

РЫНОК СТАВОК: АНАЛИЗ АРБИТРАЖНЫХ СИТУАЦИЙ

Ключевые слова: рынок ставок, арбитраж, вероятность, беттинг, модель торгов.

Рынок ставок (РС) — динамично развивающийся финансовый рынок. По объемам сделок он пока уступает фондовому рынку или FOREX, однако темпы его развития впечатляющи. В настоящее время РС образуют сотни букмекерских контор (БК) и бирж. В известном рейтинге Sportsbookreview отмечено свыше 500 контор (только в Англии их годовой оборот более 14 млрд фунтов стерлингов). Показателен пример on-line биржи ставок Betfair. Компания, появившаяся на рынке в 2000 году, имеет 4 млн зарегистрированных пользователей по всему миру (более 7 млн транзакций в день, 7 млрд просмотров в неделю, контент на 17 языках, в том числе русском). Акции Betfair на Лондонской фондовой бирже (LSE) оценивались в 2011 году почти в 1 млрд фунтов стерлингов, а валовой доход достиг 393,3 млн фунтов стерлингов (<http://corporate.betfair.com/>). Компания дважды получила престижную награду «Приз Королевы» в категории инноваций и международной торговли. На данный момент она считается самым успешным и революционным Интернет-проектом.

Несмотря на определенное сходство РС с фондовым рынком, в отечественной литературе нет публикаций, отвечающих направлению данной статьи. Спортивные состязания и другие различные события со случайными исходами связаны с выпуском набора своеобразных ценных бумаг, имеющих курсовую стоимость, зафиксированную в цене ставки. Однако ряд отличий РС делают его уникальной финансовой структурой современного экономического мира.

Отметим специфические особенности РС по сравнению с другими финансовыми рынками.

1. **Ценообразование.** Теоретически для определения цены спортивного события в букмекерской линии необходимо выяснить соотношение сил соперников, рассмотреть различные вероятности исходов. На основании статистической и аналитической информации выводятся так называемые честные шансы (fair odds). Естественно, у разных аналитиков, а соответственно и БК, может быть свое видение исхода события и шансов команд. (Другие факторы ценообразования рассмотрены далее.)

2. **Динамизм.** Значительная часть событий на РС имеет сверхкороткий срок существования. На фондовом рынке вряд ли найдется эмитент, выпускающий ценную бумагу срочностью, например, 1ч 45 мин (длительность футбольного матча) или 5–7 мин (время скачек).

3. **Амплитуда арбитража.** Арбитраж в несколько пунктов считается удачной операцией для трейдера на финансовом рынке. Для лайвера (трейдера, специализирующегося на игре live или in play) арбитраж в десятки процентов — каждодневная реальность.

4. **Взаимосвязанность рынков.** Цены на многих рынках одного спортивного события взаимозависимы, что определяет высокую степень их

коррелированности и позволяет использовать для изучения этих рынков различные методы анализа (корреляционного, регрессионного, факторного и др.).

5. Размер инвестиций. В отличие от других финансовых рынков, на которые инвестора с небольшим капиталом не допустят, разовые ставки в непосредственных торгах на РС могут составлять несколько центов, причем они участвуют в сделках наравне с крупными вложениями.

6. Дуализм. В операциях на финансовом рынке вклад может обесцениться. Однако потери ограничивают, риски и капитал страхуют и перестраховывают. Эмиссия любой «ценной бумаги» на РС означает одновременное появление ее антипода с противоположной, в некотором смысле, курсовой стоимостью. Аналог «ценной бумаги» имеет только три возможных исхода: возврат средств по номиналу (в случае форс-мажорного завершения события либо по условиям некоторых ставок); возврат по курсовой стоимости; полная потеря вложенных в нее средств (при стандартном завершении события). С акцией-антиподом происходит все наоборот. Риски и хэджинг («подстраховку») по таким «ценным бумагам» берет на себя беттор.

АРБИТРАЖ НА РС

Рынок ставок является своеобразным полигоном для «обкатки» различных идей, техник и технологий извлечения прибыли, часто не имеющих аналогов на других финансовых рынках. Однако точный инструментарий для спортивного беттинга находится в зачаточном состоянии. Частично это объясняется тем, что, несмотря на долгую историю букмекерства как бизнеса, вывод его в on-line и организация биржи ставок произошли только в этом столетии. Некоторые методы, используемые на РС, перешли из других финансовых рынков. Это касается, прежде всего, финансового менеджмента ставок, а также оценки эффективности различных стратегий [1, 2]. Такой инструментарий хорошо зарекомендовал себя в результативных видах спорта (баскетбол, американский футбол). Предприняты попытки собрать и систематизировать разрозненную информацию с математическими результатами, касающимися различных аспектов ставок на спорт [3]. Классические методы математической статистики в беттинге оправданы для высокорезультативных видов спорта, игр в казино, онлайн-игр, когда условия их проведения относительно стабильны. В случае неопределенности значительного количества факторов, влияющих на игру, построить генеральную совокупность или выборку с однородными событиями практически невозможно. Поэтому пользоваться расчетами, связанными со средними, дисперсиями и другими характеристиками выборки, можно только гипотетически.

