УДК 519.64:517.443:519.254-37

В.К. ЗАДИРАКА, С.С. МЕЛЬНИКОВА, Л.В. ЛУЦ

ОПТИМАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ $W_{2,L,N}$ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ключевые слова: *интегралы от быстроосциллирующих функций, интерполяционные классы функций, оптимальные по точности квадратурные формулы.*

Рассмотрим задачу вычисления интеграла от быстроосциллирующей функции вида

$$I(\omega)=\int_a^b f(x)\sin\omega x\,dx \tag{1}$$

в предположении, что $f(x)\in F$ (F — некоторый класс функций), ω — произвольное действительное число ($|\omega|\ge 2\pi(b-a)$), информация о функции $f(x)$ задана некоторым информационным оператором $\Phi(f,x)$, a, b — заданные действительные числа. В качестве F рассмотрим интерполяционный класс функций $W_{2,L,N}$ [1]. Будем говорить, что функция $f(x)\in W_{2,L,N}$ на интервале $[a,b]$, если: 1) ее производная $f'(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой L, т.е. $\forall x_1,x_2\in[a,b]$

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|\le L|x_1-x_2|, \tag{2}$$

L, a, b — заданные действительные числа; 2) информационный оператор (и. о.) $\Phi(f,x)$ задан фиксированной таблицей своих значений. Рассмотрим следующие и. о., которые представляют множество заданных фиксированных векторов длины N: $\Phi_1=\{\{f_i\}_0^{N-1},\{f_i'\}_0^{N-1},\{x_i\}_0^{N-1}\}$ и $\Phi_2=\{\{f_i\}_0^{N-1},\{x_i\}_0^{N-1}\}$, $i=\overline{0,N-1}$, $x_0=a$, $x_{N-1}=b$, значения L, N, a, b заданы.

Во многих прикладных задачах, таких как статистическая обработка данных, цифровая фильтрация, компьютерная томография, распознавание образов и многих других, возникает необходимость вычисления интегралов вида (1), причем с заданной (часто довольно высокой) точностью. Классические квадратурные формулы не всегда могут обеспечить требуемую точность, поскольку, как правило, не учитывают осцилляцию подынтегральной функции. В связи с этим задача построения оптимальных по точности (и близких к ним) квадратурных формул вычисления интегралов (1) в условиях наиболее полного использования априорной информации является важной и актуальной. Один из подходов к вычислению интегралов (1) рассмотрен в работах [1–3]. В них построена оптимальная по точности квадратурная формула и найдена оптимальная оценка погрешности метода на классе $W_{2,L,N}$ с использованием и. о. $\Phi_1(f,x)$ при выполнении дополнительных условий, которые накладываются на функцию и ее первую производную. Эти условия существенным образом суживают класс задач, к которым можно применить предложенные алгоритмы.

Данная работа развивает и углубляет результаты из [1–3]. Применив метод граничных функций [1–4], построим оптимальную по точности квадратурную формулу без наложения дополнительных условий на подынтегральную функцию и ее производную. Кроме того, рассмотрим более сложный для исследования случай использования и. о. $\Phi_2(f, x)$, когда значения производной $\{f_i'\}_0^{N-1}$ не заданы. В этом случае по известным значениям $\{f_i\}_0^{N-1}$ в узлах $\{x_i\}_0^{N-1}$ и константе L нужно построить оценку производной [5–7], а затем использовать эти значения для построения оптимальной квадратурной формулы вычисления интеграла (1).

Введем характеристики:

$$\delta(W_{2,L,N}, R, \{\Phi_{k,i}\}_0^{N-1}, \omega) = \sup_{f \in W_{2,L,N}} \rho(I(\omega), \overline{R}), \tag{3}$$

$$\delta = \delta(W_{2,L,N}, \{\Phi_{k,i}\}_0^{N-1}, \omega) = \inf_R \delta(W_{2,L,N}, R, \{\Phi_{k,i}\}_0^{N-1}, \omega), \tag{4}$$

где $\rho(I(\omega), \overline{R})$ — погрешность численного интегрирования, $\overline{R} = \overline{R}(f, R, \{\Phi_{k,i}\}_0^{N-1}, \omega)$ — результат приближенного вычисления $I(\omega)$ с помощью квадратурной формулы R, $k = 1, 2$.

Квадратурную формулу R^*, на которой достигается δ, назовем оптимальной по точности в классе $W_{2,L,N}$.

