УДК 519.85

Ю.Г. СТОЯН, А.М. ЧУГАЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Ключевые слова: *математическое моделирование, Ф-функция, неориентированные выпуклые многогранники, оптимизационная задача упаковки.*

ВВЕДЕНИЕ

Широкий круг важных практических задач, которые возникают в различных отраслях промышленности и науки, сводятся к моделированию взаимодействия многогранников. К таким задачам относятся, например, прикладные задачи геометрического проектирования [1], которые связаны с обработкой сложной геометрической, аналитической и логической информации с целью оптимизации размещения геометрических объектов в соответствии с заданным критерием качества, а также задачи, возникающие в робототехнике [2].

В настоящее время в классе задач размещения трехмерных геометрических объектов наименее изученными являются задачи размещения трехмерных неориентированных объектов, для которых допускаются аффинные преобразования не только трансляции, но и непрерывного поворота. Эти задачи имеют важное теоретическое и практическое значение [3]. Так, например, задача размещения неориентированных многогранников может применяться в САПР при создании прототипов промышленных изделий с использованием лазерной технологии избирательного спекания специального порошка [4]. Кроме того, данная задача применяется для трехмерного моделирования, визуального и количественного анализа структурных особенностей и механических свойств различных твердых, жидких, стекловидных материалов, гранулированных сред, гетерогенных материалов и биологических систем [5, 6]. Следует отметить, что задача упаковки многогранников также применяется при внедрении материалосберегающих технологий [7] и при определении объема багажника автомобиля в соответствии с европейскими нормами [8].

По своей постановке задачи размещения трехмерных геометрических объектов являются оптимизационными. Однако в настоящее время существует проблема применения методов локальной и глобальной оптимизации для решения задач размещения неориентированных 3D объектов. Это обусловлено отсутствием конструктивных средств математического моделирования взаимодействия этих объектов.

В настоящее время при решении задачи трехмерной упаковки ввиду сложности задач авторы традиционно используют только шары и правильные ориентированные многогранники. При этом для решения задач применяют сумму Минковского, которая может успешно использоваться для решетчатой упаковки объектов [9].

Обзору современных методов моделирования отношений включения, пересечения и касания геометрических объектов посвящена статья [10]. В настоящей работе отмечено, что одним из перспективных подходов для построения адекватных математических моделей задач размещения и упаковки является метод Ф-функций [11]. В работе [12] показано, что метод Ф-функций позволяет улучшить результаты решения задач упаковки геометрических объектов в результате применения современных методов оптимизации.

В работе [13] построены Ф-функции для базовых ориентированных 3D объектов, границы которых имеют одну из следующих форм: шар, параллелепипед, конус, цилиндр. Статья [14] посвящена построению Ф-функции для двух выпуклых ориентированных многогранников. Методы решения задачи упаковки ориентированных многогранников рассмотрены в [4, 15].

Поскольку фундаментальной основой математического моделирования оптимизационных задач упаковки неориентированных многогранников является аналитическое описание отношений их включения, пересечения и касания, то целью данной статьи является построение Ф-функции для двух неориентированных выпуклых многогранников.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы выпуклые многогранники

$$P_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : f_{ij}(X) = A_{ij}x + B_{ij}y + C_{ij}z + D_{ij} \le 0,$$

$$j \in G_i = \{1, 2, \dots, \delta_i\}\},\ i = 1, 2 .$$

Введем следующие обозначения: H_{ij} — грани P_i, $j \in G_i$; $p_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ — вершины P_i, $j \in W_i = (1, 2, \dots, w_i)$, заданные относительно собственной системы координат $O_i x_i' y_i' z_i'$ многогранника P_i; $e_{it} = [p_{it_1}, p_{it_2}]$ — ребра P_i, $t \in T_i = \{1, 2, \dots, \zeta_i\}$, $t_1, t_2 \in W_i$ (согласно формуле Эйлера $\zeta_i = w_i + \delta_i - 2$).

Многогранник P_i может быть транслирован на вектор $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ и повернут на углы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2$, вокруг осей Ox, Oy и Oz соответственно. Матрицу преобразования поворота, которая переводит точку, заданную относительно повернутой на углы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ собственной системы координат $O_i x_i' y_i' z_i'$ многогранника P_i, в точку, заданную относительно неподвижной системы координат $Oxyz$, представим в виде

$$R_i = \begin{pmatrix} g_i \\ r_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $g_{i1} = \cos\beta_i \cos\gamma_i$, $g_{i2} = -\cos\beta_i \sin\gamma_i$, $g_{i3} = \sin\beta_i$; $r_{i1} = \sin\alpha_i \sin\beta_i \cos\gamma_i + \cos\alpha_i \sin\gamma_i$, $r_{i2} = -\sin\alpha_i \sin\beta_i \sin\gamma_i + \cos\alpha_i \cos\gamma_i$, $r_{i3} = -\sin\alpha_i \cos\beta_i$; $q_{i1} = -\cos\alpha_i \sin\beta_i \cos\gamma_i + \sin\alpha_i \sin\gamma_i$, $q_{i2} = \cos\alpha_i \sin\beta_i \sin\gamma_i + \sin\alpha_i \cos\gamma_i$, $q_{i3} = \cos\alpha_i \cos\beta_i$.