Далее рассмотрим технику арбитража и различные специфичные для РС формы ее применения. Непосредственное использование предложенного инструментария связано с множеством нюансов и аспектов работы на РС [6–11].

Особое место среди техник, используемых на РС, занимают ставки с гарантированным доходом. Называются они по-разному: арбитраж (arbitrage), «уверенные ставки» (surebets), скальп (scalp), безрисковые ставки (risk free bets) и наиболее часто в русскоязычной среде — «вилки». Трейдеров, специализирующихся на этой технике, называют вилочниками или скальперами.

Техника арбитража широко применяется на финансовых рынках, когда из-за разницы в котировках нарушается согласованность цен разных опционов, акций, контрактов и других активов, вследствие чего выгодна перепродажа.

Предметом арбитража на РС являются цены различных событий со случайным исходом (результаты выборов, спортивных состязаний, «Будет снег или дождь в первый день Рождества?»). Вилка — один из базовых и универсальных приемов, применяемых в различных игровых стратегиях. В ряде случаев в расчете вилки помогают биржевые калькуляторы или Интернет-сервисы (можно рассчитать ставки непосредственно на специализированных сайтах типа Scan-sport (<http://scan-sport.com/>) или заказать программу с настройкой на нужные БК на сайтах фриланса типа Elance (<http://www.elance.com/>)).

Вилка может возникать на РС как моментно (из-за неравномерности потока заявок в различных БК и на биржах или различий в оценках вероятностей исходов разными специалистами), так и в динамике при изменении цен на рынках в ходе торгов. Очевидно, что текущая цена не обязательно отражает «честные шансы» исходов, она может быть также результатом «продавливания» или других приемов спекуляции (<http://blog.x5x7.com/>).

Вилку можно строить для инвестиций одновременно в БК и на биржах.

Среди вилок выделяют:

- ординарные (на рынках с двумя исходами);
- полные (на рынках, образующих полную группу исходов, т.е. попарно непересекающихся и образующих пространство всех возможных исходов);
- «ножницы» (на рынках, образующих неполную группу исходов);
- «коридоры» (на рынках, образующих избыточную группу исходов).

Построение вилок на таких рынках с учетом их специфичности обусловило появление множества своеобразных технологий ставок (бет-технологий).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АРБИТРАЖА НА РС

Введем следующие обозначения:

- p — прямой исход рынка («ЗА», или Back в биржевой терминологии);
 - \bar{p} — обратный исход рынка («ПРОТИВ», или Lay)
- (прямой и обратный исходы будем называть смежными);
- Ω — пространство элементарных исходов рынка;
 - O — обязательства на рынке (деньги, инвестированные на РС);
 - Π — прибыль на рынке (валовой доход за вычетом обязательств и комиссии биржи в случае благоприятного исхода);
 - C — рыночная цена (котировка или коэффициент), по которой заключена сделка (полагаем $1 < C < \infty$);
 - k — комиссия биржи от прибыли ($k = 0,05$ на Betfair без учета скидок; $k = 0,01$ на рынках азиатских гандикапов; $k = 0,0375$ на бирже 2x2bet (<http://2x2bet.com/>) — сателлите британской биржи Betdaq (<http://www.betdaq.com/>)).

Прибыли и обязательства на рынке связаны простыми соотношениями: $V(p) = O(p)C(p)$ — валовой доход на рынке при исходе p ; $\Pi(p) = [V(p) - O(p)](1 - k)$ — чистая прибыль на рынке.

Введем обозначение $A(p) = [C(p) - 1](1 - k)$. Тогда

$$\Pi(p) = A(p)O(p), \quad (1)$$

откуда

$$O(p) = \frac{\Pi(p)}{A(p)}. \quad (2)$$

Прибыль на рынке при выигравшем исходе прямо пропорциональна инвестициям.