Для построения оптимальных по точности квадратурных формул вычисления (1) применим метод граничных функций, который основан на построении верхней и нижней границ области неопределенности значений интеграла (1) $I^+(\omega)$ и $I^-(\omega)$, чебишевский центр которой $I^*(\omega)$ дает оптимальную квадратурную формулу, а чебишевский радиус — оптимальную оценку (4). Согласно этому методу

$$I^+(\omega) = \int_a^b f^+(x) \sin \omega x \, dx, \quad I^-(\omega) = \int_a^b f^-(x) \sin \omega x \, dx, \tag{5}$$

где $f^+(x) = \sup_{f \in W_{2,L,N}} f(x)$, $f^-(x) = \inf_{f \in W_{2,L,N}} f(x)$ — верхняя и нижняя границы области неопределенности класса $W_{2,N,L}$. Известно, что оптимальная квадратурная формула имеет вид

$$I^*(\omega) = \frac{I^+(\omega) + I^-(\omega)}{2} = \frac{1}{2} \int_a^b (f^+(x) + f^-(x)) \sin \omega x \, dx, \tag{6}$$

а чебишевский радиус

$$\rho^*(\omega) = \frac{I^+(\omega) - I^-(\omega)}{2} = \frac{1}{2} \int_a^b (f^+(x) - f^-(x)) \sin \omega x \, dx \tag{7}$$

совпадает с оптимальной оценкой (4) [1].

Таким образом, для построения $I^*(\omega)$ и $\rho^*(\omega)$ соответственно вида (6) и (7) необходимо определить функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, а также функции

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(f^+(x) + f^-(x)), \tag{8}$$

$$\rho^*(x) = \frac{1}{2}(f^+(x) - f^-(x)). \tag{9}$$

1. Рассмотрим случай задания априорной информации и. о. $\Phi_1 = \{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1}$. Определим аналитический вид функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$. Введем условие, кото-

рое по аналогии с [1–3] обозначим условие A: $[|\omega|(b-a)/\pi]+1$ нуль функции $\sin\omega x$ совпадает с узлами сетки $\{x_i\}_0^{N-1}$. Мажоранту и миноранту класса $W_{2,L,N}$ на $[x_i, x_{i+1}]$ необходимо строить с учетом знака функции $\sin\omega x$. Это позволит получить более точные оценки погрешности численного интегрирования и улучшить качество предложенных квадратурных формул вычисления интегралов (1).

Очевидно, что множество $W_{2,L,N}$ на каждом элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ограничено четырьмя кривыми:

$$\begin{gathered} f_i + f_i'(x-x_i) \pm \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i), \\ f_{i+1} + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) \pm \frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i), \end{gathered} \tag{10}$$

которые попарно пересекаются в точках $x_i \le \bar{x}_i \le \bar{\bar{x}}_i \le x_{i+1}$, где $\bar{x}_i = \min(x_1, x_2)$, $\bar{\bar{x}}_i = \max(x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{h_i(f_i' + f_{i+1}') - 2\Delta f_i}{2(\Delta f_i' - Lh_i)}, \\ x_2 &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{h_i(f_i' + f_{i+1}') - 2\Delta f_i}{2(\Delta f_i' - Lh_i)}, \end{aligned} \tag{11}$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta f_i' = f_{i+1}' - f_i'$, L — константа Липшица.

Отдельно рассмотрим следующие отрезки.

- $x \in [x_i, \bar{x}_i]$. В этом случае верхняя и нижняя граница области неопределенности значений $f(x) \in W_{2,L,N}$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_i^+(x) &= f_i + f_i'(x-x_i) + \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i), \\ f_i^-(x) &= f_i + f_i'(x-x_i) - \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i). \end{aligned} \tag{12}$$

- $x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]$. Построение граничных функций в этом случае более сложное, поскольку $f^+(x)$ и $f^-(x)$ зависят от знака Δf_i. Определим их следующим образом:

$$f_i^+(x) = \max_{x\in[\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]} \left\{ f_i + f_i'(x-x_i) + \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i); \right.$$
$$\left. f_{i+1} + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) + \frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i) \right\},$$

$$f_i^-(x) = \min_{x\in[\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]} \left\{ f_i + f_i'(x-x_i) - \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i), \right.$$
$$\left. f_{i+1} + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i) \right\}.$$

Применяя функцию $\operatorname{sign}(x)$, перепишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned} f_i^+(x) &= \frac{1-\operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left(f_i + f_i'(x-x_i) + \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i) \right) + \\ &+ \frac{1+\operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left(f_{i+1} + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) + \frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i) \right), \\ f_i^-(x) &= \frac{1+\operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left(f_i + f_i'(x-x_i) - \frac{L}{2}(x-x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i) \right) + \\ &+ \frac{1-\operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left(f_{i+1} + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin\omega x_i) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

• $x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}]$. В этом случае

$$f_i^+(x) = f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1}) + \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i),$$
$$f_i^-(x) = f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i). \tag{14}$$

