УДК 519.6

А.В. ШОЛОХОВ

О ПОЛУЧЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЭЛЛИПСОИДА, СОДЕРЖАЩЕГОСЯ В СУММЕ ДВУХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Ключевые слова: *гарантированное оценивание, множество достижимости, эллипсоидальная аппроксимация, внутренний экстремальный эллипсоид.*

ВВЕДЕНИЕ

Сумма по Минковскому двух эллипсоидов E_1 и E_2 в общем случае представляет собой неэллипсоидальное выпуклое множество $C = E_1 + E_2$, центр симметрии которого определяется геометрической суммой центров суммируемых эллипсоидов [1]. В задачах гарантированного оценивания [2] удобно и естественно аппроксимировать такую сумму эллипсоидом, что значительно упрощает дальнейшее использование полученного множества. Выполняются внешняя аппроксимация, когда эллипсоид содержит множество C, и внутренняя — эллипсоид содержится в C. В настоящей работе решена задача внутренней аппроксимации.

Для уменьшения потерь исходного множества, т.е. информации о возможном состоянии системы, необходимо получать максимальные по принятому критерию эллипсоиды. Далее показано, как для суммы двух эллипсоидов при внутренней эллипсоидальной аппроксимации найти эллипсоид, экстремальный по энергетической норме [3] для некоторого базисного набора векторов. При этом объем полученного эллипсоида максимален по сравнению с любыми эллипсоидами, содержащимися в C.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Даны два эллипсоида: E_1 и E_2, заданные в виде

$$E_j(a_j, Q_j) = \{x \in R^n : (x - a_j)^{\mathrm{T}} Q_j^{-1} (x - a_j) \le 1\}, \ \ j = 1, 2, \tag{1}$$

либо

$$E_j(a_j, Q_j) = \{x \in R^n : \langle x, l\rangle \le \langle a_j, l\rangle + \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_j l} \ \ \forall l \in R^n, l \ne 0\}, \ \ j = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь $a_j \in R^n$ — центр j-го эллипсоида в n-мерном евклидовом пространстве; $Q_j \in R^{n \times n}$ — симметрическая вещественная матрица j-го эллипсоида, положительно определенная в (1) или неотрицательно определенная в (2); неравенство $l \ne 0$ понимается как $\exists\, i : l_i \ne 0, i = \overline{1, n}$. Если существует базис в пространстве R^n такой, что эллипсоиды E_1 и E_2 одновременно вырождены по одному и тому же базисному вектору, т.е. проекции эллипсоидов E_1 и E_2 на этот базисный вектор равны нулю, то необходимо перейти в пространство R^k, $k < n$, в котором эллипсоиды не будут одновременно вырождены. Далее полагаем, что оба эллипсоида одновременно не вырождены по одному и тому же базисному вектору.

Эллипсоид, содержащийся в C, обозначим E_{int}. Запишем условие включения $E_{\text{int}} \subseteq C$, воспользовавшись аппаратом опорных функций [4]:

$$\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_{\text{int}} l} \le \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l} + \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_2 l} \ \ \forall l \in R^n. \tag{3}$$

Правая часть неравентсва (3) представляет сумму опорных функций эллипсоидов E_1 и E_2, а левая — опорную функцию вписанного эллипсоида E_{int}, определяемого центром $a_{\text{int}} = a_1 + a_2$ и матрицей Q_{int}.

Утверждение. Для невырожденного эллипсоида E_{int}, заданного матрицей

$$Q_{\text{int}} = GQ_1 + G(G - I_n)^{-1} Q_2, \; G^{-1} + (G - I_n) G^{-1} = I_n \tag{4}$$