Если τ — индекс выигравшего исхода, то соответствующая прибыль составит $\Pi(p_\tau)$, а потери на других $(n-1)$ исходах — $\sum_{i \neq \tau} O(p_i)$. Вилкой называется операция со ставками, при которой прибыль покрывает все убытки при любых исходах, т.е.

$$\Pi(p_\tau) - \sum_{i \neq \tau} O(p_i) \geq 0, \quad p \in \Omega, \quad \tau = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Если неравенство (3) строгое для всех исходов, то прибыль и обязательства можно просчитать таким образом, чтобы итоговая прибыль была неизменной (центрированная вилка). Однако для успешного трейдинга на РС не обязательно как центрирование арбитража, так и выполнение неравенства (3). Некоторые стратегии в лайве предполагают открытие ряда позиций, часть из которых изначально ожидается убыточной. Основная задача — достижение суммарного эффекта. В связи с этим обобщим понятие «вилка».

Вилка — финансовая операция на РС, которая заключается в формировании прибыли и обязательств на рынках таким образом, что суммарные инвестиции изменяются пропорционально и независимо от сыгравшего исхода, т.е. для n возможных исходов

$$\Pi(p_1) - \sum_{i \neq 1} O(p_i) = \Pi(p_2) - \sum_{i \neq 2} O(p_i) = \dots = \Pi(p_n) - \sum_{i \neq n} O(p_i). \quad (4)$$

Лемма 1. При вилке сумма прибыли и обязательства на каждом рынке величина постоянная:

$$\Pi(p_1) + O(p_1) = \Pi(p_2) + O(p_2) = \dots = \Pi(p_n) + O(p_n). \quad (5)$$

Соотношение (5) преобразуется из (4).

Таким образом, суть операции вилки состоит в установлении пропорций между инвестициями (обязательствами) на отдельных рынках для минимизации убытков либо оптимизации прибыли при всех стандартных исходах.

Лемма 2. Пропорции инвестиций при вилке определяются через любой из исходов:

$$O(p_k) = \frac{[A(p_1)+1]}{[A(p_k)+1]} O(p_1), \quad p \in \Omega, \quad k = \overline{2, n}. \quad (6)$$

Действительно, объединяя соотношения (1) и (5), имеем

$$[A(p_1)+1]O(p_1) = [A(p_2)+1]O(p_2) = \dots = [A(p_n)+1]O(p_n),$$

откуда получаем (6).

Анализ прибыли на вилке. Пусть Δ — абсолютная прибыль (убыток) в результате полной вилки, а p_τ — сыгравший исход. Абсолютная прибыль Δ состоит из прибыли и обязательств, оставшихся на сыгравшем исходе за вычетом инвестированных средств:

$$\Delta = \Pi(p_\tau) + O(p_\tau) - \sum_{\forall i} O(p_i).$$

Лемма 3. Для любого исхода $p_\tau \in \Omega$ абсолютную прибыль полной вилки можно представить в виде

$$\Delta = K[A(p_\tau)+1]O(p_\tau), \quad (7)$$

где $K = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{A(p_i)+1}$, $A(p_i) = [C(p_i) - 1](1 - k_i)$, а $C(p_i)$ и k_i — соответствующие цены и комиссии на всех n рынках ($i = \overline{1, n}$).

Соотношение (7) получается подстановкой в выражение для абсолютной прибыли Δ соотношений (1) и (6):

$$\begin{aligned} \Delta &= \Pi(p_\tau) + O(p_\tau) - \sum_{\forall i} O(p_i) = A(p_\tau)O(p_\tau) + O(p_\tau) - \sum_{i=1}^n \frac{A(p_\tau)+1}{A(p_i)+1} O(p_\tau) = \\ &= [A(p_\tau)+1]O(p_\tau) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{A(p_i)+1} \right\} = K[A(p_\tau)+1]O(p_\tau). \end{aligned}$$

В формуле (7) величина K — коэффициент эффективности инвестиций на РС в результате применения вилки. Коэффициент K определяет направление движения инвестиций (при $K > 0$ имеем прибыль, при $K < 0$ — убыток, при $K = 0$ — сохранение капитала), а также их относительную изменчивость D , показывающую процентный рост/снижение инвестиций:

$$D = \frac{\Pi(p_\tau) + O(p_\tau)}{\sum_{\forall i} O(p_i)} - 1,$$

или (с учетом леммы 3)

$$D = \frac{\Delta}{\sum_{\forall i} O(p_i)} = \frac{K[A(p_\tau)+1]O(p_\tau)}{\sum_{i=1}^n \frac{A(p_\tau)+1}{A(p_i)+1} O(p_\tau)} = \frac{K}{1-K}. \quad (8)$$

Поскольку $1 - K > 0$, имеем $D \geq -1$ (нельзя потерять больше средств, чем инвестировано на вилке); $D = 1$ соответствует 100% прибыли.