Используя соотношения (12)–(14), а также (8), (9), получаем выражения для вычисления $f_i^*(x)$ и $\rho_i^*(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$:

$$f_i^*(x) = \begin{cases} f_i + f_i'(x - x_i), & x \in [x_i, \bar{x}_i], \\ \frac{1}{2}[f_i + f_i'(x - x_i) + f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1})] + \\ + \frac{Lh_i}{4} \operatorname{sign}(\Delta f_i)(2x - x_i - x_{i+1}), & x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i], \\ f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1}), & x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}], \\ \qquad x \notin [x_{N-1}, x_N], \\ f_{N-1} + f'_{N-1}(x - x_{N-1}), & x \in [x_{N-1}, x_N]; \end{cases} \tag{15}$$

$$\rho_i^*(x) = \begin{cases} \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i), & x \in [x_i, \bar{x}_i], \\ \frac{L}{4}[(x - x_i)^2 + (x - x_{i+1})^2] \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\Delta f_i) \times \\ \times (\Delta f_i + \Delta f_i' x - f'_{i+1} x_{i+1} + f_i' x_i), & x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i], \\ \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i), & x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}], \\ \qquad x \notin [x_{N-1}, x_N], \\ \frac{L}{2}(x - x_{N-1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_{N-1}), & x \in [x_{N-1}, x_N]. \end{cases} \tag{16}$$

Легко проверить, что данная функция непрерывна на $[x_i, x_{i+1}]$ и $f_i^*(x) \in W_{2,L,N}$.

Очевидно, что чебышевский центр и чебышевский радиус области неопределенности класса $W_{2,L,N}$ определяются так:

$$f^*(x) = \bigcup_{i=0}^{N-1} f_i^*(x), \quad \rho^*(x) = \bigcup_{i=0}^{N-1} \rho_i^*(x). \tag{17}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняется условие А, $f(x) \in W_{2,L,N}$, и используется и. о. $\Phi_1(f, x)$. Квадратурная формула вычисления интеграла (1)

$$R(\omega) = \int_a^b f^*(x) \sin \omega x \, dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i^*(x) \sin \omega x \, dx, \tag{18}$$

где $f^*(x)$ определяется соотношениями (15), (17), является оптимальной по точности квадратурной формулой на классе $W_{2,L,N}$ в смысле характеристик (4), причем

$$\delta(W_{2,L,N}, \{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1}, \omega) = \left| \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\cos \omega x_1 \left(\operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \frac{Lh_i(x_{i+1} + x_i - 2x_1)}{4} + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{\Delta f_i + \Delta f_i' x_1 - f'_{i+1} x_{i+1} + f_i' x_i}{2} \right) + \cos \omega x_2 \left(\operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \frac{Lh_i(x_{i+1} + x_i - 2x_2)}{4} - \right.$$

$$-\frac{\Delta f_i+\Delta f_i' x_2-f_{i+1}' x_{i+1}+f_i' x_i}{2}\Bigg)\Bigg]+\frac{1}{2\omega^2}[\sin\omega x_1(\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)Lh_i+\Delta f_i')+$$

$$+\sin\omega x_2(\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)Lh_i-\Delta f_i')]+\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\frac{L}{\omega^3}(\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_i)\Bigg\}+$$

$$+\operatorname{sign}(\sin\omega x_{N-1})\frac{L}{\omega}\Bigg(\frac{h_{N-1}}{\omega}\sin\omega b-\frac{(h_{N-1})^2}{2}\cos\omega b+$$

$$+\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega b-\cos\omega x_{N-1})\Bigg)\Bigg|, \tag{19}$$

где $\bar{x}_i$, $\bar{\bar{x}}_i$, x_1, x_2 определены в (11).

Доказательство. На основании (7) имеем

$$\delta(W_{2,L,N},\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1},\omega)=\rho^*(\omega)=\left|\frac{1}{2}\int_a^b(f^+(x)-f^-(x))\sin\omega x\,dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f_i^+(x)-f_i^-(x))\sin\omega x\,dx\right|=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\rho_i^*(x)\sin\omega x\,dx\right|=$$

$$=\Bigg|\frac{L}{2}\sum_{i=0}^{N-2}\left[\int_{x_i}^{\bar{x}_i}\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)(x-x_i)^2\sin\omega x\,dx+\int_{\bar{\bar{x}}_i}^{x_{i+1}}\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)(x-x_{i+1})^2\sin\omega x dx\right]+$$

$$+\frac{L}{4}\sum_{i=0}^{N-2}\int_{\bar{x}_i}^{\bar{\bar{x}}_i}\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)((x-x_i)^2+(x-x_{i+1})^2)\sin\omega x\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta f_i)\int_{\bar{x}_i}^{\bar{\bar{x}}_i}(\Delta f_i+\Delta f_i' x-f_{i+1}' x_{i+1}+f_i' x_i)\sin\omega x\,dx+$$

