УДК 519.8

В.М. АЛЕКСАНДРОВА, И.А. ШУБЕНКОВА

ОБ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИИ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО ПОДХОДА

Ключевые слова: *вариационные неравенства, оптимизационный подход, монотонный оператор, пара Куна–Таккера, алгоритм первого порядка.*

Вариационные неравенства (в.н.) играют важную роль в математическом программировании. К ним сводятся задачи оптимизации, линейной и нелинейной дополнительности, отыскания седловых точек, которые возникают во многих приложениях. Возросшая в последнее время активность изучения конечномерных в.н. обусловлена интересом к применению этих постановок в качестве унифицированного математического аппарата в экономических, транспортных, физических, технических и социальных исследованиях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим в.н. конечной размерности. Пусть заданы непустое множество $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ и оператор $F(x)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Под решением в.н. понимается отыскание точки $x_* \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, для которой

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega . \tag{1}$$

Будем полагать, что в (1) выполняются следующие условия:

а) множество Ω, заданное в виде

$$\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, l \}, \tag{2}$$

ограниченное и содержит внутреннюю точку z: $h_i(z) \leq -\beta$, $\beta > 0$, для всех $i = 1, \dots, l$, а функции $h_i(x)$, $i = 1, \dots, l$, выпуклые и достаточно гладкие;

б) оператор $F(x)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ непрерывно дифференцируемый и сильно монотонный:

$$M \| p \|^2 \geq \langle F'(x) p, p \rangle \geq m \| p \|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \ \forall p \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

где $M \geq m > 0$ — константы, $F'(x) = \left\{ \dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right\}_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1,\dots,n}}$ — якобиан $F(x)$;

в) градиенты $h_i'(x), i \in I(x) = \{ i \in 1, \dots, l \mid h_i(x) = h^+(x) \equiv \max\{0, h_1(x), \dots \dots, h_l(x)\}\}$ линейно-независимы в решении x_* (условие регулярности ограничений).

Векторы $x \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}^l, F(x) \in \mathbf{R}^n, h(x) \in \mathbf{R}^l$ везде рассмотрены как вектор-столбцы. Например, $h(x) = \{h_i(x)\}_{i=1,\dots,l}$ — вектор с компонентами $h_i(x)$; $\lambda = \{ \lambda^i \}_{i=1,\dots,l}$ — вектор с компонентами λ^i; $\langle \cdot , \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения; $\| \cdot \|$ — евклидова норма вектора.

Задача (1) имеет единственное решение x_* [1–3] при условиях а), б), и очевидно, что $x_* = \arg\min f(x)$, где $f(x) = F(x_*)x$, $x \in \Omega$. В точке x_* выполняются необходимые и достаточные условия минимума функции $f(x)$, которые также будут необходимыми и достаточными для того, чтобы точка x_* являлась решением в.н. (1)–(3). Эти условия определяются системой

$$F(x_*) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_*^i h_i'(x_*) = 0, \quad \lambda_*^i h_i(x_*) = 0, \quad \lambda_*^i \geq 0, i = 1, \dots, l. \tag{4}$$

Вектор $(x_*, \lambda_*) \in \mathbf{R}^{n+l}$, удовлетворяющий (4), назовем парой Куна–Таккера в.н. (1)–(3). Если кроме а), б), выполнено условие регулярности ограничений в), то пара Куна–Таккера определяется однозначно как решение системы

$$F(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda^i h_i'(x) = 0, \quad \lambda^i h_i(x) = 0, \quad h_i(x) \le 0, \quad \lambda^i \ge 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

В случае, когда оператор $F(x)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ является монотонным

$$\langle F'(x) p, p\rangle \ge 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \forall p \in \mathbf{R}^n, \tag{5}$$

в.н. (1), (2), (5) имеет неединственное решение $x_* \in \{x_*\} = X_*$ [1–3]. Однако вследствие выпуклости ограничений необходимые для (1), (2), (5) условия первого порядка (4) являются в то же время и достаточными.