В случае отсутствия комиссии (налог на прибыль, $k = 0$) выражение для K упрощается:

$$K = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{A(p_i)+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(C(p_i)-1)(k-1)+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{C(p_i)}. \quad (9)$$

Вилочная цена рынка. Формулы (8), (9) можно использовать для анализа букмекерской линии. В отличие от биржи, где берется комиссия с выигрыша, в БК существует неявное налогообложение в виде так называемой маржи, или вигориша. Если в БК сделать одновременную ставку на прямом и обратном исходах рынка, то в отличие от «честного пари» недосчитаемся некоторой суммы денег. Эта часть и является букмекерской комиссией, или маржой, которая в пределах одной конторы или биржи фактически совпадает с относительной изменчивостью D . Учитывая всевозможные риски, букмекеру важно правильно распределить денежные массы клиентов конторы. Идеально, если поступившие средства соотносятся с ценами, соответствующими правилу вилки. В таком случае при любом исходе события букмекер имеет фиксированный процент со ставок клиентов и бизнес для него становится безрисковым — он только посредник для бетторов. Формально этого достичь несложно.

Теорема 1. Пусть ψ — фиксированный вигориш рынка, $O(p_i)$ — произвольный объем инвестиций на его исходах p_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда гарантированная симметричная прибыльность рынка определяется согласно ценам:

$$\begin{cases} C(p_m) = 1 + \frac{1}{1-k} [(1+\psi) \frac{1}{O(p_m)} \sum_{i=1}^n O(p_i) - 1], & m = \overline{1, n}; 1 > k \geq 0, \psi < 0, p \in \Omega, \\ C(p_m) = (1+\psi) \frac{1}{O(p_m)} \sum_{i=1}^n O(p_i), & m = \overline{1, n}; k = 0, \psi < 0, p \in \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Действительно, используя лемму 2, а также соотношение (8) для относительной изменчивости D , оптимальные цены можно определить через систему уравнений

$$\begin{cases} D(p_1, p_2, \dots, p_n) = \psi, \quad \psi < 0, \\ O(p_i) = \frac{A(p_1)+1}{A(p_i)+1} O(p_1), \quad i = \overline{2, n}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A(p_i)+1} = \frac{1}{1+\psi} \\ A(p_i) = (A(p_1)+1) \frac{O(p_1)}{O(p_i)} - 1, \quad i = \overline{2, n}, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(p_m) = (1+\psi) \frac{1}{O(p_m)} \sum_{i=1}^n O(p_i) - 1, \quad m = \overline{1, n}.$$

Преобразуя далее последнее соотношение, получаем формулу (10).

Цены рынка, сформированные согласно теореме, назовем вилочными.

Выражение (10) является содержательным и в то же время достаточно простым: вилочная цена рынка (в случае отсутствия прямой комиссии, $k = 0$) обратно пропорциональна доле инвестиций в него, соответственно оценка шансов на исход — прямо пропорциональна этой доле.

Поскольку деньги на РС загружают случайные любители, фанаты, непосредственно букмекеры (переставляя ставки на бирже или друг у друга), инсайдерские компании, различные бет-технологии (скальперы, стимеры, бонус-хантеры, мидлингеры и т.д.), приходим к выводу: доля компетентных денег в вилочной цене может оказаться весьма незначительной. Поэтому довольно часто прогнозы авторитетных БК «прокальваются». В отличие, например, от социального опроса перед выборами в целях более точного предсказания победителя, основная задача букмекера — не точный прогноз, а формирование им линии, адекватной денежной массе его клиентов. «Я не в бизнесе определения истинных шансов команд, я в бизнесе получения разделения мнения игроков о шансах команд», — отметил Майкл Роксборо, основатель компании Las Vegas Sport Consultants — крупнейшего оператора линий БК.

Используя соотношение (10), оперативно и перманентно корректируя цены согласно динамике загрузки средств на различные исходы, можно добиться повышения финансовой стабильности БК и, следовательно, снижения маржи. Яркий пример — БК «Пинк» со средним вигоришем $\psi \approx -0,04$ (<http://www.pinnaclesports.com/>), которая не случайно является лидером многих профессиональных рейтингов (<http://sportsbookreview.com/>). К сожалению, большинство БК не акцентируют внимания на этих аспектах, увеличивая маржу и привлекая игроков часто абсурдными акциями. Правда, в отличие от бирж риски БК с ростом количества исходов также растут, что приводит к необходимости урезать максимумы ставок либо значительно увеличивать маржу. В табл. 1 приведены сравнительные показатели (%) маржи БК и биржи Betfair на некоторых футбольных рынках. В таблице использованы следующие обозначения: T1,5 — общее количество голов в матче; 1-X-2 — победа первой команды, ничья, победа второй команды; Тайм/Матч — результат первого тайма матча/результат матча. (Сканиро-

вание линий проведено до начала тура отборочного цикла чемпионата Европы 2012 г., состоявшегося 22–23.03.2011 г.)

