambda_i^{(0)}(t)\in C[0,T],\ \ i=1,2,\ldots,r. \qquad (1)$$

Рассмотрим два важных для применений случая, когда условие 1 выполняется. В связи с этим временно предположим, что пуассоновский поток $\nu_i(t)$ регулярный: $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u)du$, где $\lambda_i(u)$ — мгновенное значение параметра (см., например, [2, с. 100]). Такой поток естественно называть пуассоновским потоком с переменным параметром.

Если для регулярного потока

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_i(t) = \lambda_i > 0, \tag{2}$$

то для него выполнено условие

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda_i(t)/t = \lambda_i. \tag{3}$$

Это следует из оценки

$$\left| \frac{1}{t}\int_0^t \lambda_i(u)du - \lambda_i \right| \le \frac{1}{t}\int_{\varepsilon t}^t |\lambda_i(u)-\lambda_i|\,du + \frac{1}{t}\int_0^{\varepsilon t} |\lambda_i(u)-\lambda_i|\,du \le$$

$$\le (1-\varepsilon)\delta(\varepsilon t) + (\lambda_i^* + \lambda_i)\varepsilon,$$

где $\varepsilon \in (0,1)$, $\sup\limits_{u\ge 0} \lambda_i(u) = \lambda_i^*$, $\delta(t') \to 0$ при $t' \to \infty$.

Для того чтобы сопоставить (1) и (3), докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $\Lambda(t)$ — неотрицательная, монотонно неубывающая, непрерывная справа функция. Тогда на любом конечном интервале $[0, T]$ из сходимости $t^{-1}\Lambda(t) \underset{t\to\infty}{\to} \Lambda^{(0)} > 0$ следует $n^{-1}\Lambda(nt) \overset{U}{\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}} \Lambda^{(0)} t$.

Доказательство. Необходимо показать, что

$$\sup_{t\in[0,T]} |n^{-1}\Lambda(nt) - \Lambda^{(0)} t| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Для любого $0 < N < nT$ справедлива оценка сверху

$$\sup_{t\in[0,T]} |n^{-1}\Lambda(nt) - \Lambda^{(0)} t| \le \sup_{0\le\tau\le N} \left| \frac{\Lambda(\tau) - \tau\Lambda^{(0)}}{n} \right| + T \sup_{N\le\tau\le nT} \left| \frac{\Lambda(\tau) - \tau\Lambda^{(0)}}{nT} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}(\Lambda(N) + N\Lambda^{(0)}) + T \sup_{N\le\tau} \left| \frac{\Lambda(\tau)}{\tau} - \Lambda^{(0)} \right|. \tag{4}$$

В силу условий леммы выбором N второе слагаемое в (4) может быть сделано сколь угодно малым. Если выбор N зафиксировать, то первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$.

Лемма доказана.

Как следствие из леммы 1, получаем, что для регулярного пуассоновского потока с асимптотически постоянным параметром (соотношение (2)) условие 1 выполнено для $\Lambda_i^{(0)}(t) = \lambda_i t$.

Пусть теперь $\lambda_i(t)$ — периодическая с периодом T_i функция

$$\lambda_i(nT_i + t) = \lambda_i(t) \text{ для } n = 1, 2, \ldots \text{ и } 0 \le t < T_i.$$

Тогда условие 1 выполнено для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\left(\int\limits_0^{T_i}\lambda_i(u)du\right)t$. Действительно,

$$\frac{\Lambda_i(t)}{t}=\frac{\int\limits_0^t \lambda_i(u)du}{t}=\frac{[t]_{T_i}\int\limits_0^{T_i}\lambda_i(u)du+\int\limits_0^{\{t\}_{T_i}}\lambda_i(u)du}{[t]_{T_i}+\{t\}_{T_i}}\xrightarrow[t\to\infty]{}\lambda_i=\int\limits_0^{T_i}\lambda_i(u)du,$$

где $[t]_{T_i}=\max\{n\in Z_+ : nT_i\le t\}$, $\{t\}_{T_i}=t-[t]_{T_i}$, Z_+ — множество целых неотрицательных чисел.