$$+\frac{L}{2}\int_{x_{N-1}}^{x_N}\operatorname{sign}(\sin\omega x_{N-1})(x-x_{N-1})^2\sin\omega x dx\Bigg|=$$

$$=\Bigg|\sum_{i=0}^{N-2}\Bigg\{\frac{1}{\omega}\Bigg[\cos\omega x_1\Bigg(\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\frac{Lh_i(x_{i+1}+x_i-2x_1)}{4}+$$

$$+\frac{\Delta f_i+\Delta f_i' x_1-f_{i+1}' x_{i+1}+f_i' x_i}{2}\Bigg)+\cos\omega x_2\Bigg(\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\frac{Lh_i(x_{i+1}+x_i-2x_2)}{4}-$$

$$-\frac{\Delta f_i+\Delta f_i' x_2-f_{i+1}' x_{i+1}+f_i' x_i}{2}\Bigg)+\frac{1}{2\omega^2}[\sin\omega x_1(\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)Lh_i+\Delta f_i')+$$

$$+\sin\omega x_2(\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)Lh_i-\Delta f_i')]+\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\frac{L}{\omega^3}(\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_i)\Bigg\}+$$

$$+\operatorname{sign}(\sin\omega x_{N-1})\frac{L}{\omega}\Bigg(\frac{h_{N-1}}{\omega}\sin\omega b-\frac{(h_{N-1})^2}{2}\cos\omega b+\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega b-\cos\omega x_{N-1})\Bigg)\Bigg|.$$

Таким образом, получили оценку снизу. Для завершения доказательства необходимо получить соответствующую оценку сверху для квадратурной формулы $R(\omega)$ вычисления интеграла (1). Для этого вычислим

$$\delta(W_{2,L,N},R(\omega),\{\Phi_{k,i}\}_0^{N-1},\omega)=\sup_{f(x)\in W_{2,L,N}}\left|\int_a^b(f(x)-f^*(x))\sin\omega x\,dx\right|=$$

$$= \sup_{f(x)\in W_{2,L,N}} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f_i^*(x)) \sin \omega x\, dx \right| =$$

$$= \max \left\{ \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i^+(x) - f_i^*(x)) \sin \omega x\, dx \right|; \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i^*(x) - f_i^-(x)) \sin \omega x\, dx \right| \right\} =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f_i^+(x) - f_i^-(x)}{2} \sin \omega x\, dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i^*(x) \sin \omega x\, dx \right| .$$

Теорема доказана.

2. Рассмотрим случай задания априорной информации и. о. $\Phi_2 = \{\Phi_{2,i}\}_0^{N-1}$. При этом для построения функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ необходимо определить значение производных $\{f_i'\}_0^{N-1}$ по известным значениям $\{f_i\}_0^{N-1}$ в узлах $\{x_i\}_0^{N-1}$ и заданной константе L с минимальной погрешностью. Для вычисления производной можно использовать оптимальный по точности алгоритм [5–7], который основан на построении области неопределенности значений производных класса $C_{2,L,N}$, удовлетворяющих условию Липшица (2). Чебышевский центр этой области дает оптимальное значение производной $(f')^*(x)$ в классе $C_{2,L,N}$, а чебышевский радиус — оптимальную оценку численного дифференцирования в этом классе.

Алгоритм построения $(f')^*(x)$ описан в [5–7] и заключается в следующем.

Назовем функцию $\phi_k^+(x) = \max\limits_{f\in F_k} f'(x)$ $(\phi_k^-(x) = \min\limits_{f\in F_k} f'(x))$, $F_k = \{f(x)\in F$, $x\in[x_k, x_{k+1}]$, $\phi_k^- \le f'(x_k) \le \phi_k^+$, $\phi_{k+1}^- \le f'(x_{k+1}) \le \phi_{k+1}^+\}$, $F \equiv C_{2,L,N}$, $\dfrac{f_{k+1}-f_k}{x_{k+1}-x_k} - L\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2} \le \phi_i^- \le \phi_i^+ \le \dfrac{f_{k+1}-f_k}{x_{k+1}-x_k} + L\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}$, $i = k, k+1$, верхней (нижней) границей значений производных на $[x_k, x_{k+1}]$. Искомые значения ϕ_k^+, ϕ_k^-, $k = \overline{0, N-1}$, которые определяют границу области возможных значений производных класса $C_{2,L,N}$, вычисляются за $N-1$ шагов вперед и $N-2$ шагов назад (чтобы согласовать все ограничения [5]).

Положим $\tilde{\phi}_0^+ = \dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0} + L\dfrac{x_1-x_0}{2}$, $\tilde{\phi}_0^- = \dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0} - L\dfrac{x_1-x_0}{2}$.

