УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Е.В. ОЛЬХОВСКАЯ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИГРОВОГО ТИПА НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Ключевые слова: *евклидова комбинаторная оптимизация, задача комбинаторной оптимизации игрового типа, итерационный метод, сходимость метода.*

В последние десятилетия наблюдается активное развитие теории и методов дискретной и комбинаторной оптимизации [1–6], в частности евклидовой [7–14]. Много задач, которые возникают в различных областях, описываются и решаются с помощью комбинаторных моделей [2, 5–14]. К ним относятся задачи игрового типа с ограничениями, которые определены комбинаторными условиями. Для решения этого класса задач разработаны итерационные алгоритмы [15, 21]. Численные эксперименты показали возможную сходимость метода. В настоящей статье предлагается доказательство сходимости итерационного метода решения комбинаторных оптимизационных задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В работе [21] рассмотрена задача промышленного производства с двумя игроками, построена ее математическая модель. Изложим математическую интерпретацию этой задачи. Введем необходимые обозначения. Пусть P_i^x — элемент множества $P^x=(P_1^x, P_2^x, \dots, P_M^x)$ из M действительных чисел, удовлетворяющий неравенству $0 \le P_i^x \le 1$, $i \in J_M=\{1,2,\dots,M\}$, где J_M — множество из M первых натуральных чисел, $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ — вектор, элементы которого являются размещениями из M элементов, т.е. $x_i \in P^x$, а $X=(x_1,x_2,\dots,x_m) \in$ $\in E_M^m(P^x)$, где $E_M^m(P^x)$ — множество m размещений элементов множества P^x [8]. В математической модели из [21] для X выполняются также условия $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$; $\exists P_j^x \in P^x$; $x_m=P_j^x$. Далее вектор первых $m-1$ координат вектора X обозначим как $\overline{X}$: $\overline{X}=(x_1,x_2,\dots,x_{m-1})$, тогда $\overline{X}=(x_1,x_2,\dots,x_{m-1}) \in E_M^{m-1}(P^x)$.

Игра состоит в том, что первый игрок может выбрать вектор $X=(x_1,x_2,\dots,x_m) \in E_M^m(P^x)$, а второй $j \in J_n$; при этом первый игрок платит второму платежи $a_{1j},\dots,a_{mj}$ с вероятностями $x_1,\dots,x_m$ соответственно, где a_{ij} — некоторые действительные числа $\forall i \in J_m$; $j \in J_n$.

Обозначим A' матрицу, элемент a'_{ij} которой является элементом платежа первого игрока второму. Платеж первого игрока второму (при выборе ими стратегий $X \in E_M^m(P^x)$ и $j \in J_n$ соответственно) определится функцией $F(X,j)=\sum_{i=1}^{m} a'_{ij} x_i$. Далее под платежной функцией понимаем функцию $F(X,j)$.

Пусть $\alpha = \min\limits_{\overline{X} \in E_M^{m-1}} \max\limits_{Y \in S_n} F(X, j)$ — нижняя цена игры, а $\beta = \max\limits_{Y \in S_n} \min\limits_{\overline{X} \in E_M^{m-1}} F(X, j)$ — соответственно верхняя цена игры.

Изложим эту задачу в другом аспекте.

Рассматривается матричная игра двух игроков с нулевой суммой, причем на стратегии одного из игроков накладываются ограничения, которые определены m размещениями, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_M^m(P^x)$ — вероятность применения чистых стратегий, причем $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$. Игроки делают хода попеременно. Первый игрок выбирает размещение $X_i \in E_M^{m-1}(P^x)$, второй — $j \in J_n$ (независимо от первого). Рассмотрим платежную матрицу $A' = (a'_{ij})$ размера $m \times n$. При этом считается, что задано множество векторов P^x с M элементами, $|P^x| = M$, из которого формируется множество $E_M^{m-1}(P^x)$ размещений $\overline{X} = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in E_M^{m-1}(P^x)$ и $x_m = 1 - \sum\limits_{i=1}^{m-1} x_i \in P^x$.

Составим новую платежную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $k \times n$, где $k = \dfrac{M!}{(M-m)!}$. Пусть платеж a_{ij} в данной матрице определяется так: $a_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} \quad \forall i \in J_k, \ \forall j \in J_n$, где i — номер соответствующего вектора $X'_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$, а $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i,m-1})$ — это размещение из элементов множества $E_M^{m-1}(P^x)$.

