УДК 531.36

Л.Б. РЯШКО, И.А. БАШКИРЦЕВА

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ[1]

Ключевые слова: *инвариантные многообразия, стохастическая устойчивость, спектральный критерий.*

ВВЕДЕНИЕ

Многие явления нелинейной динамики, наблюдаемые при переходе от порядка к хаосу, часто связаны с цепью режимов бифуркаций: стационарный (точка равновесия) – периодический (предельный цикл) – квазипериодический (тор) – хаотический (странный аттрактор). Компактные инвариантные многообразия являются общей математической моделью для исследования различных динамических режимов и переходов между ними. Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого многообразия и рождением нового, более сложного, устойчивого многообразия. Анализ устойчивости соответствующих инвариантных многообразий — ключ для понимания сложного поведения нелинейных динамических систем.

Исследование компактных инвариантных многообразий динамических систем привлекает внимание многих ученых. Результаты анализа устойчивости многообразий при малых возмущениях и топологической эквивалентности двух динамических систем, совпадающих на многообразии, представлены в [1–5]. В теории случайных систем рассмотрены различные типы стохастической устойчивости. Одним из важнейших направлений анализа устойчивости является техника функций Ляпунова, широко используемая многими авторами для изучения стохастической устойчивости равновесий (см., например, [6–11]).

Метод орбитальных функций Ляпунова с использованием квазипотенциала применен в анализе устойчивости и чувствительности стохастически возмущенных предельных циклов [12, 13]. На основе этого метода построено детальное вероятностное описание стохастических аттракторов в зоне бифуркаций удвоения периода, а также проведено исследование вызванных шумом переходов [14, 15].

Цель данной работы — представить новый общий спектральный критерий экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном (ЭСК-устойчивости) для стохастически возмущенных инвариантных многообразий нелинейных систем.

Далее приведены необходимые теоретические сведения из [16, 17], введены понятие систем линейного расширения для инвариантных многообразий детерминированных систем и термин P-устойчивости.

Исследовать устойчивость путем анализа разрешимости соответствующего матричного уравнения Ляпунова весьма трудно, особенно в случаях, близких к критическим. Эффективные критерии стохастической устойчивости равновесия для линейных систем с постоянными коэффициентами получены в [18, 19] с использованием спектральной теории положительных операторов [20] для анализа ЭСК-устойчивости общих инвариантных многообразий. Найден параметрический критерий ЭСК-устойчивости. Стохастический анализ устойчивости сведен к оценке спектрального радиуса некоторого положительного оператора.

Дан подробный спектральный анализ этого оператора для важного случая многообразия единичной коразмерности. Разработанная общая теория применена при исследовании ЭСК-устойчивости стохастических предельных циклов предела и инвариантных торов. Представлены явные параметрические критерии.

[1]Работа частично поддержана АВЦП (грант 1.1099.2011) и ФЦП (грант 14.A18.21.0364).

Рассмотрим автономную нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx = f(x)dt, \;\; x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая вектор-функция. Предполагается, что система (1) имеет гладкое компактное инвариантное многообразие $M \subset \mathbf{R}^n$ [1, 2, 5]. Для некоторой окрестности U многообразия M функция имеет вид

$$\gamma(x) = \arg\min_{y \in M} ||x - y||, \;\; \Delta(x) = x - \gamma(x),$$

где $||\cdot||$ — евклидова норма, $\gamma(x)$ — ближайшая к x точка многообразия M, $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ — вектор отклонения x от M. Предполагается, что окрестность U инвариантна для (1). Функция $\gamma(x)$ в общем случае может быть многозначной. Рассматривая вопросы устойчивости, окрестность U можно считать достаточно малой. При этом функции $\gamma(x)$ и $\Delta(x)$ будут в U однозначными и гладкими.

Определение 1. Инвариантное многообразие M называется экспоненциально устойчивым (Э-устойчивым) для системы (1) в U, если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всех $t > 0$ выполняется условие $||\Delta(x(t))||^2 \leq Ke^{-lt} ||\Delta(x_0)||^2$, где $x(t)$ — решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

В классической детерминированной теории устойчивости равновесий и предельных циклов используются конструкции систем первого приближения, в качестве которых для общих инвариантных многообразий применяются линейные расширения [3, 4].