Теперь обратим внимание на время обслуживания требований в узлах сети.

Условие 2. Интенсивности обслуживания требований в каждом узле сети зависят от n (номера серии) таким образом, что

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_i(n)=\mu_i>0,\ i=1,2,\dots,r.$$

Одновременное выполнение условий 1, 2 означает, что $[M_t|M|\infty]^r$-сеть функционирует в перегруженном режиме.

Условие 3. В начальный момент времени $t=0$ сеть пуста: $Q_i(0)=0$, $i=1,2,\dots,r$.

В контексте условий 1–3 рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\xi^{(n)}(t)=n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt)-q^{(n)}(nt)),\ t\ge 0,$$

где $q^{(n)\prime}(nt)=(q_1^{(n)}(nt),\dots,q_r^{(n)}(nt))$, $q_j^{(n)}(nt)=\sum\limits_{i=1}^r\int\limits_0^{nt}d\Lambda_i(\tau)p_{ij}^{(n)}(nt-\tau)$, $j=1,\dots,r$, $p_{ij}^{(n)}(\tau)$ — элементы матрицы $P^{(n)}(\tau)=\|p_{ij}^{(n)}(\tau)\|_1^r=\exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P-I)\tau\}$, $\mu^{(n)\prime}=(\mu_1^{(n)},\dots,\mu_r^{(n)})$, $\Delta(x)=\|\delta_{ij}x_i\|_1^r$ — диагональная матрица с вектором $x'=(x_1,\dots,x_r)$ на главной диагонали; $I=\|\delta_{ij}\|_1^r$ — единичная матрица.

Для того чтобы описать предел последовательности случайных процессов $\xi^{(n)}(t)$, $n\ge 1$, введем два независимых гауссовских процесса $\xi^{(i)\prime}(t)=(\xi_1^{(i)}(t),\dots,\xi_r^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Процесс $\xi^{(1)}(t)$ определяется средними значениями $E\xi^{(1)}(t)=0$ и корреляционными матрицами

$$R^{(1)}(t)=E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)\prime}(t)=\int\limits_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau),$$

$$R^{(1)}(s,t)=E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)\prime}(t)=R^{(1)}(s)P(t-s),\ s<t,$$

где $[d\Lambda^{(0)}(\tau)]'=(d\Lambda_1^{(0)}(\tau),\dots,d\Lambda_r^{(0)}(\tau))$, $P(\tau)=\exp\{\Delta(\mu)(P-I)\tau\}$.

Для процеса $\xi^{(2)}(t)$ имеем $E\xi^{(2)}(t)=0$,

$$R^{(2)}(t)=\int\limits_0^t[\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)]-P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)],$$

$$R^{(2)}(s,t)=R^{(2)}(s)P(t-s),\ s<t.$$

Основным утверждением, доказанным в работе, является следующий результат.

Теорема. Пусть для $[M_t | M | \infty]^r$-сети выполняются условия 1–3. Тогда на любом конечном промежутке $[0, T]$ последовательность случайных процессов $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, сходится в равномерной топологии к $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Перед тем как доказывать теорему, получим ряд вспомагательных результатов.

Лемма 2. Пусть $\nu^{(n)}(t)$ — пуассоновский процесс, ведущая функция которого $\Lambda(t) = \Lambda^{(n)}(t)$ зависит от n (номера серии) и для нее выполнено условие 1. Тогда на любом конечном промежутке $[0, T]$ последовательность случайных процессов $W^{(n)}(t) = n^{-1/2}(\nu^{(n)}(nt) - \Lambda^{(n)}(nt))$, $n \geq 1$, сходится в равномерной топологии к винеровскому процессу $W^{(0)}(t)$, для которого $EW^{(0)}(t) = 0$ и $VarW^{(0)}(t) = \Lambda^{(0)}(t)$.