Игра с матрицей A — это обычная (классическая) матричная игра двух игроков с нулевой суммой. Чистая стратегия $i \in J_k$ первого игрока соответствует его выбору в игре с матрицей A' размещения $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i,m-1}) \in E_M^{m-1}(P^x)$.

Второй игрок считает, что получит не меньше цены $\max\limits_{j \in J_n} \min\limits_{X_i \in E_M^{m-1}(P^x)} a_{ij}$; а первый игрок может помешать ему получить больше цены $\min\limits_{X_i \in E_M^{m-1}(P^x)} \max\limits_{j \in J_n} a_{ij}$. В этом случае, когда

$$\max_{j \in J_n} \min_{X_i \in E_M^{m-1}(P^x)} a_{ij} = \min_{X_i \in E_M^{m-1}(P^x)} \max_{j \in J_n} a_{ij} = v, \tag{1}$$

второй игрок должен осознать, что он может получить максимум минимального выигрыша и его противник противостоит в получении большего. Поэтому числа i^*, j^*, которые определяют равенство (1), можно назвать оптимальными решениями игроков. При этом выбор i^* первым игроком означает, что выбирается $X_{i^*} \in E_M^{m-1}(P^x)$.

Итак, описанная матричная игра — это задача поиска такого номера i^* размещения X_{i^*} и такой чистой стратегии второго игрока — номера j^* столбца матрицы A' (или A), при которых выполняется равенство (1). При этом назовем $v = a_{i^* j^*}$ ценой игры; X_{i^*}, j^* — оптимальными стратегиями первого и второго игроков соответственно.

Запишем математическую модель этой задачи [21].

Задача 1. Найти оптимальные стратегии игроков X^* и j^*:

$$X^* = \arg F_x(X^*), \text{ где } F_x(X^*) = \min_{\bar{X} \in E_M^{m-1}(P^x)} F_x(\bar{X}),\ F_x(\bar{X}) = \max_{j \in J_n} F(X, j);$$

$$j^* = \arg F_y(j^*), \text{ где } F(j^*) = \max_{j \in J_n} F_y(j),\ F_y(j) = \min_{\bar{X} \in E_M^{m-1}(P^x)} F(X, j),$$

при ограничениях

- $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) \in E_M^{m-1}(P^x)$; $X = (x_1, \ldots x_m)$: $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1; x_m \in P^x$;
- вектор $P^x = (P_1^x, P_2^x, \ldots, P_M^x)$ удовлетворяет условиям $P_i^x \geq 0\ \forall i \in J_M$.

Здесь $F(X, j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij} x_i$, a_{ij} $(\forall i \in J_m, \forall j \in J_n)$ — заданные действительные числа.

Эту модель назовем задачей комбинаторной оптимизации игрового типа на множестве размещений (ЗКОИТР). В ней комбинаторные ограничения накладываются на стратегии первого игрока. Для выполнения (1) необходимо и достаточно существования седловой точки (X_i, j^*) платежной функции $F(X, j)$ [23].

Иными словами, если не выполняется (1), то седловая точка в ЗКОИТР отсутствует. Будем считать, что в этой ситуации игроки не имеют оптимальных чистых стратегий, т.е. нельзя выбирать постоянно одно и то же размещение первым игроком, а вторым игроком — одну и ту же чистую стратегию для получения выигрыша (проигрыша) v.

С учетом этого введем понятие смешанных стратегий для такой ситуации. Обозначим

$$S_k = \left\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_k),\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \right\};$$

$$S_n = \left\{ q = (q_1, \ldots, q_n),\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0 \right\}.$$

Смешанной стратегией первого игрока является элемент $p \in S_k$, смешанной стратегией второго игрока — элемент $q \in S_n$.

Если первый игрок применяет свою смешанную стратегию $p = (p_1, \ldots, p_k)$, а второй — $q = (q_1, \ldots, q_n)$, то платой первого игрока второму игроку будет величина $F(X, Y)$, которая является математическим ожиданием случайной величины, принимающей значение a_{ij} $\forall i \in J_k$, $\forall j \in J_n$:

$$F(P, Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j, \tag{2}$$

где произведение $p_i q_j$ — вероятность случайного события, которое состоит в одновременном наступлении случайного события X_i для первого игрока и j — для второго игрока.