Исходя из вида матрицы (1), получим матрицу преобразования, которая переводит точку из неподвижной системы координат $Oxyz$ в точку в системе координат $O_i x_i' y_i' z_i'$:

$$R_i' = \begin{pmatrix} g_i' \\ r_i' \\ q_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i1}' & g_{i2}' & g_{i3}' \\ r_{i1}' & r_{i2}' & r_{i3}' \\ q_{i1}' & q_{i2}' & q_{i3}' \end{pmatrix},$$

где $g_{i1}' = \cos\beta_i \cos\gamma_i$, $g_{i2}' = \sin\gamma_i \cos\alpha_i + \cos\gamma_i \sin\beta_i \sin\alpha_i$, $g_{i3}' = \sin\gamma_i \sin\alpha_i - \cos\gamma_i \sin\beta_i \cos\alpha_i$; $r_{i1}' = -\sin\gamma_i \cos\beta_i$, $r_{i2}' = \cos\gamma_i \cos\alpha_i - \sin\gamma_i \sin\beta_i \sin\alpha_i$, $r_{i3}' = \sin\alpha_i \cos\gamma_i + \sin\gamma_i \sin\beta_i \cos\alpha_i$; $q_{i1}' = \sin\beta_i$, $q_{i2}' = -\cos\beta_i \sin\alpha_i$, $q_{i3}' = \cos\alpha_i \cos\beta_i$.

Вектор движения P_i обозначим $u_i = (v_i, \theta_i) \in R^6$, где $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. Тогда многогранник $P_i(\theta_i), i = 1, 2$, зададим следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} f_{i1}(R_i' X^T) \le 0, \\ f_{i2}(R_i' X^T) \le 0, \\ \vdots \\ f_{i\delta_i}(R_i' X^T) \le 0. \end{cases} \quad (2)$$

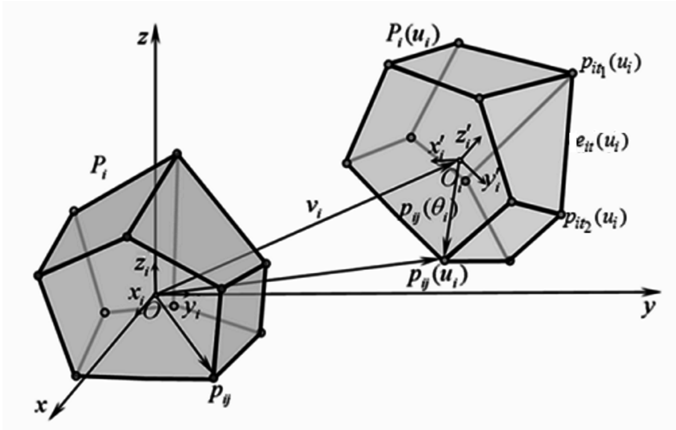

Рис. 1. Многогранник $P_i(u_i)$, полученный из многогранника P_i

Для вершин и ребер многогранника $P_i(u_i)$, $i=1,2$, зададим следующие обозначения (рис. 1): $p_{ij}(u_i)=v_i+p_{ij}(\theta_i)$, $p_{ij}(\theta_i)=R_i p_{ij}^T$, $j\in W_i$, $e_{it}(u_i)=[p_{it_1}(u_i), p_{it_2}(u_i)]$, $t\in T_i$.

Задача. Представить в аналитическом виде описание отношений включения, пересечения и касания для пары неориентированных выпуклых многогранников.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом Ф-функций [11] и построим для пары неориентированных выпуклых многогранников $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$ Ф-функцию $\Phi(u_1,u_2)$: $R^{12}\to R^1$, которая удовлетворяет следующим характеристическим свойствам:

1) $\Phi(u_1,u_2)>0$, если $\mathrm{cl}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{cl}\,P_2(u_2)=\varnothing$;

2) $\Phi(u_1,u_2)=0$, если $\mathrm{int}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{int}\,P_2(u_2)=\varnothing$ и $\mathrm{fr}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{fr}\,P_2(u_2)\neq\varnothing$;

3) $\Phi(u_1,u_2)<0$, если $\mathrm{int}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{int}\,P_2(u_2)\neq\varnothing$,

где $\mathrm{cl}\,A$, $\mathrm{fr}\,A$ и $\mathrm{int}\,A$ — соответственно замыкание, граница и внутренность множества A [16].