Таблица 1

Рынок	Количество исходов	Показатель маржи, %					
		БК 10bet	БК bwin	БК sportingbet	БК expekt	БК bet-at-home	Биржа Betfair
T1,5	2	9,8	7,6	7,8	7,2	11,3	5
1-X-2	3	8	7,7	9,5	7,5	7,4	5
Тайм/Матч	9	17,7	18,3	12,2	16,9	30,5	5

Стратегия «валуй». При анализе соотношения (10) можно сделать еще один вывод: при неоднородной разноцелевой загрузке денег всегда будут возникать ситуации, когда шансы исходов, сложившиеся на рынке, значительно отличаются от fair odds. Делая ставки на недооцененные рынком события на длинной дистанции, можно обеспечить весомый прирост капитала. Такая стратегия трейдинга на РС называется часто валуем (value betting). Предметом валуя могут быть события, для которых цена C , сложившаяся на рынке p , превосходит системную цену C^S (полученную в результате системного анализа группы факторов, влияющих на исход события): $C(p) > C^S(p)$.

Другая форма валуя связана с понятием вероятности. Нередко в случае спортивного события нельзя говорить ни о классической, ни о статистической вероятности, поскольку каждое такое событие уникально по набору факторов, стохастических по своей природе. Вероятности, выражающие шансы исходов, удовлетворяют аксиоматическому определению, однако не затрагивая их суть. Встречающийся в сети термин «истинная вероятность» (связанный с fair odds) — источник, скорее, философских споров. Интерпретировать его сложно, рассчитать такую вероятность невозможно. Более естественно вероятность, полученную согласно ценам, сложившимся на рынке в ходе торгов, и «очищенную» от маржи и комиссии, считать спекулятивной (speculative probability), а вероятность, как результат системного анализа массива информации относительно предстоящего или проходящего спортивного события, назвать системной (system probability).

Таким образом, спекулятивная вероятность исхода на рынке p определяется величиной

$$P(p) = \frac{O(p)}{\sum_{i=1}^n O(p_i)}, \quad p \in \Omega, \quad (11)$$

а системная вероятность, полученная в результате системного анализа группы факторов, влияющих на исход события, — величиной

$$P^S(p) = 1/C^S(p).$$

Обе эти вероятности имеют практический смысл и статистически оцениваемы.

Динамика спекулятивной вероятности — важная составляющая трейдинга на РС. Реально ее проследить и даже выявить тренд можно только на бирже, где имеются соответствующие опции рынка, поскольку именно здесь она обратно пропорциональна текущей цене исхода. В БК, вычислив предварительно выигрыш, спекулятивную вероятность можно оценить с учетом теоремы 1. Однако

такая оценка имеет смысл при небольшой марже, поскольку БК определяют часто коэффициент в букмекерской линии не симметрично согласно (10), а со смещением в сторону «перегруженного» исхода (например, явного фаворита).

Системная вероятность связана с эффективностью системы прогнозирования. Наиболее естественный критерий эффективности такой системы — процент с оборота. Пусть N — количество ставок эксперта; C, O, χ — цена, обязательства и индикатор рынка соответственно ($\chi = 1$, если ставка на исход рынка выиграла, $\chi = 0$, если ставка на исход рынка проиграла, $\chi = 1/C(p)$ при возврате ставки). Тогда показатель эффективности E экспертной системы прогноза (трекинга — отслеживания ставок) определяется формулой

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N O(p_i)(C(p_i)\chi(p_i) - 1)(1 - k)}{\sum_{j=1}^N O(p_j)}. \quad (12)$$

Смысл такого показателя простой — прибыль/убыток на одну у.е. оборотных средств, задействованных в ставках.

Эффективность системы зависит от обязательств на рынках, а соответственно — от финансового менеджмента, используемого экспертом. При сравнении разных систем такой менеджмент должен быть унифицирован, а ставки должны проводиться на рынках с одинаковой маржей и в одном виде спорта. В противном случае сравнение систем некорректно (этим отличаются большинство конкурсов среди каперов и типстеров). Для анализа эффективности системы эксперта наиболее простым и надежным является менеджмент с фиксированными обязательствами либо прибылью (ставки с флетом). В первом варианте, когда $O(p_i) \equiv \text{const}$, задача является классической для теории вероятностей и подробно рассмотрена в [4].

С учетом системной вероятности валуйное событие имеет вид $C(p)P^S(p) > 1$.

Рынок «считает» валуйные исходы менее вероятными, чем они являются в действительности по объективным критериям (еще одна форма value betting: $P^S(p) > P(p)$).