Первый игрок может обеспечить себе проигрыш не больше $\min_{p \in S_k} \max_{q \in S_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$, а второй игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\max_{p \in S_k} \min_{q \in S_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$. Если (P^*, Q^*) — седловая точка функции

$F(P,Q)$, которая определяется в (2), то P^*, Q^* называют оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков соответственно. В этом случае (см. [22]) значение платежной функции в седловой точке определяется как $F(P^*, Q^*) = \max\limits_{j \in J_n} \min\limits_{i \in J_k} F(P,Q) = \min\limits_{i \in J_k} \max\limits_{j \in J_n} F(P,Q)$. При этом ЗКОИТР имеет решение в смешанных стратегиях, а $F(P^*, Q^*)$ является ценой игры.

Поиск седловой точки функции (2) связан, с одной стороны, с решением пары двойственных задач линейного программирования, а с другой — с решением одной задачи линейного программирования и одной задачи комбинаторной оптимизации.

Отметим некоторые необходимые факты из теории игр [22].

Пусть p_i — вероятность выбора первым игроком i-й строки матрицы A, а q_j — вероятность выбора вторым игроком j-го столбца, где $p_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, $q_j \ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$. Математическое ожидание платежа первого игрока равно $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$.

Поскольку $\min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \le \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \le \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$, то получим

$$\min_{j} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \le \max_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j . \tag{3}$$

Основная теорема теории игр [22, 23] утверждает, что при некоторых наборах вероятностей $P^* = (p_1, \ldots, p_m)$ и $Q^* = (q_1, \ldots, q_n)$ неравенство (3) и неравенство $\min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \le v \le \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ выполняются как равенства, а векторы $(P^*; Q^*)$ являются оптимальными стратегиями в матричной игре. Заметим, что значение v цены игры в терминах матрицы A' имеет вид $v = \min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{tj} x_{it} p_i = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a'_{tj} x_{it} q_j$.

Для ЗКОИТР разработан приближенный итерационный метод решения [21]. Этот метод основан на тех же идеях, что и метод Брауна–Робинсон [24], который используется в классической теории матричных игр. Проведенные численные эксперименты [21] дают возможность предполагать сходимость итерационного метода. Докажем, что сходимость имеет место.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ МЕТОДА

Перейдем непосредственно к теоретическому обоснованию сходимости итерационного метода, при этом рассмотрим несколько лемм и одну теорему.

Обозначим B'_j вектор стратегии $j \in J_n$ второго игрока — столбец матрицы A'. Пусть $B'_j X$ — вектор, состоящий из поэлементных произведений элементов X и B'_j, где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_M^m(P^x)$. Строка A'_i — проигрыши первого игрока для его чистой стратегии i, $i \in J_m$; N — количество сделанных шагов в итеративном методе. Пусть $SUM_1(N)$ — вектор в последовательности

$\{SUM_1(0), SUM_1(1), \ldots, SUM_1(N), \ldots\}$. Обозначим его j-ю координату $SUM_{1_j}(N)$ и $N\bar{v} = \max_j SUM_{L_j}(N)$, $N\underline{v} = \min_j SUM_{L_j}(N)$, где $N\bar{v}$, $N\underline{v}$ — максимальный накопленный выигрыш и минимальный накопленный проигрыш соответственно; SUM_R и SUM_L — накопленные суммы скалярных произведений соответственно в правой и левой частях таблицы метода из работы [21].

С учетом этих обозначений перепишем (3)

$$\min_j \sum_{i=1}^{k} A'_i p_i \le \max_i \sum_{j=1}^{n} B'_j q_j , \tag{4}$$

где $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $q_j \ge 0$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Пусть a — вектор, а $\min a$ и $\max a$ — минимум и максимум координат вектора a соответственно.

Определение. Система (SUM_R, SUM_L), которая состоит из последовательности m-мерных векторов $SUM_R(0), SUM_R(1), \ldots$ и n-мерных векторов $SUM_L(0), SUM_L(1), \ldots$, называется векторной системой (SUM_R, SUM_L) для матрицы A', если выполняются следующие условия.

1. Векторы $SUM_L(0)$, $SUM_R(0)$ — нулевые, т.е. $SUM_L(0) = (0, \ldots, 0)$, $SUM_R(0) = (0, \ldots, 0)$. Тогда выполняется условие

$$\min SUM_R(0) = \max SUM_L(0) = 0 . \tag{5}$$

2. Пусть

$$SUM_R(N+1) = SUM_R(N) + A'_i, \; SUM_L(N+1) = SUM_L(N) + B'_j, \tag{6}$$

где i, j удовлетворяют соотношению

$$SUM_{L_i}(N) = \max_j SUM_L(N), \; SUM_{R_j}(N) = \max_i SUM_R(N) . \tag{7}$$

Замечание 1. При реализации итерационного алгоритма полученная система (SUM_R, SUM_L) удовлетворяет описанным выше условиям 1 и 2 из определения.

