УДК 621.372

В.М. ЗАЯЦЬ

КОМБИНАЦИОННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Ключевые слова: *динамическая система, комбинационный численный метод, дискретная модель, погрешность дискретизации, компьютерное моделирование.*

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании реальных радиотехнических устройств, обеспечивающих желаемые характеристики информационного сигнала по амплитуде, частоте и форме, целесообразно провести их анализ и компьютерное моделирование путем построения математической модели разрабатываемого объекта. Такой подход требует значительно меньших затрат времени и технических средств по сравнению с физическим экспериментом, особенно на предварительной стадии разработки.

В последнее время в нелинейной динамике широкое использование находят дискретные модели динамических систем [1–5], для которых дискретность заложена в природе самого объекта исследований, а не является следствием дискретизации непрерывной системы. Целесообразность использования дискретных по своей природе моделей объясняется следующими особенностями:

— простотой математического описания по сравнению с непрерывными моделями;

— наличием широкого спектра динамических режимов;

— конечной мерностью, что позволяет моделировать каждую новую гармонику путем ее введения в вектор переменных состояния, в то время как в непрерывных системах для решения этой задачи необходимо повышать размерность системы;

— отсутствием необходимости определения оптимального шага дискретизации, оценки локальной и глобальной погрешности численных методов, исследования их устойчивости;

— максимальной приспособленностью к постановке компьютерного эксперимента.

Следует отметить, что возникновению и развитию теории непрерывных и дискретных колебательных систем в значительной мере способствовали известные работы Ван-дер-Поля, А.А. Андронова, С.Е. Хайкина [6–8], которые основываются на методе медленноменяющихся амплитуд [8]. Поскольку полученные при таком подходе уравнения приближенные, то ряд эффектов, таких как генерация на квазигармониках, хаотические движения, бифуркационные значения параметров, при которых происходит изменение динамики системы, не были выявлены.

При построении дискретной модели путем применения численного алгоритма необходимо позаботиться о применении такого метода дискретизации, который минимизирует погрешность вычислений и является А-устойчивым. В противном случае накопление погрешности вычислений приведет к потере не только приемлемых количественных результатов, но и к потере качественного соответствия непрерывной системы и ее дискретной модели.

В данной работе предложен класс комбинационных разностных алгоритмов, которые позволяют минимизировать величину погрешности дискретизации, Целесообразность использования методов этого класса подтверждена рассмотрением консервативных систем без потерь, автоколебательных систем с длительными переходными процессами и систем с высокими качественными показателями.

ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНАЦИОННЫХ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ И ОЦЕНКА ИХ ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Построим класс комбинационных численных методов таким образом, чтобы обеспечить уменьшение погрешности дискретизации по мере роста порядка комбинации, и попытаемся найти такую комбинацию, для которой в первом приближении погрешность дискретизации отсутствует.

В программах компьютерного анализа электронных схем [9], анализе динамических систем с высокими качественными показателями, для которых свойственны длительные переходные процессы [10], возникает проблема между сложностью разностного алгоритма и его точностью. Как правило, используют методы не выше второго порядка сложности. В частности, часто задействуют метод трапеций [3, 9, 10]. Разностная формула этого метода имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (f_n + f_{n+1}), \tag{1}$$

где h — величина шага дискретизации; x_n, x_{n+1} — значения переменных состояния в n и $n+1$ точках дискретизации; f_n, f_{n+1} — значения функций, определяющих непрерывную систему в соответствующих дискретных точках.

Формула (1) является комбинацией двух методов. На первой половине шага дискретизации используется явный метод Эйлера, а на второй — неявный метод Эйлера. В результате построения такой комбинации, что подтверждают многочисленные публикации, точность расчета возрастает более чем на порядок по сравнению с методами Эйлера. Кроме того, для этого метода характерно свойство А-устойчивости.