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ Ф-ФУНКЦИИ ДЛЯ $P_1(u_1)$ И $P_2(u_2)$

Предлагаемый метод построения Ф-функции основан фактически на моделировании касания двух произвольных неориентированных многогранников. Очевидно, что при любом касании выпуклых многогранников имеет место один или комбинация нескольких типов касания элементов их границ: вершина $P_1(u_1)$ касается грани $P_2(u_2)$; ребро $P_1(u_1)$ касается (имеет общие точки) грани $P_2(u_2)$; грань $P_1(u_1)$ касается (имеет общие точки) грани $P_2(u_2)$; вершина $P_2(u_2)$ касается грани $P_1(u_1)$; ребро $P_2(u_2)$ касается (имеет общие точки) грани $P_1(u_1)$; ребро $P_1(u_1)$ касается (имеет одну общую точку) ребра $P_2(u_2)$.

Для неориентированных выпуклых многогранников все возможные касания можно смоделировать, используя следующие три вида касаний:

1) вершина $P_2(u_2)$ касается грани $P_1(u_1)$, т.е. $p_{2j}(u_2)\in \mathrm{fr}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{fr}P_2(u_2)$, $j\in W_2$, и $\mathrm{int}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{int}\,P_2(u_2)=\varnothing$ (рис. 2, *а*);

2) вершина $P_1(u_1)$ касается грани $P_2(u_2)$, т.е. $p_{1j}(u_1)\in \mathrm{fr}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{fr}\,P_2(u_2)$, $j\in W_1$, и $\mathrm{int}\,P_1(u_1)\cap \mathrm{int}\,P_2(u_2)=\varnothing$ (рис. 2, *б*);

3) ребро $P_1(u_1)$ касается (имеет одну общую точку) ребра $P_2(u_2)$ (рис. 2, *в*).

Чтобы в аналитическом виде описать указанные три вида касания, запишем следующее условие касания многогранников. Если $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$ касаются, то существует, по крайней мере, одна пара точек $\gamma^*(\theta_1) \in \mathrm{fr}\, P_1(u_1)$ и $\gamma^{**}(\theta_2) \in \mathrm{fr}\, P_2(u_2)$, для которых выполняется равенство (рис. 3)