Для каждого N (N — число итераций метода) выполняется неравенство

$$\frac{\min SUM_R(N)}{N} \le v \le \frac{\max SUM_L(N)}{N} . \tag{8}$$

Решение игры получаем при $N \to \infty$. Покажем, что границы левой и правой частей (8) равны. Следующая теорема устанавливает этот факт.

Теорема. Если в процессе работы алгоритма итерационного метода для решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях получена векторная система (SUM_R, SUM_L) для матрицы A', то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\min SUM_R(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\max SUM_L(N)}{N} = v. \tag{9}$$

Доказательство теоремы рассмотрим в виде последовательности доказательств пяти лемм.

Лемма 1. Если U, V — заданные функции, то выполняются следующие неравенства:

$$\max(U+V) \le \max(U) + \max(V) ; \tag{10}$$

$$\min(U+V) \ge \min(U) + \min(V) ; \tag{11}$$

$$\max(U+V) \geq \min(U)+\max(V); \tag{12}$$

$$\min(U+V) \leq \max(U)+\min(V). \tag{13}$$

Доказательство свойств (10)–(13) основано на свойствах функций min и max.

В следующей лемме используется определение нижней границы последовательности, которую будем обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$, и верхней границы последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ [25].

Лемма 2. Если (SUM_L, SUM_R) — векторная система для матрицы A', то

$$\lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \geq 0 .$$

Доказательство. Обозначим N_j количество реализаций j-й стратегии, тогда $q_j = \dfrac{N_j}{N}$, отсюда $N_j = q_j N$.

Из (7) имеем

$$SUM_L(N) = SUM_L(0) + \sum_{j=1}^{n} N_j B'_j = SUM_L(0) + \sum_{j=1}^{n} q_j NA' = SUM_L(0) + N \sum_{j=1}^{n} q_j A',$$

где $q_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} q_j = 1$, т.е. имеем

$$SUM_L(N) = SUM_L(0) + N \sum_{j=1}^{n} q_j A' . \tag{14}$$

Аналогично $p_i = \dfrac{N_i}{N}$, $N_i = p_i t$. Из (6) имеем

$$SUM_R(N) = SUM_R(0) + N \sum_{i=1}^{m} p_i A', \tag{15}$$

где $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Применим к формуле (14) свойства (12). Тогда

$$\max SUM_L(N) \geq \min SUM_L(0) + N \max \sum_{j=1}^{n} q_j A.$$

Поскольку $v = \min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$, то имеем

$$\max SUM_L(N) \geq \min SUM_L(0) + Nv . \tag{16}$$

Применим к (15) неравенство (11), получим $\min SUM_R(N) \geq \min SUM_R(0) +$ $+ N \min \sum\limits_{i=1}^{m} p_i A$, т.е.

$$\min SUM_R(N) \geq \min SUM_R(0) + Nv$$

или

$$-\min SUM_R(N) \geq -\min SUM_R(0) - Nv . \tag{17}$$

Суммировав (16) и (17), получим

$$\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N) \geq \min SUM_L(0) - \min SUM_R(0) .$$

Поскольку $\max SUM_L(0) - \min SUM_R(0) = 0$, то

$$\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N) \geq 0 . \tag{18}$$

Разделив правую и левую части из (18) на $N > 0$, получим

$$\frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \geq \frac{0}{N}.$$

Зададим нижнюю границу [26] данного неравенства:

$$\lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \geq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{0}{N}.$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} \inf \frac{0}{N} = 0$, то

$$\lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \geq 0.$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Определение. Если (SUM_R, SUM_L) — векторная система для матрицы A', то i-я строка является существенной в интервале (N, N'), если существует такое N_1, что $N_1 \in [N, N']$ и $SUM_{L_i}(N_1) = \max\limits_j SUM_L(N_1)$.

Аналогично j-й столбец является существенным в интервале (N, N'), если существует N_2, для которого $N \leq N_2 \leq N'$ и выполняется $SUM_{R_j}(N_2) = \min\limits_i SUM_R(N_2)$.

Далее в лемме 3 целесообразно использовать такое обозначение для векторов $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$: запись $A \geq B$ понимаем как $a_i \geq b_i \, \forall \, i = \overline{1, n}$.