Для построения нового метода, как предложено в работе [11], будем учитывать поправки для следующей точки дискретизации не на средине шага, как это имеет место в методе трапеций, а в тот момент времени, когда вклады явного и неявного методов Эйлера эквивалентны. Для этого разностную формулу (1) представим в виде, предложенном Линигером–Уилаби [3]:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot ((1-\mu) \cdot f_n + h \cdot \mu \cdot f_{n+1}), \tag{2}$$

где μ — параметр, изменяющийся от нуля к единице. Приравняв второй и третий члены правой части в формуле (2), получим значение параметра μ, при котором явный и неявный методы Эйлера вносят одинаковый вклад в поправку к значению переменной состояния в $n+1$ точке дискретизации:

$$\mu = \frac{f_n}{f_n + f_{n+1}}. \tag{3}$$

После подстановки (3) в (2) получим новую разностную формулу:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2 \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{(f_n + f_{n+1})}. \tag{4}$$

Поскольку согласно формуле (4) вклад каждого из методов Эйлера не превышает половины расстояния между x_n и $x_n + 1$ переменными состояния, метод (4) дает гарантированную верхнюю границу на величину погрешности дискретизации на каждом шаге и обеспечивает ее положительность.

Проведем оценку погрешности дискретизации метода (4). С этой целью для определенности будем рассматривать тестовую модель консервативной системы второго порядка, описываемой уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x, \tag{5}$$

где ω — частота колебаний. Точному решению x_0 уравнения (5) соответствует гармонический сигнал с единичной амплитудой. Для анализа удобнее привести (5) к нормальной форме Коши в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x^1; \qquad \frac{dx^1}{dt} = -\omega^2 \cdot x. \tag{5$'$}$$

После применения (4) к уравнениям (5′) приходим к разностным уравнениям

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2 \cdot h \cdot x_{n+1}^1 \cdot x_n^1}{x_{n+1}^1 + x_n^1} \text{ и } x_{n+1}^1 = x_n^1 - \frac{2 \cdot h \cdot \omega^2 \cdot x_{n+1} x_n}{x_{n+1} + x_n}, \tag{5$''$}$$

решение которых x_p, приближенное к решению (5), имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+1}^1 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix},$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор-столбец мультипликаторов разностной системы (5′′); $\mathbf{C}$ — матрица собственных чисел собственных векторов системы (5′′). Несложно убедиться, что мультипликаторы дискретной модели (5′′) определяются собственными значениями непрерывной системы (5). Логично сразу вместо системы второго порядка анализировать два уравнения первого порядка, записанных относительно собственных значений (5):

$$\frac{dx}{dt} = j \cdot \omega \cdot x \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = -j \cdot \omega \cdot x, \tag{5$'''$}$$

которым соответствуют мультипликаторы дискретной системы (5′′):

$$\rho_1 = j \cdot \omega \cdot h + \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot h^2)} \quad \text{и} \quad \rho_2 = -j \cdot \omega \cdot h + \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot h^2)}.$$

Поскольку элементы матрицы $\mathbf{C}$ определяюся начальными условиями, которые существенно влияют на область сходимости процесса вычислений, а погрешность дискретизации численного метода от них не зависит, достаточно оценить модули и аргументы мультипликаторов:

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1 \text{ и } \varphi_1 = -\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot h}{(1 - h^2 \cdot \omega^2 / 2)}.$$

Таким образом, погрешность в определении амплитуды колебаний с точностью до членов второго порядка малости при использовании метода (4) отсутствует. Учитывая, что приближенную величину периода колебаний можно определить из равенства

$$T_p = \frac{2\pi \cdot h}{\varphi},$$

относительная величина погрешности в определении периода колебаний составляет

$$\delta T = \frac{T_0 - T_p}{T_0} = \frac{h^2 \omega^2}{6}.$$

По сравнению с методом трапеции [3] эта величина в два раза больше по абсолютной величине, но имеет противоположный знак. Применяя на первой половине шага дискретизации формулу (4), а на второй — формулу (1), получаем разностную формулу