(где $G \in R^{n \times n}$, $G > 0$ и в общем случае $G \neq G^{\text{T}}$, собственные числа матрицы G находятся в пределах $1 < \lambda_i^G < \infty$, $i = \overline{1, n}$; I_n — единичная матрица, а индекс n обозначает размерность главной диагонали), существует единственная матрица G такая, что равенство в (3) достигается не менее чем для $2n$ векторов $\pm l^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, касание эллипсоидом E_{int} множества C будет по крайней мере в $2n$ точках. Если оси симметрии эллипсоидов E_1 и E_2 совпадают, т.е. их матрицы коммутируют и в какой-либо координатной плоскости проекции этих эллипсоидов подобны, то сечения множества C и эллипсоида E_{int} в этой плоскости совпадут. В этом случае касание C и E_{int} произойдет по границе их сечения в данной плоскости. Если подобных проекций больше одной пары, то касание будет иметь место по поверхности множества C. Линия или поверхность касания определится всевозможными линейными комбинациями собственных векторов, соответствующих различным осям симметрии пар подобных проекций. Такой эллипсоид E_{int} будем называть экстремальным по энергетической норме [3] для некоторого базисного набора векторов $l^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$. Подставим (4) в (3), возведем для удобства в квадрат (что только усилит неравенство), продифференцируем полученное выражение по матрице G [5, 6] и приравняем к нулю. Для положительно-определенной квадратичной формы это будет соответствовать минимуму

$$\frac{l^{\text{T}} Q_{\text{int}} l}{dG} = Q_1 l l^{\text{T}} + ((G - I_n)^{-1} - G(G - I_n)^{-2}) Q_2 l l^{\text{T}} = 0. \tag{5}$$

По условию (2) $l \neq 0$, поэтому для выполнения равенства в (5) необходимо, чтобы выполнялось

$$Q_1 + ((G - I_n)^{-1} - G(G - I_n)^{-2}) Q_2 = 0. \tag{6}$$

Из (6) получим $(G - I_n)^{-1} - G(G - I_n)^{-2} = -Q_1 Q_2^{-1}$. Умножим это выражение справа на $(G - I_n)^2$. Тогда $I_n = Q_1 Q_2^{-1} (G - I_n)^2$, откуда $Q_2 Q_1^{-1} = (G - I_n)^2$ и далее

$$G = I_n + \sqrt{Q_2 Q_1^{-1}}. \tag{7}$$

Извлечение квадратного корня из в общем случае несимметрической квадратной матрицы понимается как существование такой матрицы $\sqrt{G} = V \sqrt{\Lambda} U^{\text{T}}$, что $\sqrt{G}\sqrt{G} = V \sqrt{\Lambda} U^{\text{T}} V \sqrt{\Lambda} U^{\text{T}} = V \Lambda U^{\text{T}} = G$ [7]. Здесь Λ — диагональная матрица собственных чисел матриц G и G^{T}; $U, V \in R^{n \times n}$ — матрицы собственных векторов матриц G и G^{T} соответственно такие, что $U^{\text{T}} V = V^{\text{T}} U = I_n$. Для симметрической матрицы имеем $V = U$, $V^{-1} = V^{\text{T}} = U^{-1} = U^{\text{T}}$ [7].

Подставим (7) в (3) и возведем в полученном выражении левую и правую части в квадрат:

$$l^{\text{T}} \left(\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 \right) l \leq 2 \sqrt{l^{\text{T}} Q_1 l l^{\text{T}} Q_2 l}. \tag{8}$$

При этом $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 = \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2$. Для доказательства умножим обе части данного равенства на одну и ту же матрицу, например, обратную матрице $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1$:

$$\left(\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1\right)^{-1} \sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 = \left(\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1\right)^{-1} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 =$$

$$= Q_1^{-1} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 = I_n .$$

Поскольку $Q_{\text{int}} = Q_{\text{int}}^{\text{T}}$, должно выполняться условие симметричности матриц в (8):

$$\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 = Q_1 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 = Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1} .$$

Покажем что это справедливо. Умножим два равенства: $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 = Q_1 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2}$ и $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 = Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$ слева на $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}}$ и получим $Q_2 = \sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2}$ и $Q_2 = \sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$. Приравняем правые части полученных выражений $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = \sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$ и умножим их слева на $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}}$: $Q_2 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = Q_2 Q_1^{-1} Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$. Правую часть последнего равенства представим в виде $Q_2 Q_1^{-1} Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1} = Q_2 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$. Так как $\sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = \left(\sqrt{Q_2^{-1} Q_1}\right)^{-1}$, имеем $Q_2 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} \sqrt{Q_2^{-1} Q_1} = Q_2 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2}$. Таким образом, справедливое равенство $Q_2 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = Q_2 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2}$ получено из предположения о справедливости равенства $\sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 = Q_1 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 = Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$, что и доказывает условие симметричности. Тогда неравенство (8) можно переписать следующим образом:

$$2 l^{\text{T}} \sqrt{Q_2 Q_1^{-1}} Q_1 \, l = 2 l^{\text{T}} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 l \le 2 \sqrt{l^{\text{T}} Q_1 l l^{\text{T}} Q_2 l}. \tag{9}$$