Вариационные неравенства наряду с задачами оптимизации, неподвижной точки и дополнительности — одни из основных объектов изучения в нелинейном анализе. Наиболее изучен случай, когда оператор F потенциален, т.е. является градиентом некоторой функции ($F(x) = f_0'(x)$) [1–3]. Тогда задача (1) представляет собой необходимое, а в случае выпуклости функции $f_0(x)$ и достаточное условие оптимальности для задачи $\min\limits_{x \in \Omega} f_0(x)$.

Однако значительная часть прикладных задач [1–3], формулируемых в виде в.н., не гарантирует потенциальности оператора F, поэтому разработка эффективных методов решения задач (1) с непотенциальным операторм F весьма актуальна.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ИСХОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Одним из основных подходов к решению в.н. является построение эквивалентных оптимизационных задач, целевыми функциями которых являются оценочные функции (интервальные или функции невязки). Оценочные функции — это неотрицательные функции, для которых решение x_* исходного в.н. совпадает с глобальным минимумом этих функций, причем оптимальное значение равно нулю.

Рассмотрим функцию $\Theta\colon \Omega \to \mathbf{R}_+$ такую, что точка $x_* \in \Omega$ — решение исходного в.н., совпадает с глобальным решением оптимизационной задачи

$$\min_{x \in \Omega} \Theta(x), \tag{6}$$

а $\Theta(x_*) = 0$, т.е. сведем исходную задачу (1) к задаче (6). Сложность заключается в том, что для в.н. трудно найти оценочные функции, которые бы относительно легко вычислялись.

Первыми идею построения оценочной функции использовали Маркотт и Дусальт [1–3]. В качестве целевой функции задачи (6) они предложили функцию вида

$$\theta_1(x) = \max_{y \in \Omega} \langle F(x), x - y\rangle. \tag{7}$$

Функция (7) неотрицательна для всех $x \in \Omega$ и если точка $x_* \in \Omega$ такая, что $\theta_1(x_*) = 0$, то она будет и решением исходного в.н. (1). Особенностью этой функции является ее недифференцируемость.

В [1, 2] рассмотрена регуляризованная оценочная функция

$$\theta_2(x; c) = \max_{y \in \Omega} \left\{ \langle F(x), x - y\rangle - \frac{1}{2c} \langle G(x - y), x - y\rangle \right\}, \tag{8}$$

где G — положительно определенная матрица, удовлетворяющая неравенствам

$$a\|y - x\|^2 \le \langle G(y - x), y - x\rangle \le A\|y - x\|^2, \quad A \ge a > 0, \tag{9}$$

$c > 0$ — скаляр. Для двух скаляров $c_1 > c_2 > 0$ имеем $\theta_2(x; c_1) \ge \theta_2(x; c_2)$ $\forall x \in \Omega$. Функция $\theta_2(x; c)$, в которой $G = E$, E — единичная матрица, а $c = 1$, предложена Фукушимой в [4]:

$$\theta_2(x) = \max_{y \in \Omega} \left\{ \langle F(x), x-y \rangle - \frac{1}{2} ||x-y||^2 \right\} = \langle F(x), x-y(x) \rangle - \frac{1}{2} ||x-y(x)||^2 =$$

$$= \langle F(x), x - \Pi_\Omega(x-F(x)) \rangle - \frac{1}{2} ||x - \Pi_\Omega(x-F(x))||^2, \qquad (10)$$

где $y(x) = \Pi_\Omega(x-F(x))$ — проекция точки $x-F(x)$ на множество Ω.

Аналогично функции $\theta_1(x)$ функция $\theta_2(x;\ c) \geq 0\ \forall x \in \Omega$. Однако в отличие от $\theta_1(x)$ функция $\theta_2(x;c)$ обладает полезными свойствами [1, 2], например:

— если отображение F непрерывно, а Ω — непустое выпулое и замкнутое множество, то функция $\theta_2(x;c)$ непрерывна;

— если отображение F непрерывно дифференцируемо, то функция $\theta_2(x;c)$ непрерывно дифференцируема;

— если Ω — непустое замкнутое множество, то функция $\theta_2(x;c)$ имеет единственный глобальный минимум, совпадающий с решением исходного в.н., а ее значение в точке минимума равно нулю.