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{(f_n + f_{n+1})} + \frac{h}{4}(f_n + f_{n+1}), \tag{6}$$

которую назовем разностной комбинацией первого рода (К1Р). Для этой комбинации мультипликаторы, определенные путем дискретизации уравнений ($5''$) с использованием К1Р (6) имеют вид

$$\rho_1 = \frac{6 \cdot j \cdot \omega \cdot h + 8 \cdot \sqrt{(1-\omega^2 \cdot h^2/2)}}{8 \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot h/4)} \text{ и } \rho_2 = \frac{-6 \cdot j \cdot \omega \cdot h + 8 \cdot \sqrt{(1-\omega^2 \cdot h^2/2)}}{8 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot h/4)}.$$

Таким образом,

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1 \text{ и } \varphi_1 = -\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{3 \cdot \omega \cdot h \sqrt{(1 + h^2 \cdot \omega^2/2)}}{4} + \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot h}{4}.$$

Поскольку модули этих мультипликаторов равны единице, то погрешность определения амплитуды колебаний отсутствует. Погрешность дискретизации при использовании (6) к консервативной системе (5) оказывается в два раза меньше по величине и противоположной по знаку по сравнению с методом трапеции, т.е. равна $h^2\omega^2/24$. Заметим, что эта комбинация обладает свойством А-устойчивости, поскольку модули мультипликаторов не выходят за пределы круга единичного радиуса.

Теперь после усреднения (1) и (6) получаем разностную комбинацию второго рода (К2Р):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{2 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{3 \cdot h}{8}(f_n + f_{n+1}). \tag{7}$$

Как показали результаты оценки погрешности дискретизации метода (7) при рассмотрении модели без потерь (5), она оказалась в четыре раза меньше погрешности метода трапеций и в два раза меньше погрешности метода (6). Таким образом, для метода (7) $\delta T = -h^2\omega^2/48$. При этом знак погрешности в К2Р совпадает со знаком погрешности метода трапеций и имеет противоположный знак к погрешности, который дает К1Р. Как и предыдущая комбинации, метод (7) обладает свойством А-устойчивости.

Видимо, можно ожидать дальнейшего уменьшения величины погрешности дискретизации комбинации методов (6) и (7), которая приводит к разностной комбинации третьего рода (К3Р):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3 \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{4 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{5 \cdot h}{16}(f_n + f_{n+1}). \tag{8}$$

Заметим, что рассматривать комбинацию (6) из (4) нецелесообразно (хотя она и имеет право на существование), поскольку знаки погрешности в (4) и (6) совпадают и такая комбинация не может улучшить точности вычислений. Погрешность дискретизации комбинации (8) применительно к модели (5) в два раза меньше относительно погрешности метода (7).

Предлагаемые комбинации разностных схем построены таким образом, что в комбинациях нечетного рода (К1Р, К3Р), определяемых формулами (6) и (8), более существенно влияние второго слагаемого в полученных формулах по сравнению с третьим, а в комбинациях четного рода (К2Р) эти вклады практически сравнимы. Такое построение обеспечивает изменение знака погрешности при получении каждой новой комбинации. Итак, можно сконструировать метод второго порядка, который обеспечит с точностью до членов второго порядка малости сколь угодно малую погрешность дискретизации при определении периода колебаний. После арифметического усреднения (7) и (8) приходим к разностной схеме четвертого рода (К4Р):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{5 \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{8 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{11 \cdot h}{32} (f_n + f_{n+1}), \tag{9}$$

для которой также набдюдается уменьшение погрешности дискретизации при определении периода колебаний в два раза с изменением знака сравнительно с предыдущей комбинацией.