Для (1) система линейного расширения имеет вид

$$\begin{aligned} dx &= f(x)\,dt, \quad x \in M, \\ dz &= F(x)z\,dt, \quad z \in \mathbf{R}^n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $F(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$.

Для каждого $x \in M$ обозначим T_x касательное подпространство к M в x, а N_x ортогональное дополнение к T_x в $\mathbf{R}^n$. Если $\dim M = s$, то $\dim T_x = s$ и $\dim N_x = n - s$. Пусть P_x является оператором ортогонального дополнения на подпространство N_x.

Введем пространство Σ симметрических $n \times n$-матричных функций $V(x)$, определенных и достаточно гладких на M с условием

$$\forall\, x \in M, \;\; \forall\, z \in T_x \;\; V(x)z = 0\,. \tag{3}$$

Для элементов $V \in \Sigma$ вследствие (3) имеем $\operatorname{rank} V(x) \leq n - s$.

Определение 2. Матричная функция $V(x) \in \Sigma$ называется P-положительно определенной, если

$$\forall\, x \in M, \;\; \forall\, z \in \mathbf{R}^n \;\; P_x z \neq 0 \Rightarrow (z, V(x)z) > 0\,.$$

В пространстве Σ рассмотрим конус $K = \{V \in \Sigma | V(x)$ неотрицательно определенная при всех $x \in M\}$ и множество $K_P = \{V \in \Sigma | V$ — P-положительно определенная$\}$.

Определение 3. Система линейного расширения (2) является экспоненциально P-устойчивой (далее P-устойчивой), если существуют $K > 0$, $l > 0$ такие, что $||P_{x(t)} z(t)||^2 \leq Ke^{-lt} ||P_{x_0} z_0||^2$ при любом $t > 0$, где $(x(t), z(t))$ является решением системы (2) с начальным условием $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $x_0 \in M$, $z_0 \in \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим матричный оператор Ляпунова A, заданный формулой

$$A[V] = \left(f, \frac{\partial V}{\partial x} \right) + F^{\mathrm{T}} V + VF. \tag{4}$$

Замечание 1. Значения оператора $\left(f, \dfrac{\partial V}{\partial x} \right)$ для $V \in \Sigma$ в точках многообразия M полностью определяются значениями функции $V(x)$ на M. Действительно, для произвольного решения $x(t) \in M$ системы (1) имеем

$$\left(f(x(t)), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \right) = \frac{d}{dt} V(x(t)).$$

Справедлива следующая теорема из [16], которая сводит задачу экспоненциальной устойчивости многообразия к анализу проблемы разрешимости уравнения Ляпунова.

Теорема 1. Эквивалентны следующие утверждения:

— компактное инвариантное многообразие M системы (1) является Э-устойчивым;

— система (2) является P-устойчивой;

— для любого $W \in K_P$ существует $V \in K_P$, удовлетворяющий уравнению $A[V] = -W$.

Рассмотрим стохастическую устойчивость.

Стандартной моделью при анализе устойчивости детерминированной системы (1) к воздействию случайных возмущений является система стохастических уравнений Ито [8]:

$$dx = f(x)\, dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x)\, dw_r(t), \tag{5}$$

где $w_r(t)$ $(r = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $f(x)$ и $\sigma_r(x)$ — достаточно гладкие вектор-функции. Чтобы многообразие M оставалось инвариантным и для системы (5), примем

$$\sigma_r|_M = 0. \tag{6}$$

Будем считать, что окрестность U инвариантна и для стохастической системы (5).

Определение 4. Инвариантное многообразие M называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном (ЭСК-устойчивым) для системы (5) в U, если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всех $t > 0$ выполняется условие $\mathrm{E}\|\Delta(x(t))\|^2 \le Ke^{-lt}\, \mathrm{E}\|\Delta(x_0)\|^2$, где $x(t)$ — решение системы (5) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Стохастическим линейным расширением для нелинейной стохастической системы (5) с инвариантным многообразием M является

$$\begin{aligned} dx &= f(x)\, dt, && x \in M, \\ dz &= F(x) z dt + \sum_{r=1}^{m} S_r(x) z dw_r(t), && z \in \mathbf{R}^n. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $F(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$, $S_r(x) = \dfrac{\partial \sigma_r(x)}{\partial x}$.