Доказательство. Сходимость конечномерных распределений процессов $W^{(n)}(t)$ к $W^{(0)}(t)$ следует из того, что для любого натурального N и моментов времени $0 < t_1 < \ldots < t_N$ характеристическая функция совместного распределения $\nu^{(n)}(t_1), \ldots, \nu^{(n)}(t_N)$ равна

$$E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{N} s(k) \nu^{(n)}(t_k) \right\} = \prod_{k=0}^{N-1} \exp \left\{ [\Lambda^{(n)}(t_{k+1}) - \Lambda^{(n)}(t_k)] \left[\exp(i \sum_{m=k+1}^{N} s(m)) - 1 \right] \right\},$$

где $(s(1), \ldots, s(N)) \in R_N$, $t_0 = 0$.

Теперь для доказательства сходимости в равномерной топологии достаточно проверить условие [3, с. 230]:

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_2 - t_1| \leq h} P\{| W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1) | > \varepsilon\} = 0. \qquad (5)$$

На основании неравенства Чебышева имеем оценку сверху

$$P \{| W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1) | > \varepsilon\} =$$
$$= P \{| (\nu^{(n)}(nt_2) - \nu^{(n)}(nt_1)) - (\Lambda^{(n)}(nt_2) - \Lambda^{(n)}(nt_1)) | > \varepsilon\sqrt{n}\} \leq$$
$$\leq \varepsilon^{-2} | n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_2) - n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_1) |. \qquad (6)$$

Одновременно условие 1 гарантирует, что

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_2 - t_1| \leq h} | n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_2) - n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_1) | = 0. \qquad (7)$$

Из (6), (7) следует (5).

Лемма доказана.

В дальнейшем $W_i^{(0)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, будут обозначать независимые винеровские процессы с $EW_i^{(0)}(t) = 0$ и $VarW_i^{(0)}(t) = \Lambda_i^{(0)}(t)$. При выполнении условия 1 для $i = 1, 2, \ldots, r$ траектории $W_i^{(0)}(t)$ с вероятностью 1 непрерывны и процесс $W^{(0)'}(t) = (W_1^{(0)}(t), \ldots, W_r^{(0)}(t))$ аппроксимирует поток требований извне $\nu^{(n)'}(t) = (\nu_1^{(n)}(t), \ldots, \nu_r^{(n)}(t))$ в сети типа $[M_t | M | \infty]^r$.

Для $W^{(0)}(t)$, $t \geq 0$, понадобится следующий результат.

Лемма 3. Конечномерные распределения $\int_0^t dW^{(0)'}(u) P(t - u)$ совпадают с конечномерными распределениями гауссовского процесса $\xi^{(1)}(t)$.

Доказательство этого результата следует из свойств стохастического интеграла по гауссовскому процессу с независимыми приращениями (см. [3, разд. 9]).

Обслуживание отдельно взятого требования в узлах $[M_t | M | \infty]^r$-сети происходит независимо от других требований. Для того чтобы конструктивно задать процесс обслуживания, рассмотрим цепь Маркова $x(t)$, $t \geq 0$, в множестве состояний $\{1, \ldots, r, r+1\}$, которая задается инфинитезимальными характеристиками

$$a_{ij} = \begin{cases} -\mu_i (1 - p_{ii}), & i = j = 1, \ldots, r, \\ \mu_i p_{ij}, & i \neq j, \ i = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, r, r+1; \\ 0, & i = r+1, \ j = 1, \ldots, r, r+1; \end{cases}$$

и начальным распределением $p'(0) = (p_1(0), \ldots, p_{r+1}(0))$.

Если $p_i(0) = 1$, то соответствующую цепь будем обозначать $x^{(i)}(t)$. Состояние $r+1$ для цепи $x(t)$ поглощающее. Переходные вероятности $p_{ij}(t) = P\{x(t) = j / x(0) = i\} = P\{x^{(i)}(t) = j\}$, $i, j = 1, \ldots, r$, образуют матрицу $P(t) = \exp\{\Delta(\mu)(P - I)t\}$.