Для доказательства (9) воспользуемся неравенством Коши–Шварца: $|(u, v)| \le \| u \| \| v \|$ [8]. Обозначим $u = \sqrt{Q_1} l$, $v = \sqrt{Q_2} l$ и соответственно $| l^{\text{T}} \sqrt{Q_1} \sqrt{Q_2} l | \le \sqrt{l^{\text{T}} Q_1 l l^{\text{T}} Q_2 l}$. Выражение (9) запишем так: $l^{\text{T}} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} \times \sqrt{Q_2} \sqrt{Q_2} l \le \sqrt{l^{\text{T}} Q_1 l l^{\text{T}} Q_2 l}$. Рассмотрим векторы $\sqrt{Q_1}\, l$ и $\sqrt{Q_2} \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}\, l$. Получим скалярное произведение каждого из векторов $l^{\text{T}} Q_1 l$ и $l^{\text{T}} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}\, l$. Так как $\sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 = Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}$, выполнив замену, получим $l^{\text{T}} \sqrt{Q_1 Q_2^{-1}} Q_2 \times \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}\, l = l^{\text{T}} Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1} \sqrt{Q_2^{-1} Q_1}\, l = l^{\text{T}} Q_1 l$. Отсюда следует справедливость неравенства (9) и соответственно выражения (3) с матрицей G, выбранной согласно (7).

Выражение для матрицы Q_{int}^* максимального эллипсоида E_{int}^* будет иметь вид

$$Q_{\text{int}}^* = Q_1 + Q_2 + 2 Q_1 \sqrt{Q_1^{-1} Q_2} = Q_1 + Q_2 + 2 Q_2 \sqrt{Q_2^{-1} Q_1} . \tag{10}$$

Замечание. Из (10) следует, что одна из двух матриц Q_j может быть вырождена.

Отметим важный частный случай: если матрицы Q_1 и Q_2 коммутируют, то (10) можно преобразовать к виду

$$Q_{\text{int}}^* = Q_1 + Q_2 + 2\sqrt{Q_2 Q_1} = Q_1 + Q_2 + 2\sqrt{Q_1 Q_2}, \tag{11}$$

откуда следует, что матрицы Q_1 и Q_2 могут быть вырожденными. Для $n = 2$ это есть эллипс, вписанный в прямоугольник. Главные оси этого эллипса параллельны сторонам прямоугольника.

Задача внутренней аппроксимации решалась в [9] для критерия максимума объема вписанного эллипсоида, где было получено

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}}^* &= Q_1 + Q_2 + 2Q_2^{1/2}(Q_2^{-1/2} Q_1 Q_2^{-1/2})^{1/2} Q_2^{1/2} = \\ &= Q_1 + Q_2 + 2Q_1^{1/2}(Q_1^{-1/2} Q_2 Q_1^{-1/2})^{1/2} Q_1^{1/2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, что (10) и (12) совпадают, для чего приравняем, например, $Q_1(Q_1^{-1}Q_2)^{1/2} = Q_1^{1/2}(Q_1^{-1/2}Q_2Q_1^{-1/2})^{1/2}Q_1^{1/2}$. Умножим равенство слева на $Q_1^{-1/2}$, а справа на $Q_1^{1/2}$ и получим $Q_1^{1/2}(Q_1^{-1}Q_2)^{1/2}Q_1^{1/2} = (Q_1^{-1/2}Q_2Q_1^{-1/2})^{1/2}Q_1$. Умножим левую и правую части на соответствующие им транспонированные $Q_1^{1/2}(Q_2Q_1^{-1})^{1/2}Q_1(Q_1^{-1}Q_2)^{1/2}Q_1^{1/2} = Q_1^{1/2}Q_2Q_1^{1/2}$, откуда следует, что $Q_2 = (Q_2Q_1^{-1})^{1/2}Q_1(Q_1^{-1}Q_2)^{1/2}$. Наконец, умножим последнее равенство на $(Q_2Q_1^{-1})^{-1/2}$ слева или на $(Q_1^{-1}Q_2)^{-1/2}$ справа и получим $(Q_1Q_2^{-1})^{1/2}Q_2 = Q_1(Q_1^{-1}Q_2)^{1/2}$ или $Q_2(Q_2^{-1}Q_1)^{1/2} = (Q_2Q_1^{-1})^{1/2}Q_1$. Справедливость последних равенств доказана выше.