Вследствие (6) матричные функции $S_r(x)$ сингулярны:

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, z \in T_x\ \ S_r(x) z = 0. \tag{8}$$

Определение 5. Стохастическое линейное расширение (7) называется экспоненциально P-устойчивым в среднем квадратичном (P-устойчивым), если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всех $t > 0$ выполняется условие

$$\mathrm{E}\|P_{x(t)} z(t)\|^2 \le Ke^{-lt}\, \mathrm{E}\|P_{x_0} z_0\|^2,$$

где $(x(t), z(t))$ — решение (7) с начальными условиями $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $x_0 \in M$, $z_0 \in \mathbf{R}^n$.

Для системы (7) рассмотрим оператор Ляпунова L:

$$L[V]=\left(f,\frac{\partial V}{\partial x}\right)+F^{\mathrm{T}}V+VF+\sum_{r=1}^{m}S_r^{\mathrm{T}}VS_r. \tag{9}$$

Рассмотрим теорему, устанавливающую эквивалентность ЭСК-устойчивости стохастически возмущенных многообразий и проблемы разрешимости соответствующего уравнения Ляпунова.

Теорема 2. Эквивалентны следующие утверждения:

— компактное инвариантное многообразие M системы (5) является ЭСК-устойчивым;

— система (7) является P-устойчивой;

— для любого $W\in K_P$ существует $V\in K_P$, удовлетворяющий уравнению

$$L[V]=-W. \tag{10}$$

Доказательство теоремы приведено в [17].

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Теорема 2 сводит проблему исследования стохастической устойчивости многообразия M к анализу разрешимости уравнения (10) в пространстве P-положительно определенных матриц K_P.

Исследовать устойчивость путем анализа разрешимости этого матричного уравнения Ляпунова весьма трудно, особенно в случаях, близких к критическим. Рассмотрим обобщенный вариант эффективных критериев [18, 19], использующий спектральную теорию положительных операторов [20].

Представим оператор L из (9) в виде суммы $L=A+S$, где оператор A определен в (4), а оператор S — на элементах пространства Σ равенством $S[V]=\sum_{r=1}^{m}S_r^{\mathrm{T}}VS_r$. При этом уравнение (10) можно записать

$$A[V]+S[V]=-W. \tag{11}$$

Для P-устойчивой детерминированной системы (2) в силу теоремы 1 существует обратный оператор A^{-1}, который является отрицательным по отношению к конусу K. Умножая (11) на A^{-1}, получаем

$$V-P[V]=-A^{-1}[W], \tag{12}$$

где оператор $P=-A^{-1}S$, как произведение двух положительных операторов: $-A^{-1}$ и S, также положительный.

Для пространства Σ (см. (3)) с нормой $||V||=\max_{x\in M}\sqrt{\mathrm{tr}(V^2(x))}$ конус K является нормальным и телесным.

Анализ P-устойчивости стохастической системы (7) можно свести к оценке спектрального радиуса $\rho(P)$ оператора P.

Теорема 3. Компактное инвариантное многообразие M является ЭСК-учтойчивым для стохастической системы (5) тогда и только тогда, когда многообразие M детерминированной системы (1) Э-устойчиво и выполняется неравенство

$$\rho(P)<1. \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть многообразие M стохастической системы (5) является ЭСК-устойчивым. Тогда согласно торемам 1 и 2 многообразие M детерминированной системы (1) Э-устойчиво и существует оператор A^{-1}, а для любого $W\in K_P$ существует $-A^{-1}[W]\in K_P$ и справедливо равенство (12), из которого следует

$$V - P[V] \in K_P. \tag{14}$$

Конус $K \subset \Sigma$ является нормальным и телесным. Тогда из (14) (теорема 16.7 в [20]) вытекает неравенство (13).

Достаточность. Пусть многообразие M детерминированной системы (1) является Э-устойчивым. Это гарантирует существование операторов A^{-1} и $P = -A^{-1}S$. Рассмотрим оператор $R[V] = V - P[V]$. В силу (13) существует обратный оператор $R^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k$.