Для каждого $k = 0, 2, \ldots, N-2$ вычисляем [6]:

$$\tilde{\phi}_{k+1}^+ = \min\left\{\phi_k^{\hat{a}}, \frac{f_{k+2}-f_{k+1}}{x_{k+2}-x_{k+1}} + L\frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{2}\right\},$$

$$\tilde{\phi}_{k+1}^- = \max\left\{\phi_k^{i}, \frac{f_{k+2}-f_{k+1}}{x_{k+2}-x_{k+1}} - L\frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{2}\right\},$$

где

$$\phi_k^{\hat{a}} = \tilde{\phi}_k^- - L(x_{k+1}-x_k) + 2L\sqrt{\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} - \frac{\tilde{\phi}_k^-(x_{k+1}-x_k) - (f_{k+1}-f_k)}{L}},$$

$$\phi_k^{i} = \tilde{\phi}_k^+ + L(x_{k+1}-x_k) - 2L\sqrt{\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} + \frac{\tilde{\phi}_k^+(x_{k+1}-x_k) - (f_{k+1}-f_k)}{L}}.$$

Пусть $\phi_{N-1}^{+}=\widetilde{\phi}_{N-1}^{+}$, $\phi_{N-1}^{-}=\widetilde{\phi}_{N-1}^{-}$, $\phi_{N-2}^{+}=\widetilde{\phi}_{N-2}^{+}$, $\phi_{N-2}^{-}=\widetilde{\phi}_{N-2}^{-}$.

Для каждого $k=N-3, N-4, \ldots, 0$ вычислим

$$\phi_k^{+}=\min\{\widetilde{\phi}_k^{+}, \phi_k^{a}\},\ \phi_k^{-}=\max\{\widetilde{\phi}_k^{-}, \phi_k^{i}\}, \tag{20}$$

где

$$\phi_k^{a}=\phi_{k+1}^{-}-L(x_{k+1}-x_k)+2L\sqrt{\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}-\frac{\phi_{k+1}^{-}(x_{k+1}-x_k)-(f_{k+1}-f_k)}{L}},$$

$$\phi_k^{i}=\phi_{k+1}^{+}+L(x_{k+1}-x_k)-2L\sqrt{\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}+\frac{\phi_{k+1}^{+}(x_{k+1}-x_k)-(f_{k+1}-f_k)}{L}}.$$

Как доказано в [7], величины ϕ_k^{+}, ϕ_k^{-}, $k=\overline{0, N-1}$, полученные в результате описанной выше процедуры, являются максимально и минимально возможными значениями производной в узлах, а оценка погрешности не превышает величины

$$r=\max_{0\le k\le N-1} r_k,\ r_k=\frac{\psi_k^{+}-\psi_k^{-}}{2}, \tag{21}$$

$$\psi_k^{+}=\min\left\{\frac{f_{k+1}-f_k}{x_{k+1}-x_k}+L\frac{x_{k+1}-x_k}{2}, \frac{f_k-f_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}+L\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right\},$$

$$\psi_k^{-}=\max\left\{\frac{f_{k+1}-f_k}{x_{k+1}-x_k}-L\frac{x_{k+1}-x_k}{2}, \frac{f_k-f_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}-L\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right\}.$$

В [6] доказано, что искомый чебышевский центр и погрешность определяются в виде

$$(f')^{*}(x)=\frac{\phi^{+}(x)+\phi^{-}(x)}{2},\ r(x)=\left|\frac{\phi^{+}(x)-\phi^{-}(x)}{2}\right|,\ \phi^{\pm}(x)=\bigcup_{k=0}^{N-1}\phi_k^{\pm}(x).$$

В [6] также доказано, что для оптимальной по точности аппроксимации производной $(f')^{*}(x)$ справедливая следующая оценка погрешности:

$$r(x)=\max_{f'(x)\in C_{2,N,L}}|f'(x)-(f')^{*}(x)|=\left|\frac{\phi^{+}(x)-\phi^{-}(x)}{2}\right|\le\frac{Lh}{2}, \tag{22}$$

где $h=\max_{0\le k\le N-1}|x_{k+1}-x_k|$.

Вернемся к задаче вычисления интеграла (1) и приведем аналитический вид функций $f^{+}(x)$ и $f^{-}(x)$ с учетом вычисленных с помощью рассмотренного выше алгоритма значений производных. Очевидно, что множество $F\equiv W_{2,L,N}$ в этом случае на каждом элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, N-2}$, ограничено кривыми

$$\begin{gathered} f_i+\phi_i^{\pm}(x-x_i)\pm\frac{L}{2}(x-x_i)^2\operatorname{sign}(\sin\omega x_i), \\ f_{i+1}+\phi_i^{\pm}(x-x_{i+1})\pm\frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2\operatorname{sign}(\sin\omega x_i), \end{gathered} \tag{23}$$