С использованием функции (10) построены глобальные методы, обладающие как линейной [1, 2, 5], так и сверхлинейной [6] скоростью сходимости на многограннике. Для множеств Ω в общем случае линеаризованное в.н. сводится к оптимизационной задаче вида (6), (10), где в качестве оператора $F(x)$ рассмотрен линеаризованный оператор $F_k(x) = F(x_k) + F'(x_k)(x-x_k)$. Для решения вспомогательных задач с учетом их оптимальных значений используют эволюционные алгоритмы, поскольку прямое решение этих задач невозможно ввиду необходимости вычисления проекции некоторой точки на исходное множество Ω сложной структуры.

Следовательно, методы решения исходного в.н. (1) на основе функции (8), (10) представляют практический интерес только тогда, когда исходное множество Ω является выпуклым многогранником.

Далее рассмотрена оценочная функция для исходного в.н., предложенная в [7], которая обладает преимуществами с вычислительной точки зрения по сравнению с функциями $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$. Функция $\theta_3(x)$ вычисляется из решения задачи, состоящей в максимизации квадратичной функции на линеаризованных в точке x ограничениях, определяющих множество Ω:

$$\theta_3(x) = \max_y \langle -F(x),\ y-x \rangle - \frac{1}{2} \langle G(y-x),\ y-x \rangle,$$

$$h_i(x) + \langle h_i'(x),\ y-x \rangle \leq 0, \quad i = 1, \ldots, l. \qquad (11)$$

Здесь G — $n \times n$-матрица, удовлетворяющая неравенствам (9).

Задачу (11) в отличие от задач (8), (10) можно решить за конечное число вычислений. Рассмотрим задачу, аналогичную (11), в которой G — постоянная матрица и $G = E$, а E — единичная матрица:

$$\Theta(x) = \max_p \langle -F(x),\ p \rangle - \frac{1}{2} ||\, p||^2,\ \ h_i(x) + \langle h_i'(x),\ p \rangle \leq 0,\ \ i = 1, \ldots, l. \qquad (12)$$

Отметим, что задача (12) является вспомогательной в алгоритме решения в.н., построенного на идеях линеаризации [8]. В силу выпуклости ограничений $h_i(x)$ имеем $-\beta \geq h_i(z) \geq h_i(x) + \langle h_i'(x), z-x \rangle$, $i = 1, \ldots, l$, $\beta > 0$, что означает совместность ограничений задачи. Следовательно, задача (12) всегда имеет единственное решение $p(x)$,

$$\Theta(x) = -\langle F(x),\ p(x) \rangle - \frac{1}{2} ||\, p(x)||^2 \qquad (13)$$

является оптимальным значением задачи (12), а $\lambda(x)$ — двойственным решением этой задачи.

Покажем, что функция (13) оценочная для в.н. (1), следовательно, задача (6), (13) эквивалентна исходной задаче (1)–(3). Действительно, это следует из теоремы Куна–Таккера и определения седловой точки функции Лагранжа для задачи (12):

$$L(x, p, \lambda) = -\langle F(x), p\rangle - \frac{1}{2}||p||^2 - \sum_{i=1}^{l} \lambda^i (h_i(x) + \langle h_i'(x), p\rangle).$$

Согласно теореме Куна–Таккера имеем

$$\max_p \min_{\lambda\in\Lambda^+} L(x, p, \lambda) = \Theta(x) = L(x, p(x), \lambda(x)) = \min_{\lambda\in\Lambda^+} \max_p L(x, p, \lambda). \tag{14}$$

Обозначим $\varphi(x, \lambda) = \max\limits_p L(x, p, \lambda) = L(x, p(x, \lambda), \lambda)$, где $p(x, \lambda) = \arg\max\limits_p L(x, p, \lambda)$. Из левой части (14) следует, что $L_p(x, p(x, \lambda), \lambda) = 0,$ т.е.