Оператор R положительный. Это означает, что для любого $W \in K_P$ матрица $V = R^{-1}[-A^{-1}[W]] \in K_P$ является решением (12). Вследствие эквивалентности (10) и (12) матрица $V \in K_P$ удовлетворяет уравнению (10). Последнее означает (см. теорему 2), что многообразие M является ЭСК-устойчивым.

Замечание 2. Спектральный радиус $\rho = \rho(P) \neq 0$ определяет бифуркационное значение $\varepsilon^* = \sqrt{1/\rho}$ интенсивности $\varepsilon \geq 0$ случайных возмущений для системы

$$dx = f(x)dt + \varepsilon \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x) dw_r(t). \tag{15}$$

Многообразие M для системы (15) является ЭСК-устойчивым при всех $\varepsilon < \varepsilon^*$ и неустойчивым при $\varepsilon \geq \varepsilon^*$. Случай $\rho = 0$ означает, что система (15) ЭСК-устойчива для всех $\varepsilon \geq 0$.

Замечание 3. В случае, когда точное отыскание спектрального радиуса ρ затруднительно, представляют интерес его двусторонние оценки: $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Действительно, неравенство $\rho_2 < 1$ дает достаточное, а $\rho_1 < 1$ — необходимое условие устойчивости. При этом разность $\rho_2 - \rho_1$ может служить мерой грубости данных условий устойчивости.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА *P* ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ЕДИНИЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

Рассмотрим случай, когда многообразие M имеет размерность $\dim(M) = n-1$ ($\operatorname{codim}(M) = 1$). При этом $\dim(N_x) = 1$, $\operatorname{rank}(P_x) = 1$, $\operatorname{rank}(S_r(x)) \leq 1$ и для матриц P_x и $S_r(x)$ справедлива факторизация $P_x = p(x)p^{\mathrm{T}}(x)$, $S_r(x) = g_r(x)p^{\mathrm{T}}(x)$, $g_r(x) = S_r(x)p(x)$. Здесь $p(x)$ и $g_r(x)$ — n-вектор-функции, определенные на M, $p(x)$ является нормированным и ортогональным к M в точке x. Вследствие этой факторизации оператор S можно записать в виде

$$S[V] = \sum_{r=1}^{m} p g_r^{\mathrm{T}} V g_r p^{\mathrm{T}} = \sum_{r=1}^{m} g_r^{\mathrm{T}} V g_r p p^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

Из (16) следует

$$S[V] = g[V]P, \tag{17}$$

где $g[V] = \sum_{r=1}^{m} g_r^{\mathrm{T}} V g_r$ — скалярная функция. При этом оператор $P = -A^{-1}S$ можно записать в виде

$$P[V] = -A^{-1}[g[V]P]. \tag{18}$$

Наряду с P рассмотрим оператор B:

$$B[\varphi] = -g[A^{-1}[\varphi P]]. \tag{19}$$

Здесь $\varphi \in \Sigma^1$, при этом Σ^1 — пространство скалярных функций $\varphi(x)$, определенных и достаточно гладких на многообразии M. В пространстве Σ^1 рассмотрим конус $K^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 | \varphi(x) \geq 0\}$ и его внутренность $K_P^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 | \varphi(x) > 0\}$. Оператор B положителен на K^1.

Лемма 1. Операторы P и B имеют одинаковые спектральные радиусы: $\rho(P) = \rho(B)$.

Доказательство. Пусть $\rho = \rho(P)$ — собственное значение, соответствующее собственной функции V оператора P:

$$P[V] = \rho V. \tag{20}$$

Из (18) и (20) следуют равенства $-A^{-1}[g[V]P] = \rho V$, $-g[A^{-1}[g[V]P]] = \rho g[V]$. Для $\varphi = g[V]$ имеем $-g[A^{-1}[\varphi P]] = \rho\varphi$.

Из этого равенства и (19) следует $B[\varphi] = \rho\varphi$. Это означает, что ρ — собственное значение, а φ — собственная функция оператора B. Следовательно, $\rho(B) \geq \rho(P)$.