которые попарно пересекаются в точках $x_i\le\widetilde{x}_i\le\widetilde{\widetilde{x}}_i\le x_{i+1}$, где $\widetilde{x}_i=\min(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, $\widetilde{\widetilde{x}}_i=\max(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$,

$$\begin{gathered} \hat{x}_1=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\frac{h_i(\phi_i^{+}+\phi_{i+1}^{+})-2\Delta f_i}{2(\Delta\phi_i^{+}-Lh_i)}, \\ \hat{x}_2=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\frac{h_i(\phi_i^{-}+\phi_{i+1}^{-})-2\Delta f_i}{2(\Delta\phi_i^{-}-Lh_i)}, \end{gathered} \tag{24}$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta\phi_i^{\pm} = \phi_{i+1}^{\pm} - \phi_i^{\pm}$, L — константа Липшица.

Отдельно рассмотрим отрезки $[x_i, \tilde{x}_i]$, $[\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i]$, $[\tilde{\tilde{x}}_i, x_{i+1}]$ и по аналогии с предыдущим случаем приведем функции $f^{\pm}(x)$ на них. Рассмотрим соотношения (12)–(14):

• $x \in [x_i, \tilde{x}_i]$, верхнюю и нижнюю границы области неопределенности значений $f(x) \in W_{2,L,N}$ запишем

$$\begin{aligned} f_i^+(x) &= f_i + \phi_i^+(x - x_i) + \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i), \\ f_i^-(x) &= f_i + \phi_i^-(x - x_i) - \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i); \end{aligned} \tag{25}$$

• $x \in [\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i]$, $f^+(x)$ и $f^-(x)$ определяются следующим образом (в зависимости от знака Δf_i):

$$f_i^+(x) = \min_{x \in [\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i]} \left\{ f_i + \phi_i^+(x - x_i) + \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i); \right.$$

$$\left. f_{i+1} + \phi_{i+1}^+(x - x_{i+1}) + \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right\},$$

$$f_i^-(x) = \min_{x \in [\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i]} \left\{ f_i + \phi_i^-(x - x_i) - \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i); \right.$$

$$\left. f_{i+1} + \phi_{i+1}^-(x - x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right\},$$

применяя функцию $\operatorname{sign}(x)$, перепишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned} f_i^+(x) &= \frac{1 - \operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2} \left(f_i + \phi_i^+(x - x_i) + \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right) + \\ &+ \frac{1 + \operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2} \left(f_{i+1} + \phi_{i+1}^+(x - x_{i+1}) + \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right), \\ f_i^-(x) &= \frac{1 + \operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2} \left(f_i + \phi_i^-(x - x_i) - \frac{L}{2}(x - x_i)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right) + \\ &+ \frac{1 - \operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2} \left(f_{i+1} + \phi_{i+1}^-(x - x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right); \end{aligned} \tag{26}$$

• $x \in [\tilde{\tilde{x}}_i, x_{i+1}]$, здесь

$$\begin{aligned} f_i^+(x) &= f_{i+1} + \phi_{i+1}^+(x - x_{i+1}) + \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i), \\ f_i^-(x) &= f_{i+1} + \phi_{i+1}^-(x - x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i). \end{aligned} \tag{27}$$

Объединив соотношения (25)–(27), по аналогии с предыдущим случаем получим выражения для $f_i^*(x)$ и $\rho_i^*(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$:

$$f_i^*(x) = \begin{cases} f_i + (f_i')^*(x - x_i), & x \in [x_i, \tilde{x}_i], \\ \frac{1}{2}[f_i + (f_i')^*(x - x_i) + f_{i+1} + (f_{i+1}')^*(x - x_{i+1})] + \\ + \frac{Lh_i}{4} \operatorname{sign}(\Delta f_i)(2x - x_i - x_{i+1}), & x \in [\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i], \\ f_{i+1} + (f_{i+1}')^*(x - x_{i+1}), & x \in [\tilde{\tilde{x}}_i, x_{i+1}], \\ \qquad x \notin [x_{N-1}, x_N], \\ f_{N-1} + (f'_{N-1})^*(x - x_{N-1}), & x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \tag{28}$$

$$\rho_i^*(x)=\begin{cases}\frac{L}{2}(x-x_i)^2\,\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)+r_i(x-x_i), & x\in[x_i,\tilde{x}_i],\\ \frac{L}{4}[(x-x_i)^2+(x-x_{i+1})^2]\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)+ & \\ +\frac{1}{2}[r_i(x-x_i)+r_{i+1}(x-x_{i+1})]+ & \\ +\frac{\mathrm{sign}(\Delta f_i)}{2}[\Delta f_i+\Delta(f_i')^*x-(f_{i+1}')^*x_{i+1}+(f_i')^*x_i], & x\in[\tilde{x}_i,\tilde{\tilde{x}}_i],\\ \frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2\,\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)+r_{i+1}(x-x_{i+1}), & x\in[\tilde{\tilde{x}}_i,x_{i+1}],\\ \qquad x\notin[x_{N-1},x_N], & \\ \frac{L}{2}(x-x_{N-1})^2\,\mathrm{sign}(\sin\omega x_{N-1})+r_{N-1}(x-x_{N-1}), & x\in[x_{N-1},x_N],\end{cases} \tag{29}$$