$$F(x) + p(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{l} \lambda^i h_i'(x) = 0. \tag{15}$$

Выражение для $p(x, \lambda) = -F(x) - \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda^i h_i'(x)$, полученное из (15), подставим в функцию Лагранжа $L(x, p, \lambda)$, откуда получаем

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2}||F(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda^i h_i'(x)||^2 - \sum_{i=1}^{l} \lambda^i h_i(x).$$

Согласно правой части (14) имеем $\Theta(x) = \min\limits_{\lambda\in\Lambda^+} \varphi(x, \lambda)$, и минимум достигается в точке $\lambda = \lambda(x)$, поскольку $\Theta(x) = \max\limits_p L(x, p, \lambda(x)) = \varphi(x, \lambda(x))$. Следовательно, $\Theta(x) = \min\limits_{\lambda\in\Lambda^+} \varphi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda(x))$.

Таким образом, задача (6), (13) преобразована в

$$\min_{x\in\Omega} \Theta(x), \tag{16}$$

$$\Theta(x) = \varphi(x, \lambda(x)) = \min_{\lambda\in\Lambda^+} \left\{\frac{1}{2}||F(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda^i h_i'(x)||^2 - \sum_{i=1}^{l} \lambda^i h_i(x)\right\}. \tag{17}$$

Если $x \in\Omega$, то из (17) следует, что $\Theta(x) \ge 0$, и для $x \in\Omega$, $\lambda \in \Lambda^+$ выполняется $0 \le \varphi(x, \lambda(x)) \le \varphi(x, \lambda)$.

Для пары Куна–Таккера $(x_*, \lambda_*) \in \mathbf{R}^{n+l}$ исходного в.н. (1), т.е. точки, удовлетворяющей (4), имеем $0 \le \varphi(x_*, \lambda(x_*) \le \varphi(x_*, \lambda_*) = 0,$ следовательно $\Theta(x_*) = = \varphi(x_*, \lambda(x_*)) = \varphi(x_*, \lambda_*) = 0,$ а x_* — точка глобального минимума функции $\Theta(x)$ на Ω. И наоборот, для точки $(x_*, \lambda(x_*))$ — решения задачи (16), выполняются условия (4).

Таким образом, оптимизационная задача (16), (17) эквивалентна исходному в.н. (1)–(3) и имеет такую же размерность, что и исходное в.н. Сведение в.н. к эквивалентной оптимизационной задаче позволяет использовать хорошо развитый аппарат оптимизации. Отметим однако, что непосредственное применение методов оптимизации к решению задачи (16), (17) ведет к увеличению вычислительных затрат, что обусловлено сложностью оптимизационной задачи (16), (17). Например, вычисление производных функций $\Theta(x)$ t-го порядка (когда они существуют) требует вычисления производных функций исходного в.н. $(t+1)$-го порядка. К тому же функция $\Theta(x)$ в общем случае недифференцируема.

Однако, используя специфику задачи (16), (17), ее решение можно представить как последовательный спуск функции $\varphi(x, \lambda)$ сначала по двойственным переменным λ, а затем по прямым переменным x. Зафиксировав точку x_k и найдя решение по двойственным переменным $\lambda_k = \arg\min \varphi(x_k, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, и прямое решение $p_k = -F(x_k) - \sum_{i=1}^{l} \lambda^{i_k} h_i'(x_k)$, определим очередное приближение $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, где шаг α_k вычислим из условия релаксации в точке x_k вдоль вектора p_k штрафной недифференцируемой функции

$$\Phi_N(x, \lambda_k) = \varphi(x, \lambda_k) + Nh^+(x) \tag{18}$$

при фиксированном λ_k, где $N > 0$ коэффициент штрафа.