$$\gamma^*(\theta_1) = v_2 - v_1 + \gamma^{**}(\theta_2). \qquad (3)$$

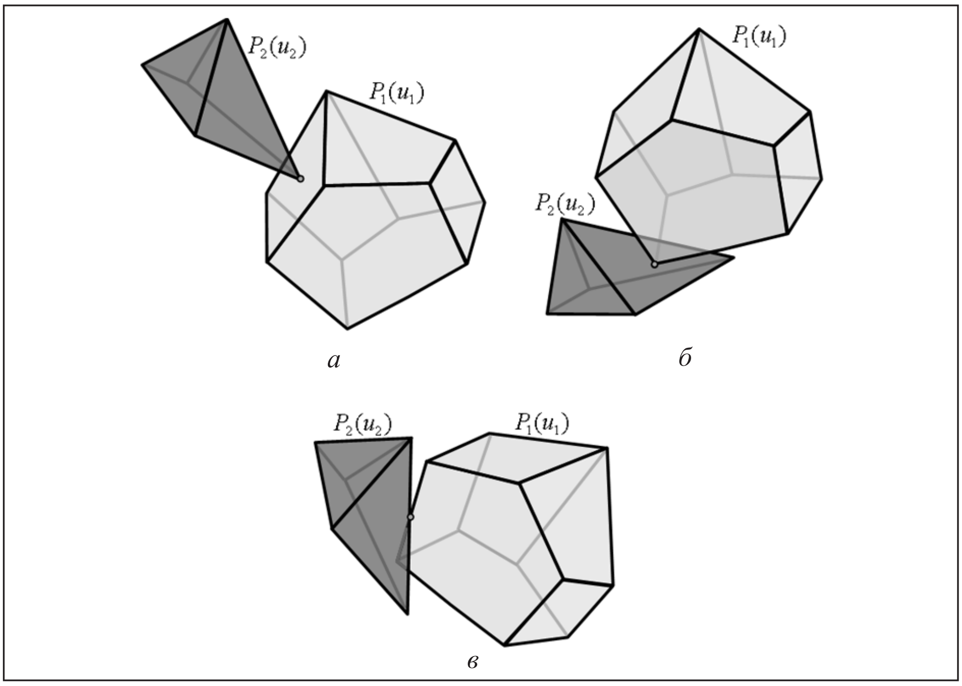

Рис. 2. Виды касания многогранников

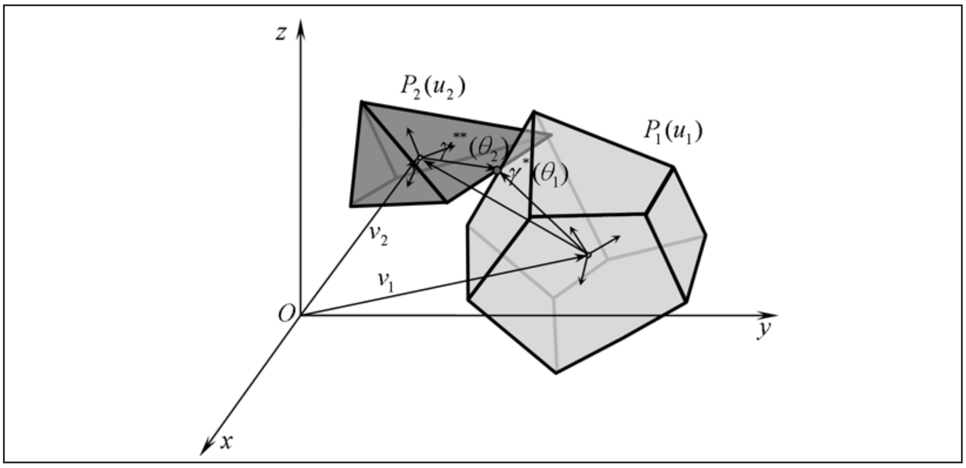

Рис. 3. Касание многогранников

Используя данное условие, выполним аналитическое описание каждого вида касания.

Первый вид касания. Пусть вершина $p_{2j}(u_2) \in P_2(u_2)$ касается грани $H_{1p} \subset P_1(u_1)$. Для простоты положим сначала, что $u_1 = 0$. Тогда, как следует из (3), плоскость, проходящая через грань $H_{1p} \subset P_1(0)$, которая определяется равенством $f_{1p}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)) = 0$, разделяет $P_1(0)$ и $P_2(u_2)$. Другими словами, если для $u_2 \in R^6$ выполняется данное равенство, то $P_1(0)$ и $P_2(u_2)$ касаются, по крайней мере, в точке $p_{2j}(u_2) \in \text{fr}\, P_1(0) \cap \text{fr}\, P_2(u_2)$. Следовательно, если для $u_2 \in R^6$ выполняется неравенство $f_{1p}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)) \geq 0$, то $p_{2j}(u_2) \notin \text{int}\, P_1(0)$. Из этого следует, что если неравенство $\min\{f_{1pj}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)),\ j \in W_2\} \geq 0$ выполняется, то $p_{2j}(u_2) \notin \text{int}\, P_1(0),\ j \in W_2$. Отсюда если выполняется неравенство

$$\max\{\min\{f_{1pj}(v_2 + p_{2j}(\theta_2)), j \in W_2\}, p \in G_1\} \geq 0, \tag{4}$$

то многогранники $P_1(0)$ и $P_2(u_2)$ не пересекаются.

Положим теперь, что $u_1 \in R^6$ также является переменной. На основании уравнения $f_{1p}(R_1' X) = 0$ из системы (2) и выражения (3) построим уравнение плоскости, проходящей через грань $H_{1p} \subset P_1(u_1)$ в следующем виде:

$$F_{1pj}(u_1, u_2) = f_{1pj}\left(R_1' (v_2 - v_1 + (R_2 p_{2j}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \right) = 0. \tag{5}$$

Очевидно, что если $F_{1pj}(u_1, u_2) \geq 0$ для $j \in W_2$, то данная плоскость разделяет $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$, т.е. $p_{2j}(u_2) \notin \text{int}\, P_1(u_1),\ j \in W_1$, и $\text{int}\, P_1(u_1) \cap \text{int}\, P_2(u_2) = \varnothing$. Исходя из выражений (4) и (5), построим функцию

$$\Psi_1(u_1, u_2) = \max\{\min\{F_{1pj}(u_1, u_2), j \in W_2\}, p \in G_1\}, \tag{6}$$

которая обладает следующим свойством: если $\Psi_1(u_1, u_2) \geq 0$, то многогранники $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$ не пересекаются.

Второй вид касания. Пусть вершина $p_{1j}(u_1) \in P_1(u_1)$ касается грани $H_{2k} \subset P_2(u_2)$. Тогда, основываясь на уравнении $f_{2k}(R_2' X) = 0$ из системы (2) и выражении (3), можно построить уравнение плоскости, проходящей через грань $H_{2k} \subset P_2(u_2)$, в виде

$$F_{2kj}(u_1, u_2) = f_{2kj}\left(R_2' (v_2 - v_1 - (R_1 p_{1j}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \right) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что если $F_{2kj}(u_1, u_2) \geq 0$ для $j \in W_1$, то данная плоскость разделяет $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$, т.е. $p_{1j}(u_1) \notin \text{int}\, P_2(u_2)$, $j \in W_1$, и $\text{int}\, P_1(u_1) \cap \text{int}\, P_2(u_2) = \varnothing$. Основываясь на выражении (7), построим функцию

$$\Psi_2(u_1, u_2) = \max\{\min\{F_{2kj}(u_1, u_2), j \in W_1\}, k \in G_2\}, \tag{8}$$

которая обладает следующим свойством: если $\Psi_2(u_1, u_2) \geq 0$, то многогранники $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$ не пересекаются.