где $(f_i')^*=(\phi_i^+ +\phi_i^-)/2$, $r_i=(\phi_i^+ -\phi_i^-)/2$ — оптимальное значение производной и ее оценка погрешности соответственно, $(f_i')^*=f_{i+1}'^*-f_i'^*$, $i=\overline{0,\,N-2}$, L — константа Липшица, ϕ_i^+ и ϕ_i^- определяются соотношениями (20). Очевидно, что в этом случае, как и в предыдущем, чебышевский центр и чебышевский радиус области неопределенности класса $W_{2,L,N}$ также определяются соотношениями (17)

$$f^*(x)=\bigcup_{i=0}^{N-1}f_i^*(x),\ \rho^*(x)=\bigcup_{i=0}^{N-1}\rho_i^*(x).$$

Замечание 1. Если значения $\{f_i'\}_0^{N-1}$ заданы и не нуждаются в вычислении, то $\{\Phi_{2,i}\}_0^{N-1}=\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1}$ и соотношения (23)–(29) совпадают с (10)–(16).

Справедливая следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняется условие А, $f(x)\in W_{2,L,N}$ и используется и. о. $\Phi_2(f,x)$. Квадратурная формула (18) вычисления интеграла (1), где $f^*(x)$ определяется соотношениями (29), (17), является оптимальной по точности квадратурной формулой на классе $W_{2,L,N}$ в смысле характеристик (4), причем

$$\delta(W_{2,L,N},\{\Phi_{2,i}\}_0^{N-1},\omega)=S_1+S_2, \tag{30}$$

где

$$S_1=\Bigg|\sum_{i=0}^{N-2}\Bigg\{\frac{1}{\omega}\Bigg[\cos\omega\hat{x}_1\Bigg(\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)\frac{Lh_i}{2}\,\frac{x_{i+1}+x_i-2\hat{x}_1}{2}+$$

$$+\frac{\Delta f_i+\Delta(f_i')^*\hat{x}_1-\Delta(f_{i+1}')^*x_{i+1}+\Delta(f_i')^*x_i}{2}\Bigg)+$$

$$+\cos\omega\hat{x}_2\Bigg(\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)\frac{Lh_i}{2}\,\frac{x_{i+1}+x_i-2\hat{x}_2}{2}-$$

$$-\frac{\Delta f_i+\Delta(f_i')^*\hat{x}_2-\Delta(f_{i+1}')^*x_{i+1}+\Delta(f_i')^*x_i}{2}\Bigg)\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2\omega^2}[\sin\omega\hat{x}_1(\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)Lh_i+\Delta(f_i')^*)+\sin\omega\hat{x}_2(\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)Lh_i-\Delta(f_i')^*)]+$$

$$+\frac{L}{\omega^3}\mathrm{sign}(\sin\omega x_i)(\cos\omega x_{i+1}-\cos\omega x_i)\Bigg\}+\mathrm{sign}(\sin\omega x_{N-1})\frac{L}{\omega}\times$$

$$\times\left(\frac{h_{N-1}}{\omega}\sin\omega b-\frac{(h_{N-1})^2}{2}\cos\omega b+\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega b-\cos\omega x_{N-1})\right)\Bigg|, \qquad (31)$$

$$S_2=\Bigg|\sum_{i=0}^{N-2}\left\{\frac{1}{2\omega}[(r_i(\tilde{x}_i-x_i)+r_{i+1}(x_{i+1}-\tilde{x}_i))\cos\omega\tilde{x}_i+(r_i(\tilde{\tilde{x}}_i-x_i)+\right.$$

$$\left.+r_{i+1}(x_{i+1}-\tilde{\tilde{x}}_i))\cos\omega\tilde{\tilde{x}}_i]+\frac{1}{2\omega^2}\Delta r_i(\sin\omega\tilde{x}_i+\sin\omega\tilde{\tilde{x}}_i)\right\}-$$

$$-\frac{r_{N-1}h_{N-1}}{\omega}\cos\omega b+\frac{1}{\omega^2}(r_{N-1}\sin\omega b-r_0\sin\omega a)\Bigg|, \qquad (32)$$

$\tilde{x}_i$, $\tilde{\tilde{x}}_i$, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ определены в (24), $\Delta r_i=r_{i+1}-r_i$, $i=\overline{0,N-2}$.