Докажем противоположное неравенство. Пусть $\rho = \rho(B)$ — собственное значение, а φ — собственная функция оператора B:

$$B[\varphi] = \rho\varphi. \tag{21}$$

Из (19) и (21) следует, что $-g[A^{-1}[\varphi P]] = \rho\varphi$. Возьмем $V = -A^{-1}[\varphi P]$. Тогда $P[V] = -A^{-1}S[-A^{-1}[\varphi P]] = \rho[-A^{-1}[\varphi P]] = \rho[V]$. Это означает, что ρ — собственное значение, а V — собственная функция оператора P. Следовательно, $\rho(B) \leq \rho(P)$. Таким образом, $\rho(P) = \rho(B)$. Лемма доказана.

Вследствие этой леммы в анализе ЭСК-устойчивости многообразия M в случае $\dim(M) = n-1$ оператор P в теореме 3 можно заменить на более простой оператор B. Это позволяет сделать спектральный анализ стохастической устойчивости более конструктивным.

Используя матричную функцию $V = -A^{-1}[\varphi P]$, можно записать спектральное уравнение $B[\varphi] = \rho\varphi$ в виде системы

$$g[V] = \rho\varphi,$$
$$A[V] = -\varphi P. \tag{22}$$

В случае $\dim(M) = n-1$ матрица $V(x)$ имеет следующую факторизацию: $V(x) = \mu(x)P_x$, где $\mu(x)$ — скалярная функция. Для μ и ρ из (22) следует

$$\rho A[\mu P] + \mu g[P]P = 0. \tag{23}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Пусть инвариантное многообразие M — предельный цикл, соответствующий T-периодическому решению $\xi(t)$ системы (1). Рассмотрим функции

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \; S_r(t) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\xi(t)),$$
$$V(t) = V(\xi(t)), \; P(t) = P_{\xi(t)}, \; p(t) = p(\xi(t)),$$

заданные на $[0, T]$. В этом случае Σ является пространством T-периодических симметрических $n \times n$-матриц $V(t)$ с условием сингулярности $V(t)f(\xi(t)) = 0$.

Для $n = 2$ анализ ЭСК-устойчивости предельного цикла M можно провести на основе теоремы 3 и леммы 1. В этом случае $V(t) = \mu(t)P(t)$. Используя замечание 1, можно переписать спектральное уравнение (23) в виде

$$\rho[\dot{\mu}P + \mu\dot{P} + \mu(F^{\mathrm{T}}P + PF)] + \mu\beta P = 0, \tag{24}$$

где $\beta = g(P)$. Умножая (24) на p^{T} слева и на p справа и принимая во внимание тождества $p^{\mathrm{T}}Pp \equiv 1$, $p^{\mathrm{T}}\dot{P}p \equiv 0$, получаем уравнение

$$\rho(\dot{\mu} + \alpha\mu) + \beta\mu = 0, \tag{25}$$

где $\alpha = p^{\mathrm{T}}(F^{\mathrm{T}} + F)p$. Поделив уравнение (25) на $\mu \neq 0$ и проинтегрировав от $t = 0$ до $t = T$, получим $\rho = -\dfrac{<\beta>}{<\alpha>}$. Здесь $<\varphi> = \int_0^T \varphi(t)dt$. Неравенство

$$<\alpha> < 0 \tag{26}$$

является необходимым и достаточным условием Э-устойчивости предельного цикла M для детерминированной системы (1). Вследствие равенства $<\alpha> = 2 < \mathrm{tr}F >$ условие (26) эквивалентно хорошо известному критерию Пуанкаре $\lambda = \dfrac{1}{T}\int_0^T \mathrm{tr}F(t)dt < 0$ для $n = 2$. Здесь λ — ляпуновская экспонента. Для двухмерного случая имеем $\beta(t) = \mathrm{tr}\left(\sum_{r=1}^{m} S_r(t)S_r^{\mathrm{T}}(t)\right)$.

Таким образом, неравенство $\rho(P) < 1$ из теоремы 3 можно переписать в виде

$$<\alpha + \beta> = \int_0^T \mathrm{tr}[2F(t) + \sum_{r=1}^{m} S_r(t)S_r^{\mathrm{T}}(t)]dt < 0.$$

Этот критерий является естественным обобщением классического критерия Пуанкаре для стохастического случая.