Следует отметить, что при моделировании взаимодействия $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$ может возникнуть ситуация, когда $\Psi_i(u_1, u_2) < 0$, $i = 1, 2$, однако $\text{int}\, P_1(u_1) \cap \text{int}\, P_2(u_2) = \varnothing$. Такая ситуация может возникнуть, например, когда многогранники касаются ребрами (рис. 3, *в*).

Третий вид касания. Пусть ребро $e_{1j}(u_1) = [p_{1j_1}(u_1), p_{1j_2}(u_1)] \subset P_1(u_1)$ касается ребра $e_{2t}(u_2) = [p_{2t_1}(u_2), p_{2t_2}(u_2)] \subset P_2(u_2)$. Тогда плоскость, разделяющая многогранники, будет проходить через эти два ребра. Чтобы построить разделяющую плоскость, совместим вершины $p_{1j_1}(u_1)$ и $p_{2t_1}(u_2)$. В этом случае вектор $\eta_{jt}(\theta_1, \theta_2)$, который определяет расположение собственной системы координат $P_2(u_2)$ по отношению к собственной системе координат $P_1(u_1)$, определяется формулой $\eta_{jt}(\theta_1, \theta_2) = p_{1j_1}(\theta_1) - p_{2t_1}(\theta_2)$. Исходя из этого, вектор $\tau_{jt}(\theta_1, \theta_2)$, который определяет координаты $p_{2t_2}(\theta_2)$ по отношению к собственной системе координат $P_1(u_1)$, имеет вид $\tau_{jt}(\theta_1, \theta_2) = p_{1j_1}(\theta_1) - p_{2t_1}(\theta_2) + p_{2t_2}(\theta_2)$ (рис. 4). Тогда плоскость $E_{jt}(\theta_1, \theta_2)$, проходящая через точки $p_{1j_1}(\theta_1)$, $p_{1j_2}(\theta_1)$ и $\tau_{jt}(\theta_1, \theta_2)$, определяется уравнением

$$\Omega_{jt}(X, \theta_1, \theta_2) = (x - g_1 p_{1j_1}^T) \widetilde{A}_{jt}(\theta_1, \theta_2) + (y - r_1 p_{1j_1}^T) \widetilde{B}_{jt}(\theta_1, \theta_2) +$$

$$+ (z - q_1 p_{1j_1}^T) \widetilde{C}_{jt}(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad j \in T_1, \ t \in T_2, \tag{9}$$

где коэффициенты $\widetilde{A}_{jt}(\theta_1, \theta_2)$, $\widetilde{B}_{jt}(\theta_1, \theta_2)$ и $\widetilde{C}_{jt}(\theta_1, \theta_2)$ определяются через координаты точек $p_{1j_1}(\theta_1)$, $p_{1j_2}(\theta_1)$ и $\tau_{jt}(\theta_1, \theta_2)$.

На основании выражений (3) и (9) построим уравнение

$$\Gamma_{jt}(u_1, u_2) = \Omega_{jt}(\upsilon_2 - \upsilon_1 + p_{2t_1}(\theta_2), \theta_1, \theta_2) = 0, \ j \in T_1, \ t \in T_2. \tag{10}$$

Очевидно, что если точка $(u_1, u_2) \in R^{12}$ удовлетворяет равенству (10), то $e_{1j}(u_1)$, $e_{2t}(u_2) \subset E_{jt}$.

Пусть плоскость E_{jt} делит пространство R^3 на положительное Π_{jt}^+ и отрицательное Π_{jt}^- полупространства. Следует отметить, что функция $\Gamma_{jt}(u_1, u_2)$ используется в формировании Ф-функции в одном из случаев, когда $P_2(u_2) \subset \Pi_{jt}^+$ и $P_1(u_1) \subset \Pi_{jt}^-$ или $P_2(u_2) \subset \Pi_{jt}^-$ и $P_1(u_1) \subset \Pi_{jt}^+$.