Лемма 3. Если (SUM_2, SUM_1) — векторная система для матрицы A', то ввиду существования в интервале $(s, s+N)$ всех строк и столбцов матрицы A' вытекает

$$\max SUM_R(s+N) - \min SUM_R(s+N) \leq 2aN,$$

$$\max SUM_L(s+N) - \min SUM_L(s+N) \leq 2aN,$$

где $a = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Доказательство. Выберем i такое, что $SUM_{R_i}(s+N) = \max\limits_i SUM_R(s+N)$, и $N' \in [s, s+N]$ такое, что $SUM_{R_i}(N') = \min\limits_i SUM_R(N')$. Также выполняется условие $-a \leq a_{ij} \leq a$, тогда $SUM_R(N'+1) = SUM_R(N') + A_{i_1}$, где $A_{i_1} \leq (a, \ldots, a)$. Вектор A_{i_1} — строка матрицы, а $(a, \ldots, a)$ — вектор с одинаковыми координатами такой же размерности, как и A_{i_1}. Затем строки матрицы A будем также обозначать A_{i_2}, A_{i_3}, ... и так далее:

$$SUM_R(N'+2) = SUM_R(N') + A_{i_1} + A_{i_2}, \; A_{i_3} \leq (a, \ldots, a),$$

$$A_{i_1} + A_{i_2} \leq (2a, \ldots, 2a) = 2(a, \ldots, a);$$

$$SUM_R(s+N) = SUM_R(N') + A_{i_1} + \ldots + A_{i_{s+t-t'}},$$

$$A_{i_1} + \ldots + A_{i_{s+t-t'}} \leq (s+N-N')(a, \ldots, a) \leq N(a, \ldots, a),$$

$$N \in [s, s+N], \; s+N-N' \leq N$$

так, чтобы $SUM_{R_j}(N') = \max\limits_i SUM_R(N')$.

Для любой строки матрицы A выполняется

$$\max SUM_{R_j}(s+N) = SUM_{R_j}(N') + (A_{i_1} + \ldots + A_{i_{s+t-t'}}) \leq$$
$$\leq SUM_{R_j}(N') + Na = \min_i SUM_R(N_2) + aN, \qquad (19)$$

поскольку компонент j, который изменяется за N шагов, не превышает aN.

После повторных преобразований оценим минимум:

$$SUM_R(N'+1) = SUM_R(N') + A_{i_1}, \text{ где } A_{i_1} \ge -(a, \dots, a),$$

$$SUM_R(N'+2) = SUM_R(N') + A_{i_1} + A_{i_2}, \ A_{i_2} \ge -(a, \dots, a),$$

$$A_{i_1} + A_{i_2} \ge (2a, \dots, 2a) \ge 2(a, \dots, a);$$

$$SUM_R(s+N) = SUM_R(N') + (A_{i_1} + \dots + A_{i_{s+N-N'}}).$$

Имеем

$$\min SUM_R(s+N) \ge \min SUM_R(N') + \min(A_{i_1} + \dots + A_{i_{s+N-N'}}) \ge \min SUM_R(N') - Na;$$

$$-\min SUM_R(s+N) \le -\min SUM_R(N') + Na. \quad (20)$$

Сложив (19) и (20), получим

$$\max SUM_R(s+N) - \min SUM_R(s+N) \le 2aN. \quad (21)$$

Для вектора $SUM_R(N)$ после проведения аналогичных преобразований имеем

$$\max SUM_L(s+N) - \min SUM_L(s+N) \le 2aN. \quad (22)$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если все строки и столбцы матрицы A' принадлежат интервалу $(s, s+t)$ для некоторой векторной системы (SUM_R, SUM_L), то

$$\max SUM_L(s+N) - \min SUM_L(s+N) \le 4at.$$

Доказательство. Сложив (21) и (22), получим

$$\max SUM_R(s+N) - \max SUM_L(s+N) \le \min SUM_R(s+N) + \max SUM_L(s+N) + 4at.$$

Если положить, что $\min SUM_R(s+N) - \max SUM_L(s+N) \le 0$, тогда $\max SUM_R(s+N) - \max SUM_L(s+N) \le 0 + 4at$.

Следует доказать, что $\min SUM_R(s+N) - \max SUM_L(s+N) \le 0$.