УСТОЙЧИВОСТЬ 2-ТОРОВ

Пусть инвариантным многообразием M системы (1) для $n = 3$ является двухмерная тороидальная поверхность. Рассмотрим следующую параметризацию.

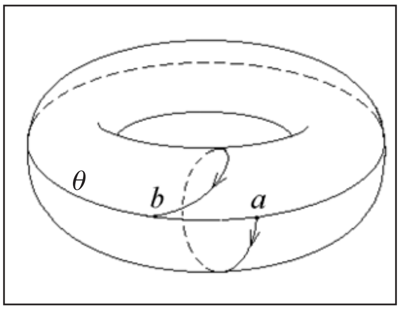

Рис. 1

Пусть на M (рис. 1) лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая θ (экватор), задаваемая функцией $\theta(s)$ на интервале $0 \le s \le 1$ с условием $\theta(0) = \theta(1)$, $a = x(0, s) = \theta(s)$ — начальная точка решения $x(t, s)$, $b = x(T(x), s) = \theta(\tau(s))$ — точка первого возвращения решения $x(t, s)$ на кривую θ. Из каждой точки $\theta(s)$ кривой θ, как начальной, имеем решение $x(t, s)$ системы (1) с условием $x(0, s) = \theta(s)$. Предполагается, что траектория $x(t, s)$, обойдя вокруг тора M, через некоторое время вновь пересечет кривую θ. Пусть $T(s) = \min\{t > 0 \mid x(t, s) \in \theta\}$ — момент первого возвращения траектории $x(t, s)$ на кривую θ, при этом $x(T(s), s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ — точка интервала $[0, 1)$, при которой $\theta(\tau(s)) = x(T(s), s)$. Здесь $\tau(s)$ — функция последования сечений Пуанкаре кривой θ фазовыми траекториями системы (1).

Предполагается, что фазовые траектории семейства решений $x(t, s)$ системы (1) полностью покрывают M. При этом тороидальная поверхность может состоять как из замкнутых фазовых траекторий (циклов) и траекторий, к ним сходящихся, так и из семейства незамкнутых траекторий, лежащих всюду плотно на M (квазипериодический случай). Функция $x(t, s)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками 2-тора M и точками множества $D=\{(t,s)\,|\,0\le t< T(s),\, 0\le s<1\}$. Вектор-функции $\dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t}, \dfrac{\partial x(t,s)}{\partial s}$ являются линейно независимыми. Для каждой точки $\gamma\in M$ можно найти $t=t(\gamma)$, $s=s(\gamma)$ такую, что $x(t,s)=\gamma$.

Используя параметризацию 2-тора M, связанную с семейством решений $x(t,s)$, введем функции

$$F(t,s)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)),\ S_r(t,s)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial x}(x(t,s)),$$

$$V(t,s)=V(x(t,s)),\quad P(t,s)=P(x(t,s)),\quad p(t,s)=p(x(t,s)),$$

определенные на D. Равенства $x(t,s+1)=x(t,s)$, $x(T(s)+t,s)=x(t,\tau(s))$ позволяют распространить эти функции на всю плоскость $\Pi=\{(t,s)|-\infty< t<+\infty, -\infty< s<+\infty\}$.

В рассматриваемом случае $V(t,s)=\mu(t,s)P(t,s)$. Используя замечание 1, можно переписать спектральное уравнение (23) в виде

$$\rho\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}P+\mu\frac{\partial P}{\partial t}+\mu(F^{\mathrm{T}}P+PF)\right]+\mu\beta P=0, \tag{27}$$

где

$$\beta(t,s)=p^{\mathrm{T}}(t,s)\left(\sum_{r=1}^{m}S_r^{\mathrm{T}}(t,s)P(t,s)S_r(t,s)\right)p(t,s)\,.$$

Умножая (27) на p^{T} слева и на p справа с учетом $p^{\mathrm{T}}Pp\equiv1$, $p^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial P}{\partial t}p\equiv0$, получаем уравнение

$$\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}+\alpha\mu\right)+\beta\mu=0\,, \tag{28}$$

где $\alpha(t,s)=p^{\mathrm{T}}(t,s)(F^{\mathrm{T}}(t,s)+F(t,s))\,p(t,s)$.