Доказательство. На основании (7) имеем

$$\delta(W_{2,L,N},\{\Phi_{2,i}\}_0^{N-1},\omega)=\rho^*(\omega)=\left|\int_a^b\frac{f^+(x)-f^-(x)}{2}\sin\omega x\,dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{f_i^+(x)-f_i^-(x)}{2}\sin\omega x\,dx\right|=\left|\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\rho_i^*(x)\sin\omega x\,dx\right|=$$

$$=\Bigg|\left\{\frac{L}{2}\sum_{i=0}^{N-2}\left[\int_{x_i}^{\tilde{x}_i}(x-x_i)^2\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\sin\omega x\,dx+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{\tilde{\tilde{x}}_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i+1})^2\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\sin\omega x\,dx\right]+\frac{L}{4}\sum_{i=0}^{N-2}\int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{\tilde{x}}_i}((x-x_i)^2+(x-x_{i+1})^2)\times$$

$$\times\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\sin\omega x\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta f_i)\int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{\tilde{x}}_i}(\Delta f_i+\Delta(f_i')^*x-$$

$$\left.-(f_{i+1}')^*x_{i+1}+(f_i')^*x_i)\sin\omega x\,dx\right\}+\frac{L}{2}\int_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})^2\operatorname{sign}(\sin\omega x_{N-1})\sin\omega x\,dx+$$

$$+\sum_{i=0}^{N-2}\left\{r_i\int_{x_i}^{\tilde{x}_i}(x-x_i)\sin\omega x\,dx+\frac{1}{2}\int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{\tilde{x}}_i}[r_i(x-x_i)+r_{i+1}(x-x_{i+1})]\sin\omega x\,dx+\right.$$

$$\left.+r_{i+1}\int_{\tilde{\tilde{x}}_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i+1})\sin\omega x\,dx\right\}+r_{N-1}\int_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})\sin\omega x\,dx\Bigg|=S_1+S_2,$$

где S_1 определено соотношением (31) и совпадает с $\delta(W_{2,L,N},\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1},\omega)$ при $f_i'=(f_i')^*$, $x_1=\hat{x}_1$, $x_2=\hat{x}_2$, а S_2 определено соотношениемм (32) и возникает вследствие приближенного вычисления значений производных $\{f_i\}_0^{N-1}$ в узлах $\{x_i\}_0^{N-1}$.

Таким образом, получили оценку снизу. Для завершения доказательства необходимо получить соответствующую оценку сверху для квадратурной формулы $R(\omega)$ вычисления интеграла (1). Для этого вычислим

$$\delta(W_{2,L,N}, R(\omega), \{\Phi_{2,i}\}_0^{N-1}, \omega) = \sup_{f(x)\in W_{2,L,N}} \left| \int_a^b (f(x) - f^*(x)) \sin \omega x \, dx \right| =$$

$$= \sup_{f(x)\in W_{2,L,N}} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f_i^*(x)) \sin \omega x \, dx \right| =$$

$$= \max \left\{ \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i^+(x) - f_i^*(x)) \sin \omega x \, dx \right| ; \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i^*(x) - f_i^-(x)) \sin \omega x \, dx \right| \right\} =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f_i^+(x) - f_i^-(x)}{2} \sin \omega x \, dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i^*(x) \sin \omega x \, dx \right| .$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если значения $\{f_i'\}_0^{N-1}$ заданы и не нуждаются в вычислении, то оценка (30) совпадает с оценкой (19).

Таким образом, в данной статье построены оптимальные по точности квадратурные формулы вычисления интеграла от быстроосциллирующей функции в классе дифференцируемых функций для двух различных способов задания априорной информации о классе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З а д и р а к а В . К . Теория вычисления преобразования Фурье. — Киев: Наук. думка, 1983. — 215 с.
2. З а д и р а к а В . К . , М е л ь н и к о в а С . С . Цифровая обработка сигналов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 294 с.
3. О п т и м а л ь н і алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування: В 2-х т. / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин, С.С. Мельнікова, О.П. Нечуйвітер — Київ: Наук. думка, 2011. — Т. 1. — 447 с.; Т. 2. — 346 с.
4. И в а н о в В . В . Об оптимальных алгоритмах минимизации функций некоторых классов // Кибернетика. — 1972. — № 4. — С. 40–45.
5. И в а н о в В . В . Методы вычисленный на ЭВМ (справочное пособие). — Киев: Наук. думка, 1986. — 584 с.
6. Б е л а я Н . И . Алгоритм построения оптимальной по точности производной в классе $C_{2,N,L}$ // Изв. вузов. Математика. — 1978. — № 8. — С. 31–40.
7. Б е л а я Н . И . Программа оптимального по точности восстановления производной / Запорожье, 1984. — 50 с. — Деп. в Госфап 28.09.1984, № ПОО7843.

Поступила 16.03.2012