Чтобы определить условие участия $\Gamma_{jt}(u_1, u_2)$ в формировании Ф-функции, достаточно вычислить значения уравнения (9) в вершинах $\widetilde{p}_{1j_1}^1(\theta_1)$ и $\widetilde{p}_{1j_1}^2(\theta_1)$, смежных к вершине $p_{1j_1}(\theta_1)$ ребра $e_{1j}(\theta_1)$ многогранника $P_1(u_1)$, а также в вершинах $\widetilde{p}_{2t_1}^1(\theta_2)$ и $\widetilde{p}_{2t_1}^2(\theta_2)$, смежных к вершине $p_{2t_1}(\theta_2)$ ребра $e_{2t}(\theta_2)$ многогранника $P_2(u_2)$ (рис. 5).

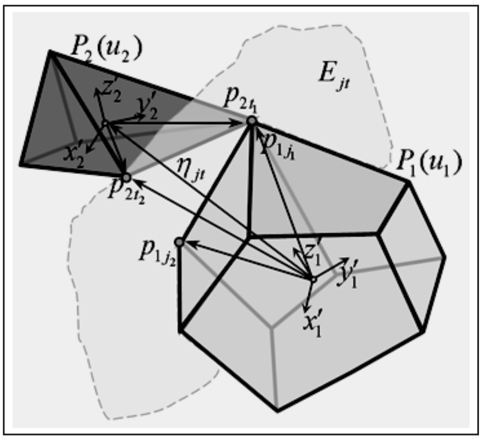

Рис. 4. Построение разделяющей плоскости для третьего вида касания

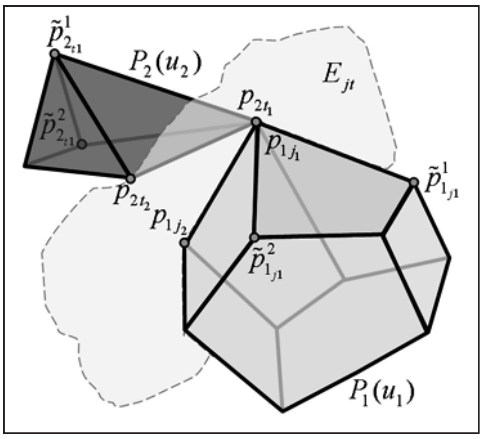

Рис. 5. Вершины, в которых проверяется условие участия $\Gamma_{jt}(u_1, u_2)$ в формировании Ф-функции

На основании изложенного построим функцию

$$F_{3jt}(u_1,u_2)=\begin{cases}\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\\ -\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0,\\ \sigma, & \text{если } \chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)<0,\end{cases} \tag{11}$$

где

$$\chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2)=\min\{-\Omega_{jt}(\tilde{p}_{1j}^i(\theta_1),\theta_1,\theta_2),\ \Omega_{jt}(\eta_{jt}+\tilde{p}_{2j}^i(\theta_2),\ \theta_1,\theta_2),\ i=1,2\},$$

$$\chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)=\min\{\Omega_{jt}(\tilde{p}_{1j}^i(\theta_1),\theta_1,\theta_2),\ -(\Omega_{jt}(\eta_{jt}+\tilde{p}_{2j}^i(\theta_2),\theta_1,\theta_2)),\ i=1,2\},$$

$$\chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)=\max\{\chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2),\chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2)\}.$$

Поскольку любая Ф-функция ограничена снизу для ограниченных геометрических объектов, то $\sigma<\min\Phi(u_1,u_2)$. Это значит, что $\Gamma_{jt}(u_1,u_2)$ принимает участие в формировании $\Phi(u_1,u_2)$ только в случае, если $\chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2)\geq 0$.

Следует отметить, что плоскость E_{jt} разделяет $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$, когда $F_{3jt}(u_1,u_2)\geq 0$.

Основываясь на выражении (11), построим функцию

$$\Psi_3(u_1,u_2)=\max\{F_{3jt}(u_1,u_2),\ j\in T_1,\ t\in T_2\}, \tag{12}$$

которая обладает следующим свойством: если $\Psi_3(u_1,u_2)\geq 0$, то многогранники $P_1(u_1)$ и $P_2(u_2)$ не пересекаются.

Поскольку рассмотренные три вида касаний позволяют описать все возможные виды касания, то на основании функций (6), (8) и (12) Ф-функция для двух неориентированных выпуклых многогранников может быть представлена следующим образом:

$$\Phi(u_1,u_2)=\max\{\Psi_i(u_1,u_2),\ i=1,2,3\}=$$
$$=\max\{\min\{F_{1pj}(u_1,u_2),\ j\in J_1\},\ p\in K_1,\ \min\{F_{2kj}(u_1,u_2),\ j\in J_2\},$$
$$k\in K_2,\ F_{3jt}(u_1,u_2),\ j\in T_1,\ t\in T_2\}. \tag{13}$$

Рассмотрим пример. Функция (13) может быть использована при построении математической модели задачи упаковки неориентированных параллелепипедов в параллелепипед для аналитического описания двух основных видов ограничений задачи:

1) попарного непересечения размещаемых параллелепипедов;

2) принадлежности каждого параллелепипеда области размещения.