Таким образом, вписанный эллипсоид оказывается экстремальным и по критерию максимума объема. Очевидно, что количество вычислительных операций, необходимых для получения одинакового максимального эллипсоида с помощью выражения (10), меньше, чем при использовании выражения (12).

Для рассмотрения случая, когда допускается вырожденность обоих суммируемых эллипсоидов по разным для каждого эллипсоида векторам какого-либо базиса при некоммутативности их матриц, выполним невырожденное преобразование неравенства (3):

$$\sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_{\text{int}} l} = \sqrt{\tilde{l}^{\mathrm{T}} \tilde{\Lambda}_{\text{int}} \tilde{l}} \le \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_1 l} + \sqrt{l^{\mathrm{T}} Q_2 l} = \sqrt{\tilde{l}^{\mathrm{T}} I_n^{(p)} \tilde{l}} + \sqrt{\tilde{l}^{\mathrm{T}} \tilde{\Lambda}_2 \tilde{l}} \quad \forall l \in R^n. \tag{13}$$

Здесь $\tilde{l} = \tilde{S}_2^{\mathrm{T}} \sqrt{D_1} S_1^{\mathrm{T}} l$; D_1 — диагональная матрица собственных значений матрицы Q_1, где вместо нулевых собственных значений стоят единицы; S_1 — ортогональная матрица собственных векторов матрицы Q_1 такая, что $Q_1 = S_1^{\mathrm{T}} \Lambda_1 S_1$; $\tilde{S}_2^{\mathrm{T}}$ — ортогональная матрица собственных векторов матрицы $\tilde{Q}_2 = \sqrt{D_1^{-1}} S_1^{\mathrm{T}} Q_2 S_1 \sqrt{D_1^{-1}}$ такая, что $\tilde{Q}_2 = \tilde{S}_2 \tilde{\Lambda}_2 \tilde{S}_2^{\mathrm{T}}$; $I_n^{(p)}$ — диагональная матрица из нулей и единиц, такая, что $\operatorname{rank} I_n^{(p)} = \operatorname{rank} Q_1 = p \le n$; $\tilde{\Lambda}_2$ — диагональная матрица, такая, что $\operatorname{rank} \tilde{\Lambda}_2 = \operatorname{rank} Q_2 = m \le n.$ При этом $\operatorname{rank} \tilde{\Lambda}_{\text{int}} = n \le m + p$.

Для максимизации E_{int} на основании (13) запишем выражение для $\tilde{\Lambda}_{\text{int}}$:

$$\tilde{\Lambda}_{\text{int}} = G I_n^{(p)} + G(G - I_n)^{-1} \tilde{\Lambda}_2, \; G^{-1} + (G - I_n) G^{-1} = I_n. \tag{14}$$

Действуя аналогично максимизации на основании (3), продифференцируем (14) и получим

$$\widetilde{\Lambda}^*_{\text{int}} = I_n^{(p)} + \widetilde{\Lambda}_2 + 2I_n^{(p)}\sqrt{\widetilde{\Lambda}_2} = I_n^{(p)} + \widetilde{\Lambda}_2 + 2\sqrt{D_2},$$
$$D_2 = I_n^{(p)}\widetilde{\Lambda}_2,\ 0 \le \operatorname{rank} D_2 \le \min\{p, m\}. \tag{15}$$

Выполнив обратное преобразование, перепишем (15):

$$Q^*_{\text{int}} = Q_1 + Q_2 + 2S_1\sqrt{\Lambda_1}\,\widetilde{S}_2\sqrt{D_2}\,\widetilde{S}_2^{\mathrm{T}}\sqrt{\Lambda_1}S_1^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