Траектория требования от момента поступления в сеть через i-й узел и до момента выхода из нее может быть описана цепью $x^{(i)}(t)$, при этом поглощение в состоянии $r+1$ интерпретируется как выход требования из сети.

Свяжем с цепью $x^{(i)}(t)$, $t \geq 0$, r-мерный процесс индикаторного типа $\chi^{(i)'}(t) = (\chi_1^{(i)}(t), \ldots, \chi_r^{(i)}(t))$, $t \geq 0$, следующим образом:

$$\chi^{(i)}(t) = \begin{cases} e_j, & x^{(i)}(t) = j, \ j = 1, 2, \ldots, r; \\ e_0, & x^{(i)}(t) = r+1. \end{cases}$$

где e_j — r-мерный вектор, j-я компонента которого равна единице, а другие — нулю; e_0 — нулевой r-мерный вектор.

Для произвольного натурального N и $z'(i) = (z_1(i), \ldots, z_r(i))$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $|z(i)| \leq 1$, через $\Phi^{(m)} = \Phi^{(m)}(t_1, \ldots, t_N, z(1), \ldots, z(N))$ будем обозначать совместную производящую функцию векторов $\chi^{(m)}(t_1), \ldots, \chi^{(m)}(t_N)$, $0 < t_1 < \ldots < t_N$, $\Phi' = (\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)})$.

Лемма 4. Для произвольного $N = 1, 2, \ldots$ и $0 < t_1 < \ldots < t_N$

$$\Phi = \bar{1} + \sum_{i=1}^{N} P(\Delta t_1) \Delta[z(1)] \ldots P(\Delta t_{i-1}) \Delta[z(i-1)] P(\Delta t_i)(z(i)\bar{1}), \tag{8}$$

Здесь $\bar{1}$ — r-мерный вектор, составленный из единиц; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(t_0 = 0)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство (8) можно получить методом математической индукции по параметру N.

Доказательство теоремы. Проанализируем поведение при $n \to \infty$ одномерных распределений процесса $\xi^{(n)}(t)$, $t \geq 0$.

При фиксированной траектории входного потока $\nu'(t) = (\nu_1(t), \ldots, \nu_r(t))$ распределение $Q(t)$ совпадает с распределением

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu_m(t)} \chi^{(m,k)}(t - \tau_k^{(m)}),$$

где $\chi^{(m,1)}(t), \chi^{(m,2)}(t), \ldots$ — последовательность независимых случайных процессов, конечномерные распределения которых совпадают с $\chi^{(m)}(t)$; $\tau_k^{(m)}$ — момент поступления k-го требования на m-й узел сети.

Учитывая этот факт, а также формулу (8) при $N=1$, производящую функцию $\Phi(t, z)$, $z'=(z_1, \ldots, z_r)$, $|z| \le 1$, вектора $Q(t)$ можно представить в виде

$$\Phi(t, z) = E\prod_{m=1}^{r}\prod_{k=1}^{\nu_m(t)}[1 - p'_m(t-\tau_k^{(m)})(z-\bar{1})], \tag{9}$$

где $p'_m(\tau) = (p_{m1}(\tau), \ldots, p_{mr}(\tau))$ — m-я строка матрицы $P(\tau)$.

Пусть $\varphi^{(n)}(s)$, $s'=(s_1, \ldots, s_r) \in R_r$, — характеристическая функция $\xi^{(n)}(t)$. С учетом (9)

$$\varphi^{(n)}(s) = Ee^{i\xi^{(n)\prime} s} = \exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\times$$

$$\times E\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt)}\ln[1 - p_m^{(n)\prime}(nt-\tau_k^{(m)})(e^{is/\sqrt{n}} - \bar{1})]\right\},$$

где $(e^{is/\sqrt{n}})' = (e^{is_1/\sqrt{n}}, \ldots, e^{is_r/\sqrt{n}})$.