Применим (4) к транспонированной матрице A' и получим

$$\min_i \sum_{i=1}^{m} A_j q_j \le \max_j \sum_{j=1}^{n} B_i p_i, \quad (23)$$

где $p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \ q_j \ge 0, \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Данное неравенство выполняется также и для всех p_i и q_j, для которых

$$SUM_R(s+N) = SUM_R(0) + (s+N)\sum_{i=1}^{m} A_i p_i,$$

$$SUM_L(s+N) = SUM_L(0) + (s+N)\sum_{j=1}^{n} B_j q_j, \quad (24)$$

полученных согласно лемме 3, где $(s+N)$ обозначено через N. Применив к (24) формулу (23), получим

$$\min SUM_L(s+N) \le \max SUM_L(0) + (s+N) \min \sum_{j=1}^{n} B_j q_j.$$

Согласно формуле (5) получим

$$\min SUM_L(s+N) \le \min SUM_R(0) + (s+N) \min \sum_{j=1}^{n} B_j q_j.$$

Согласно формуле (4) и свойству $(\max(A+B) \geq \min(A)+\max(B))$ получим

$$\min SUM_L(s+N) \leq \max SUM_R(s+N).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Для любой матрицы A и произвольной $\varepsilon > 0$ существует такое N_0, когда для любой векторной системы (SUM_R, SUM_L) выполняется неравенство $\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N) < \varepsilon N$ при $N \geq N_0$.

Доказательство. Утверждение справедливо для единичной матрицы, поскольку в таком случае выполняется равенство $\max SUM_L(N) = \min SUM_R(N)$ для любого N. Будем считать, что данная лемма выполняется для всех подматриц A'; докажем, что она выполняется и для A.

Выберем N^* так, чтобы для любой векторной системы (SUM'_R, SUM'_L) подматрицы A' из матрицы A выполнялось неравенство

$$\max SUM'_L(N) - \min SUM'_R(N) < \frac{1}{2}\varepsilon N \quad \text{при} \quad N \geq N^*.$$

Докажем, что если в данной системе (SUM_R, SUM_L) для матрицы A некоторый столбец (или строка) не принадлежит интервалу $(s, s+N^*)$, то

$$\max SUM_L(s+N^*) - \min SUM_R(s+N^*) <$$
$$< \max SUM_L(s) - \min SUM_R(s) + \varepsilon N^*. \qquad (25)$$

Докажем это, предположив, что k-я строка не принадлежит интервалу $(s, s+N^*)$. Тогда построим для матрицы A' (исключением из A k-й строки) векторную систему (SUM'_R, SUM'_L) следующим образом: $SUM'_R(N) = SUM_R(s+N)+C$, где $C = (C_1, \ldots, C_n)$, $C_1 = \ldots = C_n = \max SUM_L(s) - \min SUM_R(s)$, $SUM'_L(N) = P_{r_k} SUM_L(s+N)$, где C — n-мерный вектор, все компоненты которого равны $\max SUM_L(s) - \min SUM_R(s)$, а P_{r_k} — вектор, полученный из $SUM_L(N)$ при исключении из него k-го компонента. Строки матрицы A' нумеруются числами $1, 2, \ldots, k-1$, $k+1, \ldots, m$. Заметим, что $\max SUM'_L(0) = \min SUM'_R(0)$. Далее если

$$SUM_R(s+N+C_1+1) = SUM_R(s+C_1+N) + A_i,$$
$$SUM_L(s+N+1) = SUM_L(s+N) + B_j,$$

то

$$SUM'_R(N+1) = SUM'_R(N) + A_i, \quad SUM'_L(N+1) = SUM'_L(N+1) + B_j.$$

Таким образом, $SUM_{L_i}(s+N) = \max\limits_j SUM_L(s+N)$ тогда и только тогда, когда $SUM'_{L_i}(N) = \max\limits_j SUM'_L(N)$, а $SUM_{R_j}(s+N) = \max\limits_i SUM_R(s+N)$ тогда и только тогда, когда $SUM'_{R_j}(N) = \max\limits_i SUM'_R(N)$ при $0 \leq N \leq N^*$.

Итак, векторы (SUM'_R, SUM'_L) должны удовлетворять рекурсивным ограничениям, приведенным в определении векторной системы для $0 \leq N \leq N^*$, поскольку им удовлетворяет векторная система (SUM'_R, SUM'_L).

Согласно выбору N^* имеем

$$\max SUM'_L(N^*) - \min SUM'_R(N^*) < \frac{1}{2}\varepsilon N^*.$$

Поэтому

$$\max SUM_L(s+N^*)-\min SUM_R(s+N^*)=\max SUM'_L(N^*)-\min SUM'_R(N^*)+$$

$$+\max SUM_L(s)-\min SUM_R(s)<\max SUM_L(s)-\min SUM_R(s)+\frac{1}{2}\varepsilon N^*.$$

Покажем, что для любой векторной системы (SUM_R, SUM_L) матрицы A выполняется неравенство $\max SUM_L(N)-\min SUM_R(N)<\varepsilon N$ при $t>\frac{8aN^*}{\varepsilon}$. Пусть $N>N^*$, $N=bN^*$, $\frac{N}{N^*}=b$, $b>1$, а также $0\le Q<1$ и q такое, что $t=(Q+q)N^*$, $Q+q=b$, $s\le q$, $s\in N$.