Первый тип ограничения можно формализовать, используя Ф-функцию для двух неориентированных параллелепипедов:

$$P_i=\{(x,y,z,)\in R^3:-l_i\leq x\leq l_i,\ -w_i\leq y\leq w_i,-h_i\leq z\leq h_i\},\ i=1,2.$$

В этом случае функция (6) примет вид

$$\Psi_1(u_1,u_2)=\max\{\min\{F_{1pj}(u_1,u_2),\ j\in\{1,2,\ldots,8\}\},\ p\in\{1,2,\ldots,6\}\},$$

где

$$F_{11j}(u_1,u_2)=g'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)+g'_{12}(r_2p_{2j}^T+y)+g'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-l_1,$$

$$F_{12j}(u_1,u_2)=-g'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)-g'_{12}(r_2p_{2j}^T+y)-g'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-l_1,$$

$$F_{13j}(u_1,u_2)=r'_{11}(g_2p_{2j}^T+x)+r'_{12}(r_2p_{2j}^T+y)+r'_{13}(q_2p_{2j}^T+z)-w_1,$$

$$F_{14j}(u_1,u_2) = -\, r'_{11}(g_2 p_{2j}^T + x) - r'_{12}(r_2 p_{2j}^T + y) - r'_{13}(q_2 p_{2j}^T + z) - w_1,$$

$$F_{15j}(u_1,u_2) = q'_{11}(g_2 p_{2j}^T + x) + q'_{12}(r_2 p_{2j}^T + y) + q'_{13}(q_2 p_{2j}^T + z) - h_1,$$

$$F_{16j}(u_1,u_2) = -q'_{11}(g_2 p_{2j}^T + x) - q'_{12}(r_2 p_{2j}^T + y) - q'_{13}(q_2 p_{2j}^T + z) - h_1,$$

$$x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,\ z = z_2 - z_1.$$

Функция (8) примет вид

$$\Psi_2(u_1,u_2) = \max\{\min\{F_{2kj}(u_1,u_2),\ j \in \{1,2,\dots,8\}\},\ k \in \{1,2,\dots,6\}\},$$

где

$$F_{21j}(u_1,u_2) = g'_{21}(x - g_1 p_{1j}^T) + g'_{22}(y - r_1 p_{1j}^T) + g'_{23}(z - q_1 p_{1j}^T) - l_2,$$

$$F_{22j}(u_1,u_2) = -g'_{21}(x - g_1 p_{1j}^T) - g'_{22}(y - r_1 p_{1j}^T) - g'_{23}(z - q_1 p_{1j}^T) - l_2,$$

$$F_{23j}(u_1,u_2) = r'_{21}(x - g_1 p_{1j}^T) + r'_{22}(y - r_1 p_{1j}^T) + r'_{23}(z - q_1 p_{1j}^T) - w_2,$$

$$F_{24j}(u_1,u_2) = -r'_{21}(x - g_1 p_{1j}^T) - r'_{22}(y - r_1 p_{1j}^T) - r'_{23}(z - q_1 p_{1j}^T) - w_2,$$

$$F_{25j}(u_1,u_2) = q'_{31}(x - g_1 p_{1j}^T) + q'_{32}(y - r_1 p_{1j}) + q'_{33}(z - q_1 p_{1j}) - h_2,$$

$$F_{26j}(u_1,u_2) = -q'_{31}(x - g_1 p_{1j}^T) - q'_{32}(y - r_1 p_{1j}) - q'_{33}(z - q_1 p_{1j}) - h_2.$$

Функция (12) примет вид

$$\Psi_3(u_1,u_2) = \max\{F_{3jt}(u_1,u_2),\ j,t \in \{1,2,\dots,12\}\},$$

где

$$F_{3jt}(u_1,u_2) = \begin{cases} \Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{1jt}(\theta_1,\theta_2) \ge 0, \\ -\Gamma_{jt}(u_1,u_2), & \text{если } \chi_{2jt}(\theta_1,\theta_2) \ge 0, \\ \sigma, & \text{если } \chi_{3jt}(\theta_1,\theta_2) < 0, \end{cases}$$

$$\sigma = \max\{2l_i,\ 2w_i,\ 2h_i,\ i = 1,2\}.$$

Тогда Ф-функцию для двух параллелепипедов можно записать в виде

$$\Phi(u_1,u_2) = \max\{\min\{F_{1pj}(u_1,u_2), j \in (1,2,\dots,8)\}, \min\{F_{2kj}(u_1,u_2),$$
$$j \in (1,2,\dots,8)\},\ p,k \in \{1,2,\dots,6\};\qquad F_{3jt}(u_1,u_2),\ \ j,t \in \{1,2,\dots,12\}\}.$$