Если $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, то (16) можно записать следующим образом:

$$Q^*_{\text{int}} = Q_1 + Q_2 + 2S_1\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\widetilde{Q}_2}\sqrt{\Lambda_1}S_1^{\mathrm{T}} =$$
$$= Q_1 + Q_2 + 2S_1\sqrt{\Lambda_1}\left(\sqrt{\Lambda_1^{-1}}S_1^{\mathrm{T}}Q_2S_1\sqrt{\Lambda_1^{-1}}\right)^{1/2}\sqrt{\Lambda_1}S_1^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

Покажем, что (17) равно (10). При этом должно выполняться, например, равенство $S_1\sqrt{\Lambda_1}\left(\sqrt{\Lambda_1^{-1}}S_1^{\mathrm{T}}Q_2S_1\sqrt{\Lambda_1^{-1}}\right)^{1/2}\sqrt{\Lambda_1}S_1^{\mathrm{T}} = \sqrt{Q_1Q_2^{-1}}Q_2$. Для доказательства умножим его слева на $\left(S_1\sqrt{\Lambda_1}\right)^{-1}$, а справа на $\left(\sqrt{\Lambda_1}S_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$, в результате имеем $\left(\sqrt{\Lambda_1^{-1}}S_1^{\mathrm{T}}Q_2S_1\sqrt{\Lambda_1^{-1}}\right)^{1/2} = \sqrt{\Lambda_1^{-1}}S_1^{\mathrm{T}}\sqrt{Q_1Q_2^{-1}}Q_2S_1\sqrt{\Lambda_1^{-1}}$. Возведем в квадрат обе части: $\sqrt{\Lambda_1^{-1}}S_1^{\mathrm{T}}Q_2S_1\sqrt{\Lambda_1^{-1}} = \sqrt{\Lambda_1^{-1}}S_1^{\mathrm{T}}\sqrt{Q_1Q_2^{-1}}Q_2Q_1^{-1}\sqrt{Q_1Q_2^{-1}}Q_2S_1\sqrt{\Lambda_1^{-1}}$. Представим $Q_2Q_1^{-1} = \sqrt{Q_2Q_1^{-1}}\sqrt{Q_2Q_1^{-1}} = \left(\sqrt{Q_1Q_2^{-1}}\right)^{-1}\left(\sqrt{Q_1Q_2^{-1}}\right)^{-1}$. После подстановки и сокращения матриц получим справедливое равенство и, следовательно, равенство выражений (17) и (10).

Таким образом, в зависимости от вариантов вырожденности матриц Q_1 и Q_2 и их коммутативности используем для Q^*_{int} выражения (10), (11) и (16). Возможно, на практике удобнее малым возмущением регуляризовать неотрицательно определенную матрицу [3].

Теперь выясним, как взаимно касаются внутренний эллипсоид E_{int}, полученный согласно (10), и множество C. Как известно, равенство в (9) имеет место тогда и только тогда, когда векторы коллинеарные [8], т.е. $\sqrt{Q_2}\sqrt{Q_2^{-1}Q_1}\,l = |\mu|\sqrt{Q_2}\,l$, где $\mu \ne 0$ — скаляр. Умножим скалярно левую часть на правую

$$l^{\mathrm{T}}Q_2\sqrt{Q_2^{-1}Q_1}\,l = \mu^2 l^{\mathrm{T}}Q_2 l. \tag{18}$$

Из равенства (18) следует, что при отсутствии кратных собственных чисел матрицы Q_2 существует $2n$ различных значений μ_i и соответствующих им векторов $\pm l^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют (18). Эти векторы определят $2n$ точек касания эллипсоида E^*_{int} и множества C. В случае коммутативности матриц Q_1 и Q_2 векторы $l^{(i)}$ будут ортогональными и образуют систему координат, в которой E^*_{int} и C симметричны относительно ее осей [7]. Возможно, что при этом найдутся m пар ($2 \le m \le n$) подобных собственных чисел у матриц Q_1 и Q_2, соответствующих один другому при общем для них ортогональном преобразовании. Это будет означать, что существует m-мерное подпространство ($m = 2$ — координатная плоскость), в котором проекции эллипсоидов E_1 и E_2 будут подобными.