Пусть $<\varphi>=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\varphi(t)dt.$

Разделив уравнение (28) на $\mu\ne0$ и использовав равенство

$$<\frac{\partial\mu}{\partial t}/\,\mu>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial\mu}{\partial t}/\,\mu dt=0,$$

получим явную формулу $\rho=-\dfrac{<\beta>}{<\alpha>}$. После усреднения по t значение ρ зависит от $s{:}\,\rho=\rho_s$. Следовательно, $\rho(P)=\max\limits_{s}\left\{\dfrac{<\beta>}{<\alpha>}\right\}$.

Неравенство $\max\limits_{s}<\alpha>\,<\,0$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости 2-тора M для детерминированной системы (1).

Критерий $\rho(P)<1$ из теоремы 3 можно записать в виде

$$\max_s<\alpha+\beta>=\max_s\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{tr}[2F(t,s)+\sum_{r=1}^{m}S_r(t,s)S_r^{\mathrm{T}}(t,s)]dt<0.$$

Полученное неравенство является необходимым и достаточным условием ЭСК-устойчивости 2-тора M для стохастической системы (2) при $n=3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема анализа экспоненциальной устойчивости многообразия сведена к исследованию разрешимости уравнения Ляпунова. Однако исследование разрешимости напрямую весьма трудоемко, особенно в случаях, близких к критическим. Основным результатом настоящей работы является спектральный алгебраический критерий ЭСК-устойчивости общих инвариантных многообразий, полученный с использованием теории положительных операторов. Для важного случая многообразия единичной коразмерности проведен подробный спектральный анализ. Разработанная общая теория применена к исследованию ЭСК-устойчивости стохастических предельных циклов предела и инвариантных торов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 303 с.
2. Wiggins S. Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems. — Berlin: Springer-Verlag, 1994. — 193 p.
3. Kirchgaber U., Palmer K.J. Geometry in the neighborhood of invariant manifolds of maps and flows and linearization. — New York: Longman, 1990. — 221 p.
4. Bronstein I.U., Kopanskii A.Ya. Smooth invariant manifolds and normal forms. — Singapore: World Sci., 1994. — 203 p.
5. Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univer. Math. J. — 1971. — N 2. — P. 193–226.
6. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. — 1960. — **24**. — Вып. 5. — С. 809–823.
7. Kushner H.J. Stochastic stability and control. — New York: Acad. press, 1967. — 161 p.
8. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
9. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
10. Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations. — Marcel: Dekker, 1994. — 307 p.
11. Arnold L. Random Dynamical Systems. — Berlin: Springer, 1998. — 374 p.
12. Ряшко Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Прикл. математика и механика. — 1996. — **60**. — Вып. 4. — С. 582–594.
13. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Math. and Comput. in Simulation. — 2004. — N 66. — P. 55–67.
14. Ryashko L., Bashkirtseva I., Gubkin A., Stikhin P. Confidence tori in the analysis of stochastic 3D-cycles // Math. and Comput. in Simulation. — 2009. — N 80. — P. 256–269.
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Constructive analysis of noise-induced transitions for coexisting periodic attractors of Lorenz model // Phys. Rev. E. — 2009. – N 79. — P. 041106–041114.
16. Ryashko L.B., Shnol E.E. On exponentially attracting invariant manifolds of ODEs // Nonlinearity. — 2003. — N 16. — P. 147–160.
17. Ryashko L.B. Exponential mean square stability of stochastically forced invariant manifolds for nonlinear SDE's // Stochastics and Dynamics. — 2007. — N 7. — P. 389–401.
18. Riashko L.B. Stabilization of linear stochastic systems with state and control dependent perturbations // J. Appl. Math. Mech. — 1979. — N 43. — P. 655–663.
19. Riashko L.B. Stabilization of linear systems with multiplicative perturbations and incomplete information // J. Appl. Math. Mech. — 1981. — N 45. — P. 581–587.
20. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

Поступила 07.11.2011