Пусть $(s^2)' = (s_1^2, \ldots, s_r^2)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(s) = \lim_{n\to\infty}\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\times$$

$$\times E\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt)}\left[\frac{i}{\sqrt{n}}p'_m\left(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n}\right)s - \frac{1}{2}\frac{1}{n}p'_m\left(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n}\right)s^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{n}s'p_m\left(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n}\right)p'_m\left(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n}\right)s\right]\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\,E\exp\left\{in^{-1/2}\int_0^t d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^t d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\nu_m^{(n)}(n\tau)s'p_m(t-\tau)p'_m(t-\tau)s\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^t d\Lambda^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\Lambda_m^{(n)}(n\tau)s'p_m(t-\tau)p'_m(t-\tau)s\right\}E\exp\left\{i\int_0^t dW^{(n)\prime}(\tau)P(t-\tau)s\right\},$$

где $W^{(n)\prime}(\tau) = (W_1^{(n)}(\tau), \ldots, W_r^{(n)}(\tau))$, $W_k^{(n)}(\tau) = n^{-1/2}(\nu_k^{(n)}(n\tau) - \Lambda_k^{(n)}(n\tau))$, $k = 1, 2, \ldots, r$.

Используя условие 1 и утверждения лемм 2, 3, находим

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(s) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t d\Lambda^{(0)\prime}P(t-\tau)s^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\Lambda_m^{(0)}(\tau)s'p_m(t-\tau)p'_m(t-\tau)s -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}s'\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)s\right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2} s' \int_0^t [\Delta [d\Lambda^{(0)'}(\tau) P(t-\tau)] - P'(t-\tau)\, \Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)] P(t-\tau)] s - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} s' \int_0^t P'(t-\tau) \Delta[d\Lambda^{(0)'}(\tau)] P(t-\tau) s \right\}.$$

Предельное выражение является характеристической функцией $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$. Таким образом, сходимость одномерных распределений доказана.

Рассмотрим теперь двумерные распределения. При фиксированной траектории входного потока распределение $(Q(t_1), Q(t_2))$, $0 < t_1 < t_2$, совпадает с распределением

$$\sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)} \chi^{(m,k)}(t_1 - \tau_k^{(m)}),\ \sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)} \chi^{(m,k)}(t_2 - \tau_k^{(m)}) + \sum_{k=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)} \chi^{(m,k)}(t_2 - \tau_k^{(m)}) \right).$$

Используя формулу (8) для $N = 2$, совместную производящую функцию $\Phi(t_1, t_2, z(1), z(2))$ векторов $Q(t_1), Q(t_2)$ можно представить в виде

$$\Phi(t_1, t_2, z(1), z(2)) = E \left\{ \prod_{m=1}^{r} \prod_{k=1}^{\nu_m(t_1)} [1 + p'_m(t_1 - \tau_k^{(m)})(z(1) - \bar{1}) + \right.$$

$$\left. + p'_m(t_1 - \tau_k^{(m)}) \Delta[z(1)] P(\Delta t_2)(z(2) - \bar{1})] \prod_{k=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)} [1 + p'_m(t_2 - \tau_k^{(m)})(z(2) - \bar{1})] \right\}.$$

Отсюда находим предел совместной характеристической функции $\varphi^{(n)}(s(1), s(2))$, $s(1), s(2) \in R_r$ векторов $\xi^{(n)}(t_1)$ и $\xi^{(n)}(t_2)$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(s(1), s(2)) = \lim_{n\to\infty} E \exp\{ i\xi^{(n)'}(t_1) s(1) + i\xi^{(n)'}(t_2) s(2) \} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{ -i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)'}(nt_1) s(1) - i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)'}(nt_2) s(2) \right\} \times$$

$$\times E \exp\left\{ \sum_{m=1}^{r} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt_1)} \ln [1 + p_m^{(n)'}(nt_1 - \tau_k^{(m)})(e^{is(1)/\sqrt{n}} - \bar{1}) + \right.\right.$$

$$+ p_m^{(n)'}(nt_1 - \tau_k^{(m)}) \Delta[e^{is(1)/\sqrt{n}}] P^{(n)}(n\Delta t_2)(e^{is(2)/\sqrt{n}} - \bar{1})] +$$