Анализируя формулы (6)–(9), на k-м шаге, используя полшага четную комбинацию, а полшага — нечетную, получаем разностную схему для комбинации k-го рода (ККР):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_k \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{(f_n + f_{n+1})} + a_{k+1} \cdot h \cdot (f_n + f_{n+1}), \tag{10}$$

где $a_k - \dfrac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}}$; $a_{k+1} = \dfrac{2^{k+1} + (-1)^k}{3 \cdot 2^{k+1}}$.

Поскольку с увеличением k значения коэффициентов $a_к$ и $a_к +1$ уменьшаются, то это приводит к уменьшению погрешности дискретизации. Относительная погрешность дискретизации при определении периода колебаний с помощью любой k-й комбинации может быть оценена по формуле

$$\delta = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}, \tag{11}$$

что подтверждено как анализом консервативных систем второго порядка, так и систем с высокой добротностью и длительными переходными процессами, которые описываются системой дифференциальных уравнений высокого порядка.

Для минимизации погрешности дискретизации в (10) осуществим предельный переход, устремив k к бесконечности. Получаем разностную схему (12), для которой с точностью до членов второго порядка малости погрешность дискретизации отсутствует:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2 \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{3 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (f_n + f_{n+1}). \tag{12}$$

Вывод об отсутствии погрешности дискретизации разностной схемы (12), которая является модификацией метода трапеций (ММТ), следует из формулы (11), если в ней устремить k к бесконечности. Отметим, что ММТ по построению дает гарантированное ограничение на величину погрешности дискретизации, которая ограничена величиной шага дискретизации. Для этого метода следует также ожидать расширения области сходимости по сравнению с методом трапеций, поскольку величина погрешности дискретизации на каждом шаге ограничена расстоянием между переменными состояния в соседних точках дискретизации.

Полученные результаты по оценке погрешности дискретизации для полученных разностных схем (6)–(10) и (12) подтверждены при моделировании установившихся режимов в генераторе Ван-дер-Поля [3], в модель которого введено кубическую нелинейность для затягивания переходного процесса. Как свидетельствуют результаты компьютерных экспериментов, погрешность в определении переменных состояния рассматриваемой модели отсутствует, а погрешность вычисления периода колебаний вполне согласуется с аналитическим выражением (11) для различных значений параметра k.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При анализе консервативных систем, в которых отсутствуют потери энергии, исследовании радиотехнических устройств с высокой добротностью, расчете систем с длительными переходными процессами, поиске периодических режимов в системах со сложной динамикой представляется целесообразным использование разностной формулы (12), которая с точностью до членов второго порядка малости обеспечивает отсутствие погрешности вычислений при определении как амплитуды, так и периода колебаний.

Полученные комбинации численных методов (10) при произвольном k и комбинация (12) обладают свойством А-устойчивости.

Использование разностной схемы (12) при построении дискретных моделей в программах компьютерного анализа радиоэлектронных систем повысит эффективность и надежность их работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко. — Киев: Наук. думка, 1989. — 216 с.
2. Заяць В.М. Построение и анализ модели дискретной колебательной системы // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 161–165.
3. Заяць В.М. Дискретні моделі коливних систем для аналізу їх динаміки. — Львів: Вид-во УАД, 2011. — 286 с.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
5. Zayats V. Chaos searching algorithm for second order oscillatory system // Proc. Intern. Conf. “TCSET–2002”. — Lviv–Slavsk. — 2002. — P. 97, 98.
6. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Е. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
7. Бутенин Н.В., Неймарк .И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976. — 354 с.
8. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических цепей. — М.: Связь, 1935. — 186 с.
9. Чуа Л.О., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы). — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
10. Заяць В.М. Ускоренный поиск установившихся режимов в высокочастотных автогенераторах с длительными переходными процессами // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 1993. — № 3. — С. 26–32.
11. Заяць В.М. Нова різницева схема для аналізу коливних систем з тривалим перехідними процесами // Технічна електродинаміка. — 2008. — Ч. 8. — С. 3–6.

Поступила 16.03.2012