Тогда в равенстве (18) появятся кратные собственные числа, а собственные векторы, определяющие подпространство, размерность которого равна геометрической кратности, можно выбрать как линейную комбинацию m ортогональных векторов, соответствующих собственному числу кратности m [7]. Геометрически это означает, что касание E_{int}^* и C (с учетом слагаемых Q_1 и Q_2 в равенстве (10)) произойдет по линии эллипса ($m=2$) или по замкнутой поверхности второго порядка, являющейся границей m-мерного эллипсоида — проекции на соответствующее m-мерное подпространство [10]. В случае, если $Q_2 \geq 0$, $Q_1 > 0$, получаем такие же результаты с заменой индексов. Аналогично рассуждая, можно получить подобные результаты для случая $Q_2 \geq 0$, $Q_1 \geq 0$, пользуясь формулой (16) и неравенством Коши–Шварца.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В MATLAB

При численном моделировании были приняты следующие значения: $Q_1 = \text{diag}\,\{1; 0\}$, $Q_2 = \text{diag}\,\{0; 4\}$ для моделирования, когда эллипсоиды E_1, E_2 вырождены по разным базисным осям; $Q_1 = [1\ 0;\ 0\ 0{,}111]$, $Q_2 = [0{,}278\ \ -0{,}222;\ -0{,}222\ 0{,}278]$, когда эллипсоиды невырождены.

Соответственно получены матрицы $Q_{\text{int}}^* = \text{diag}\,\{1; 4\}$ и $Q_{\text{int}}^* = [2{,}0799\ -0{,}4502;\ -0{,}4502;\ 0{,}7320]$ максимальных по площади для вписанных эллипсоидов.

На рис. 1 и 2 показаны суммируемые эллипсы E_1 и E_2, их геометрическая сумма C и внутренний аппроксимирующий эллипс E_{int}^*, соответственно.

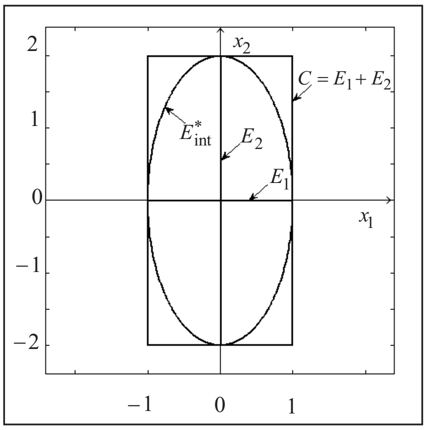

Рис. 1

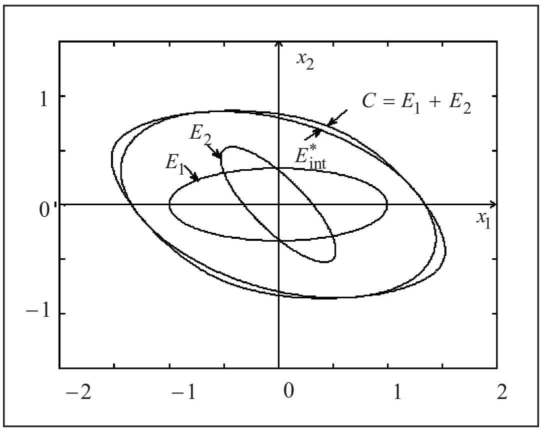

Рис. 2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вписанный в сумму двух эллипсоидов максимальный по объему эллипсоид получен более простым способом, чем в работе [9]. Такой способ получения аппроксимирующего эллипсоида особенно важен в условиях ограниченных вычислительных ресурсов. Кроме того, найдено решение для случая, когда оба суммируемых эллипсоида одновременно вырождены по разным осям общего векторного базиса, при этом известное решение [9] нельзя применить. Это позволяет использовать эллипсоидальную аппроксимацию во многих имеющихся на практике случаях, когда эллипсоиды вырождены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 416 с.

2. Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 4. — С. 3–26.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
5. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
6. Балонин Н.А. Новый курс теории управления движением. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. — 160 с.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 524 с.
8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
9. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
10. Архангельский А.В. Конечномерные векторные пространства. — М.: Изд-во МГУ, 1982. — 248 с.

Поступила 21.07.2011