Для того чтобы заниматься валуем, нужно обладать аналитическими способностями, иметь оперативный доступ к эксклюзивной информации в выбранном виде спорта, а также соответствующую статистику либо пользоваться услугами специализированных сервисов (каперские и типстерские сайты) типа Winbetting (<http://winbetting.ru/>), Stavochka (<http://stavochka.com/>), Hotprognoz (<http://hotprognoz.ru/>) и т.д. Типичная ситуация для валуя — переоценка фаворита и, как следствие, завышенная цена на андердога (аутсайдера); нередко также ситуация с недооценкой фаворита.

Арбитраж на смежных рынках. Особое значение в биржевых торгах имеют операции на смежных исходах рынка: p (рынок «ЗА») и \bar{p} (рынок «ПРОТИВ»). В этом случае пространство элементарных исходов рынка $\Omega = \{p, \bar{p}\}$.

Лемма 4. Цены на смежных исходах рынка связаны функционально:

$$A(p)A(\bar{p}) = 1. \quad (13)$$

Действительно, согласно (1) $\Pi(p) = A(p)O(p)$ и $\Pi(\bar{p}) = A(\bar{p})O(\bar{p})$. В то же время прибыль на обратном рынке — принятые обязательства на прямом, и наоборот, прибыль на прямом рынке — обязательства обратного рынка, т.е. $\Pi(\bar{p}) = O(p)$ и $O(\bar{p}) = \Pi(p)$. Объединяя эти соотношения, получаем формулу (13).

В случае отсутствия комиссии имеем

$$\frac{1}{C(p)} + \frac{1}{C(\bar{p})} = P(p) + P(\bar{p}) = 1, \quad (14)$$

где $P(p)$ и $P(\bar{p})$ — текущая оценка шансов на смежные исходы рынка.

Соотношение (13) позволяет легко пересчитывать цены. Так, для цены обратного рынка

$$C(\bar{p}) = \frac{1}{(C(p)-1)(1-k)(1-\bar{k})} + 1, \quad (15)$$

где k и \bar{k} — комиссии соответствующих рынков (в пределах одной биржи и одного рынка $k = \bar{k}$).

Торги на одной бирже дают скальперам определенные преимущества, поскольку, загружая деньги на одном исходе рынка, на другом можно их частично или полностью использовать (со счета скальпера погашаются только убытки, а при позитивной вилке инвестиции возвращаются еще в процессе спортивного события).

Относительная изменчивость D вилки при инвестиции на исход рынка $O(p_1)$ в этом случае принимает вид

$$D(p_1, p_2) = \frac{\Pi(p_2)}{O(p_1)} - 1 = \frac{A(p_1)A(p_2) - 1}{A(p_2) + 1}. \quad (16)$$

Исход рынка будем называть условно прибыльным (убыточным), если прибыль (убыток) на вилке с течением времени в среднем возрастает при условии, что в этот период на рынке не происходит липа (leap) (события, которое кардинально меняет котировки шансов). Примером первого исхода есть «ЗА 0-0» или «ЗА. Т2,5 меньше», примером второго — «Против Ничья в матче» или «Против Ничья в первом тайме» со ставками в начале футбольного матча. Исходы рынка могут менять полярность. Так, при одном забитом голе исход «Против Ничья в матче» становится условно прибыльным.

Отметим следующее важное свойство смежных исходов рынка.

Лемма 5. Если прямой исход p условно прибыльный, то обратный исход \bar{p} условно убыточный.

Действительно, для двух последовательных фаз условно прибыльного исхода p' и p'' построение вилки дает положительную прибыль: $D > 0$. Следовательно, из (16) имеем $A(p')A(\bar{p}'') > 1$. В то же время при вилке в этих фазах на обратном исходе, используя лемму 5, получаем $A(p'')A(\bar{p}') = \frac{1}{A(p')A(\bar{p}'')} < 1$, а значит, $D < 0$. Таким образом, исход \bar{p} условно убыточный. Справедливо также обратное утверждение.

Условно прибыльный исход рынка. Рассмотрим условно прибыльный исход p в пределах одного рынка, одной биржи в различных фазах спортивного события. Чтобы не вводить параметр времени, обозначим его в этих фазах, как и выше, p' и p'' . В отсутствие липа цены на прямом исходе будут в среднем снижаться.