Случай 1. Пусть существует целое положительное число s такое, что $s\le q$, и все строки и столбцы матрицы A' в интервале $((Q+s-1)N^*,\ (Q+s)N^*)$ имеют место. Пусть s — наибольшее из таких N. Из формулы (25) для $r=q$ имеем

$$\max SUM_L(N)-\max SUM_R(N)=$$

$$=\max SUM_L((Q+q)N^*)-\min SUM_R((Q+q)N^*)<$$

$$<\max SUM_L((Q+q)N^*-N^*)-\min SUM_R((Q+q)N^*-N^*)+\frac{1}{2}\varepsilon N^*=$$

$$=\max SUM_L((Q+q-1)N^*)-\min SUM_R((Q+q-1)N^*)+\frac{1}{2}\varepsilon N^*. \tag{26}$$

Для $r=q-1$ имеем

$$\max SUM_L((Q+q-1)N^*)-\max SUM_R((Q+q-1)N^*)<$$

$$<\max SUM_L((Q+q-2)N^*)-\min SUM_R((Q+q-2)N^*)+\frac{1}{2}\varepsilon N^*. \tag{27}$$

Число таких формул составляет $q-s$. Применим эти формулы последовательно к (26) с использованием (27):

$$\max SUM_L(N)-\max SUM_R(N)<\max SUM_L((Q+q-1)N^*)-$$

$$-\min SUM_R((Q+q-1)N^*)+\frac{1}{2}\varepsilon N^*<\max SUM_L((Q+q-1)N^*)-$$

$$-\min SUM_R((Q+q-1)N^*)+\frac{1}{2}\varepsilon N^*<\max SUM_L((Q+s)N^*)-$$

$$-\min SUM_R((Q+s)N^*)+\frac{1}{2}\varepsilon(q-s)N^*. \tag{28}$$

Из леммы 3 с учетом того, что в интервале $((Q+s-1)\,N^*,\ (Q+s)N^*)$ все строки и столбцы матрицы A имеют место, следует

$$\max SUM_L((Q+s)N^*)-\min SUM_R((Q+s)N^*)\le 4aN^*. \tag{29}$$

Подставив (29) в (28), получим

$$\max SUM_L((Q+s)N^*)\ -\min SUM_R((Q+s)N^*)\le$$

$$\le 4aN^*+\frac{1}{2}(q-s)N^*\le 4aN^*+\frac{1}{2}\varepsilon N\ .$$

Случай 2. Если числа s, рассмотренного в случае 1, не существует, то в каждом интервале $((Q+s-1)N^*, (Q+s)N^*)$ для $r=s+1, \ldots, q$ некоторые строка и столбец матрицы A не имеют место. Из формулы (26) леммы 5 имеем следующий вывод.

Пусть для $r=q$

$$\max SUM_L(N) - \max SUM_R(N) < \max SUM_L((Q+q-1)N^*) -$$

$$- \min SUM_R((Q+q-1)N^*) + \frac{1}{2}\varepsilon N^*,$$

$$\max SUM_L((Q+q-1)N^*) - \max SUM_R((Q+q-1)N^*) <$$

$$< \max SUM_L((Q+q-2)N^*) - \min SUM_R((Q+q-2)N^*) + \frac{1}{2}\varepsilon N^*.$$

Для $r=1$ имеем

$$\max SUM_L((Q+1)N^*) - \max SUM_R((Q+1)N^*) <$$

$$< \max SUM_L((QN^*) - \min SUM_R((QN^*) + \frac{1}{2}\varepsilon N^*.$$

Число таких формул равно q. Применяя их последовательно, получаем

$$\max SUM_L(N) - \max SUM_R(N) <$$

$$\max SUM_L((Q+q-1)N^*) - \min SUM_R((Q+q-1)N^*) + \frac{1}{2}\varepsilon N^* <$$

$$< \max SUM_L((Q+q-2)N^*) - \min SUM_R((Q+q-2)N^*) + \frac{1}{2}\varepsilon N^* + \frac{1}{2}\varepsilon N^* <$$

$$< \max SUM_L((QN^*) - \min SUM_R((QN^*) + \frac{1}{2}\varepsilon N^*. \qquad (30)$$

Оценим разность $\max SUM_L(QN^*) - \max SUM_R(QN^*)$ из формулы (30). Предположим, что в интервале $(0, QN^*)$ все строки и столбцы матрицы A имеют место (если N^* достаточно большое, иначе переопределим матрицу A).