$$\left.\left. + \sum_{k=\nu_m^{(n)}(nt_1)+1}^{\nu_m^{(n)}(nt_2)} \ln [1 + p_m^{(n)'}(nt_2 - \tau_k^{(m)})(e^{is(2)/\sqrt{n}} - \bar{1})] \right\} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{ -i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)'}(nt_1) s(1) - i \frac{1}{\sqrt{n}} q^{(n)'}(nt_2) s(2) \right\} \times$$

$$\times E \exp\left\{ i \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)'}(n\tau) P(t_1 - \tau) s(1) - \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)'}(n\tau) P(t_1 - \tau) s^2(1) + \right.$$

$$+ i \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)'}(n\tau) P(t_1 - \tau) \Delta[e^{is(1)/\sqrt{n}}] P(\Delta t_2) s(2) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{n} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)'}(n\tau) P(t_1 - \tau) P(\Delta t_2) s^2(2) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^{t_1} s'(1)p_m(t_1-\tau)p_m'(t_1-\tau)s(1)d\nu_m^{(n)}(n\tau)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^{t_1} s'(1)p_m(t_1-\tau)p_m'(t_1-\tau)P(\Delta t_2)s(2)d\nu_m^{(n)}(n\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^{t_1} s'(2)P'(\Delta t_2)p_m(t_1-\tau)p_m'(t_1-\tau)P(\Delta t_2)s(2)d\nu_m^{(n)}(n\tau)+$$

$$+i\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{t_1}^{t_2} d\nu^{(n)'}(n\tau)P(t_2-\tau)s(2)-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_{t_1}^{t_2} d\nu^{(n)'}(n\tau)P(t_2-\tau)s^2(2)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_{t_1}^{t_2} s'(2)p_m(t_2-\tau)p_m'(t_2-\tau)s(2)d\nu_m^{(n)}(n\tau)\right\}=$$

$$=E\exp\left\{i\int_0^{t_1} dW^{(0)'}(\tau)P(t_1-\tau)s(1)+i\int_0^{t_2} dW^{(0)'}(\tau)P(t_2-\tau)s(2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}s'(1)\int_0^{t_1}[\Delta[d\Lambda^{(0)'}(\tau)P(t_1-\tau)]-P'(t_1-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t_1-\tau)]s(1)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}s'(2)\int_0^{t_2}[\Delta[d\Lambda^{(0)'}(\tau)P(t_2-\tau)]-P'(t_2-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t_2-\tau)]s(2)-$$

$$\left.-s'(1)\left(\int_0^{t_1}[\Delta[d\Lambda^{(0)'}(\tau)P(t_1-\tau)]-P'(t_1-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t_1-\tau)]\right)P(\Delta t_2)s(2)\right\}.$$

Полученный предел является характеристической функцией двумерного распределения $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$. Аналогично проверяется сходимость N-мерных распределений для $N>2$.

Сходимость конечномерных распределений можно усилить до сходимости $\xi^{(n)}(t)$ в равномерной топологии. Для этого нужно использовать сходимость нормированного входного потока $W^{(n)}(t)$ к $W(t)$ в равномерной топологии и представление процесса обслуживания как суммы процессов индикаторного типа на входном потоке (см., например, [4]).

Теорема доказана.

Часть $\xi^{(1)}(t)$ предельного процесса связана с флуктуациями входного потока, а $\xi^{(2)}(t)$ — с флуктуациями времен обслуживания.

Утверждение теоремы обобщает результаты разд. 4.2 монографии [5] на случай входных пуассоновских потоков с переменной интенсивностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скороход А.В. Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1956. — **1**, № 3. — С. 289–319.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.
3. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. — М.: Наука, 1964. — 280 с.
4. Лебедев Е.А. Многоканальные стохастические сети в условиях критической загрузки // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 1. — С. 179–187.
5. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. — Киев: Лыбидь, 1992. — 208 с.

Поступила 10.01.2012