Лемма 6. Предположим, что цена исхода p'' снизилась по сравнению с ценой p' пропорционально величине α ($1/C(p') < \alpha < 1$), т.е. $C(p'') = \alpha C(p')$. Тогда

$$D(p', \bar{p}'') = \frac{C(p')(1-k)(1-\alpha)}{(\alpha C(p') - 1)(1-k) + 1}. \quad (17)$$

Используя (13), (16) и данное предположение, имеем

$$D(p', \bar{p}'') = \frac{A(p')A(\bar{p}'') - 1}{A(\bar{p}'') + 1} = \frac{A(p') - A(p'')}{A(p'') + 1} = \frac{C(p')(1-k)(1-\alpha)}{(\alpha C(p') - 1)(1-k) + 1}.$$

Преобразуем D к следующему виду: $D(p', \bar{p}'') = \frac{1-\alpha}{\alpha + \frac{k}{1-k} \frac{1}{C(p')}}.$

Величина $\frac{k}{1-k} \frac{1}{C(p')}$ для многих рынков достаточно мала. В таком случае

можно ограничиться простым оценочным соотношением $D(p', \bar{p}'') \approx \frac{1}{\alpha} - 1.$

При падении цены в два раза ($\alpha = 0,5$) на рынке «3А 0-0» (что происходит уже в течение первого тайма при незабитом голе) имеем прибыль почти в 100%, при падении цены в три раза ($\alpha \approx 0,33$) — 200%, при снижении цены на целый пункт ($C(p'') = C(p') - 1$, $\alpha = [C(p') - 1] / C(p')$) прирост капитала на вилке составит величину $D(p', \bar{p}'') \approx \frac{1}{C(p') - 1}$, а в случае отсутствия липа на рынке по-

лучаем всю прибыль ($\alpha = 1 / C(p')$, $D(p', \bar{p}'') = A(p')$).

Условно убыточный рынок. Рассмотрим условно убыточный рынок q в двух фазах: q' и q'' . Для условно убыточного рынка имеем $A(\bar{q}')A(q'') < 1.$

Лемма 7. Предположим, что цена рынка q'' снизилась по сравнению с ценой q' пропорционально величине β ($1 / C(q') < \beta < 1$), т.е. $C(q'') = \beta C(q')$. Тогда

$$D(\bar{q}', q'') = \frac{C(q')(\beta - 1)}{(C(q') - 1)\{(\beta C(q') - 1)(1 - k) + 1\}}. \quad (18)$$

Аналогично для доказательства используем соотношения (13) и (16):

$$\begin{aligned} D(\bar{q}', q'') &= \frac{A(\bar{q}')A(q'') - 1}{A(q'') + 1} = \frac{A(q'') - A(q')}{A(q')(A(q'') + 1)} = \\ &= \frac{C(q')(\beta - 1)}{(C(q') - 1)\{(\beta C(q') - 1)(1 - k) + 1\}}. \end{aligned}$$

Для упрощения преобразуем D к следующему виду:

$$D(\bar{q}', q'') = \frac{1 - 1/\beta}{(C(q') - 1)(1 - k) \left\{ 1 + \frac{k}{1 - k} \frac{1}{\beta C(q')} \right\}}.$$

При незначительной комиссии и высокой цене рынка это приводит к простому оценочному соотношению $D(\bar{q}', q'') = \frac{1 - 1/\beta}{C(q') - 1}.$

При падении цены на прямом рынке в два раза ($\beta = 0,5$; $C(q') = 11$) на обратном рынке имеем убыток 10%, при снижении цены на целый пункт ($C(q'') = C(q') - 1$, $\beta = [C(q') - 1] / C(q')$) убыток на вилке составит величину $D(\bar{q}', q'') \approx \frac{1}{(C(q') - 1)^2}$, а в случае отсутствия липа в матче теряем весь капитал ($\beta = 1 / C(q')$, $D(\bar{q}', q'') = -1$).

При снижении цены рынка на целый пункт прибыль на вилке может значительно превосходить убыток обратного рынка: $D(p', \bar{p}'') > D(\bar{p}', p'')$. Например, при $C(p') = 11$ имеем прибыль 10%, при этом убыток составляет всего 1%.

ДУХПОЗИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ АРБИТРАЖА

Открытие биполярных (и более) позиций позволяет во многих случаях оптимизировать инвестиции в ходе торгов. Для примера рассмотрим известную футбольным лайверам тактику «0-0 \Leftrightarrow Против Ничья».

Имеем модель торгов по двум открытым позициям на условно прибыльном рынке p и условно убыточном q по двум фазам: открытия p' и q' , а также завершения торгов p'' и q'' . Полагаем для определенности $p = \text{«ЗА 0-0»}$, $q = \text{«Против Ничья в матче»}$. Схематично торги ведутся следующим образом:

- забивается гол (возникает лип); рынок p закрывается, на рынке q строится позитивная вилка; прибыль тем выше, чем больше на этом рынке обязательств;
- гол не забивается (липа не возникает); ближе к концу игры, когда цены обоих рынков примерно сравниваются, строится вилка по позициям: прибыльная и убыточная (с суммарным нулем).