Применим лемму 4 для неравенства

$$\max SUM_L(QN^*) - \max SUM_R(QN^*) < 4aQN^* < 4aN^*.$$

Как и для случаев 1 и 2, имеем

$$\max SUM_L(N) - \max SUM_R(N) < 4aN^* + \frac{1}{2}\varepsilon N <$$

$$< 4a\left(\frac{\varepsilon N}{8a}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon N = \frac{1}{2}\varepsilon N + \frac{1}{2}\varepsilon N = \varepsilon N.$$

Лемма 5 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Согласно лемме 5 имеем

$$\frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} < \varepsilon,$$

а согласно лемме 2

$$\lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \ge 0.$$

Тогда

$$0 \le \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \le$$

$$\le \lim_{N\to\infty} \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} \le \lim_{N\to\infty} \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0 \,,$$

если

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} = 0 \,. \tag{31}$$

Имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \inf \dfrac{\max SUM_L(N) - \min SUM_R(N)}{N} = 0$.

Применяя формулу из леммы 2, получаем

$$\lim_{N\to\infty} \sup \frac{\max SUM_L(N)}{N} \le v \le \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N)}{N} \,; \tag{32}$$

$$0 = \lim_{N\to\infty} \left(\inf \frac{\max SUM_L(N)}{N} + \inf \left(-\frac{\min SUM_R(N)}{N} \right) \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\inf \frac{\max SUM_L(N)}{N} + \sup \frac{\min SUM_R(N)}{N} \right). \tag{33}$$

Однако равенство (33) с учетом (32) возможно, если

$$\lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \sup \frac{\max SUM_R(N)}{N} \,.$$

Из (31) следует, что $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\max SUM_L(N)}{N} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\min SUM_R(N)}{N}$.

По определению предела

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\max SUM_L(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\max SUM_L(N)}{N} = v \,.$$

Аналогично

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\min SUM_R(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \sup \frac{\min SUM_R(N)}{N} = v,$$

а следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\min SUM_L(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\min SUM_R(N)}{N} = v \,.$$

Теорема доказана.

Заметим, что из сходимости итерационного алгоритма в понимании получения цены игры вытекает сходимость и в понимании получения оптимальных стратегий. Таким образом, доказана сходимость итерационного алгоритма решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа с ограничениями, которые определяются размещениями на стратегии одного игрока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рощин В.А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1980. — 276 с.

2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.

3. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка, 1988. — 472 с.

4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — К.: Наук. думка, 1995. — 171 с.

5. Сергієнко І.В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми. — К.: Наук. думка, 1999. — 354 с.

6. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы, решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 263 с.

7. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании. — Киев.: УМК ВО, 1992. — 92 с.

8. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації — К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с.

9. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. — Полтава: ЧПКП «Легат», 1999. — Ч. 1. — 64 с.; Ч. 2. — 32 с.

10. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія і методи. — Полтава: ПУСКУ, 2005. — 103 с.

11. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Задачи комбинаторной оптимизации с дробно-линейными целевыми функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.

12. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: ПУСКУ, 2006. — 129 с.

13. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.

14. Емец О.А., Романова Н.Г. Оптимизация на полиперестановках. — К.: Наук. думка, 2010. — 105 с.

15. Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Розв'язування ігрових задач на переставленнях. — Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 3. — С. 47–52.

16. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и системный. анализ. — 2007. — № 6. — С. 103-114.

17. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 37–47.

18. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях // Там же. — 2007. — № 1. — С. 26–36.

19. Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 3. — С. 5–10.

20. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Игры с комбинаторными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 134–141.

21. Емец О.А., Ольховская Е.В. Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 69–78.

22. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. Учеб. пособие для вузов. — К.: Вища школа, 1979. — 312 с.

23. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. Изд. 2-е. — М.: Физматгиз, 1961. — 68 с.

24. Robinson J. An iterative method of solving a game // The Annals of Mathematics, Second Series. — 1951. — **54**, N 2. — P. 296–301.

25. Ємець О.О., Роскладка А.А. Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Україн. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1118–1121.

26. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Теория пределов. Гл. 3 // Математический анализ / Под ред. А. Н. Тихонова. — 3-е изд. — М.: Проспект, 2006. — Т. 1. — С. 92–105.

Поступила 28.11.2011