Второй тип ограничения можно формализовать, используя Ф-функцию для неориентированного параллелепипеда $P_i = \{(x,y,z) \in R^3 : -l_i \le x \le l_i, -w_i \le y \le w_i, -h_i \le z \le h_i\}$ и объекта $\mathrm{cl}(R^3 \setminus S)$, где $S = \{(x,y,z) \in R^3 : -l \le x \le l, -w \le y \le w, -h \le z \le h\}$ — область размещения, представленная в виде параллелепипеда. При этом полюс параллелепипеда S совпадает с началом системы координат $Oxyz$. Тогда Ф-функция для P_i и объекта $\mathrm{cl}(R^3 \setminus S)$ примет вид

$$\Phi(u_i) = \min\{F_{kj}(u_i),\ k \in \{1,2,\dots,6\},\ j \in \{1,2,\dots,8\}\},$$

где

$$F_{1j}(u_i) = -x_i - g_i p_{ij}^{\mathrm{T}} + l,\ F_{2j}(u_i) = x_i - g_i p_{ij}^{\mathrm{T}} + l,$$

$$F_{3j}(u_i) = -y_i - r_i p_{ij}^{\mathrm{T}} + w,$$

$$F_{4j}(u_i) = y_i - r_i p_{ij}^{\mathrm{T}} + w,\ F_{5j}(u_i) = -z_i - q_i p_{ij}^{\mathrm{T}} + h,$$

$$F_{6j}(u_i) = z_i - q_i p_{ij}^{\mathrm{T}} + h.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе построенной Ф-функции (13) легко можно построить Ф-функцию для пары неориентированных невыпуклых многогранников. Для построения такой Ф-функции необходимо воспользоваться методом построения Ф-функции для сложных геометрических объектов [17].

Представленная в работе Ф-функция (13) позволяет строить математические модели оптимизационных задач размещения неориентированных многогранников, в которых область допустимых решений оптимизационной задачи может быть представлена в виде объединения подобластей. При этом каждая такая подобласть описывается системой неравенств, левые части которых являются непрерывными бесконечно дифференцируемыми функциями. Это свойство дает возможность использовать современные методы оптимизации для решения прикладных оптимизационных задач упаковки неориентированных многогранников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с.
2. Mayer N., Fogel E., Halperin D. Fast and robust retrieval of Minkowski sums of rotating convex polyhedra in 3-space // Proceedings of the 14-th ACM Symposium on Solid and Physical Modeling. — Haifa, Israel, 2010. — P. 1–10.
3. Takayuki O. Approaches to 3D free-form cutting and packing problems and their applications: A survey. — Tokyo: IBM Research Laboratory, 1998. — P. 13.
4. Egeblad J., Nielsen B.K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polytopes // Computational Geometry: Theory and Applications. — 2009. — **42**, N 4. — P. 269–288.
5. Torquato S., Stillinger F.H. Jammed hard-particle packings: From Kepler to Bernal and beyond // Reviews of Modern Physics. — 2010. — **82**, N 3. — P. 2633–2672.
6. Gan M., Gopinathan N., Jia X., Williams R.A. Predicting packing characteristics of particles of arbitrary shapes // KONA. — 2004. — N 22. — P. 82–93.
7. Дорошенко В.С. 3D-технологии в литейном производстве // Винахідник і раціоналізатор. — 2009. — № 2. — С. 12–15.
8. Eisenbrand F., Funke S., Karrenbauer A., Reichel J., Schömer E. Packing a trunk — now with a twist! // Proceedings SPM 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling. — New York, USA, 2005. — P. 197–206.
9. Betke U., Henk M. Densest lattice packings of 3-polytopes // Computational Geometry. — 2000. — **16**, N 3. — P. 157–186.
10. Bennell J., Oliveira J. The geometry of nesting problems: A tutorial // European Journal of Operational Research. — 2008. — N 184. — P. 397–415.
11. Stoyan Yu.G. Ф-function and its basic properties // Докл. НАН Украины. Сер. А. — 2001. — N 8. — С. 112–117.
12. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. — 2010. — **43**, N 5. — P. 535–553.
13. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Шайтхауэр Г. Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3D объектов // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 3. — С. 19–31.
14. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Construction of a Phi-function for two convex polytopes // Applicationes Mathematicae. — 2002. — **29**, N 2. — P. 199–218.
15. Stoyan Yu., Pankratov A., Sheithauer G. Translational packing non-convex polytopes into a parallelepiped // Journal of Mechanical Engineering. — 2009. — **12**, N 3. — С. 67–76.
16. Куратовский К. Топология. — Т. 1. — М.: Мир, 1966. — 594 с.
17. Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Ф-function for complex 2D objects // 4OR. Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. — 2004. — **2**, N 1. — P. 69–84.

Поступила 06.04.2011