Некоторые лайверы предлагают эмпирическое соотношение для обязательств обратного рынка и прибыли прямого как 4:3 (в этом случае прибыль может составлять лишь 75% обязательств обратного рынка). Проверим это предположение.

Теорема 2. Пусть θ — коэффициент пропорциональности обязательств обратного рынка и прибыли прямого, т.е. $O(\bar{q}') = \theta \Pi(p')$, $\theta \geq 1$, а $t = C(p'') = C(q'')$ — первая общая цена, при которой на обоих рынках завершаются торги. При условии взаимной компенсации абсолютной прибыли и убытка, когда $\Delta(p', \bar{p}'') \approx -\Delta(\bar{q}', q'')$, имеем

$$\theta = \omega \left(\frac{C(p') - t}{C(q') - t} \right), \quad \omega^{-1} = \left(\frac{C(p') - 1}{C(q') - 1} \right). \quad (19)$$

Учитывая, что $\Delta(p', \bar{p}'') = D(p', \bar{p}'')O(p')$, $\Delta(\bar{q}', q'') = D(\bar{q}', q'')O(\bar{q}')$ и $\Pi(p') = A(p')O(p')$, получаем $D(p', \bar{p}'') = -\theta D(\bar{q}', q'')A(p')$. Отсюда $\theta = -\frac{D(p', \bar{p}'')}{D(\bar{q}', q'')} \frac{1}{A(p')}$.

Подставляя в выражение для θ соотношения (17) и (18), с учетом $\alpha = \frac{t}{C(p')}$,

$\beta = \frac{t}{C(q')}$ после преобразований получаем формулу (19).

Из теоремы следует: гипотеза лайверов о постоянном соотношении обязательств и прибыли не подтверждается. Математические свойства θ как функции t очевидны. Отметим, что θ зависит не от комиссии биржи k , а только от исходных цен на рынках. Для сопровождения лайв-торгов приемлем любой табличный процессор типа Excel. Работа по двухпозиционной модели требует некоторой подготовки. Так, в отсутствие липа неоднозначен момент завершения торгов. В то же время, чем выше цена t , тем большие обязательства можно резервировать на обратном рынке. Однако в таком случае увеличивается разрыв в реальных ценах: $C(p'') \gg C(q'')$, что приводит к необходимости на 5–7% снизить обязательства. В табл. 2 приведены значения коэффициента пропорциональности θ , обязательств обратного рынка, прибыли прямого рынка на основе исходных цен, обя-

зательств на рынке p и выбора точки завершения торгов t (расчеты проведены в лайв-торгах на футбольных рынках Betfair в условиях 5%-й комиссии). Полагаем, что «точка компромисса» начинается с цены $t \approx 1,5$.

Таблица 2

Исходные данные				Расчетные величины				
$C(p)$	$C(q)$	$O(p)$	t	θ	$\Pi(p)$	$\Pi(q)$	$O(q)$	$1/\theta, \%$
13,5	3,75	10	1,5	1,17	118,75	53,3	139,3	85
13,5	3,75	10	1,9	1,38	118,75	62,7	163,8	72
8,4	3,25	11	1,5	1,20	77,33	43,4	92,7	83
8,4	3,25	12	1,9	1,46	84,36	57,8	123,5	68

Предложенные методы можно использовать для планирования работы БК и бирж, создания специализированных ботов (программ), самостоятельного трейдинга РС, а также разработки различных многопозиционных моделей торгов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thorp E.O. The Kelly criterion in blackjack, sports betting, and the stock market // 10th Intern. Conf. on Gambling and Risk Taking (Montreal, June 1997). — 40 p.
2. Skiena S. Calculated bets computers, gambling, and mathematical modeling to win. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. — 232 p.
3. Марьин О.П. Математическая энциклопедия ставок на спорт. — М., 2007. — (www.livelines.ru Версия 1.1)
4. Смирнов А. Определение эффективности игровой системы методами теории вероятностей. — <http://www.stavochka.com/view.php?contentid=142>
5. Умаров Р. Математика в трейдинге. — <http://articles.mql4.com>
6. Букмекерство для начинающих. — ProBettor, Danger, 2004. — <http://subscribe.ru/catalog/sport.news.prostavki>
7. Покровский М. Спорт & деньги. — <http://bet-on.ru/>. 2005
8. Галкин С. Охота на букмекера. — <http://kill-bet.com/>. 2007
9. Miller J.R. How Professional gamblers beat the pro football pointspread. — Flying M Group, 2004. — 208 p.
10. Duncan J. Руководство по беттинг бирже. — ProBettor, 2006. — <http://www.Bet-U-Win.ru>

Поступила 28.04.2011