Отметим, что минимизация функции $\varphi(x, \lambda)$ (задача (17)) решается достаточно эффективно стандартными средствами квадратичного программирования. Тогда, зная решение $\lambda(x)$ задачи (17), для определения решения $p(x)$ прямой задачи (12) используем тот факт, что решения этих задач связаны системой Куна–Таккера

$$F(x) + p(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda^i(x)\, h_i'(x) = 0,$$

$$\lambda^i(x)(h_i(x) + \langle h_i'(x), p(x)\rangle) = 0, \quad \lambda^i(x) \ge 0, \;\; i = 1, \ldots, l. \tag{19}$$

Специфика и свойства прямой (12) и двойственной (17) задач изучены в [9]. Относительно решения этих задач известны следующие оценки: на произвольном ограниченном множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{l} \lambda^i(x) \le \frac{1}{2\beta} || F(x) + (z - x)||^2$; решением задачи (12) является вектор $p(x) \to 0$ при $x \to x_*$. Относительно свойств штрафной функции (18) известно, что условия $\Phi_N(x, \lambda) = 0$ или $\Phi_N(x, \lambda) \to 0$ необходимы, а если $\sum_{i=1}^{l} \lambda^i \le N$, то и достаточны для того, чтобы соответственно $x = x_*$ или $x \to x_*$.

МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ В.Н.

Основываясь на свойствах задачи (16), (17) и свойствах штрафной функции (18), сформулируем алгоритм решения в.н., в котором используются только первые производные функций.

Пусть x_0 — произвольное начальное приближение и $\varepsilon \in (0; 1)$. Опишем k-ю итерацию метода $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $k = 0, 1, \ldots$, приняв, что точка x_k и значение N_{k-1} найдены.

Шаг 1. В точке x_k решить задачу (17), найти λ_k, из первого уравнения системы (19) определить p_k. Если $p_k = 0$, то $x_k = x_*$. Процесс закончен.

Шаг 2. Найти коэффициент штрафа N_k:

$$N_k = \max\left\{ N_{k-1},\; 2 \sum_{i \in I_{+(k)}} \lambda_k^i \right\}, \quad N_0 = 2 \sum_{i \in I_{+(0)}} \lambda_0^i,$$

$$I_{+(k)} = \{ i \in 0, 1, \ldots, l \mid h_i(x_k) > 0 \}.$$

Шаг 3. Определить длину шага α_k из условия убывания штрафной функции (18), т.е. найти наибольшее из чисел $\alpha = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots$, при котором выполняется неравенство

$$\Phi_{N_k}(x_k + \alpha p_k, \lambda_k) \le \Phi_{N_k}(x_k, \lambda_k) - \varepsilon \alpha^2 || p_k ||^2. \tag{20}$$

Найти $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$. Конец итерации.

Свойства алгоритма устанавливает следующая теорема.

Теорема. Сформулированный алгоритм сходится к решению в.н. (1), (2) по прямым и двойственным переменным $x_k \to x_*$, $\lambda_k \to \Lambda_*$. Каждая итерация метода осуществляется за равномерно ограниченное (по k) количество вычислений и $\alpha_k \geq \overline{\alpha} > 0$. При $k \geq k_0$ значение $N_k = N$ постоянно и справедливы оценки линейной скорости сходимости

$$\Phi_N(x_k, \lambda_k) \leq C_o q^k, \ \| p_k \| \leq C_1 q_1^k, \ \| x_k - x_* \| \leq C_2 q_1^k, \tag{21}$$

где q, $q_1 \in (0;1)$ — константы.

Доказательство обоснования правила выбора шагового множителя (20) в рассматриваемом алгоритме осуществляется по стандартной схеме, например, аналогично [8], а доказательство скорости сходимости (21) — аналогично [10].

Сравнивая описанный алгоритм с алгоритмом, построенным на идеях линеаризации [8], отметим, что они отличаются только правилом выбора шагового множителя. В предложенном алгоритме на основе эквивалентной оптимизационной задачи удается сократить вычисления по выбору шагового множителя, убрав проверку принадлежности очередного приближения допустимому множеству Ω, которая гарантируется спуском по штрафной функции (18). Однако решение задачи в.н. на основе эквивалентной оптимизационной задачи (16), (17) открывает возможность построения методов ньютоновского и квазиньютоновского типов, чего не удавалось сделать, используя идеи линеаризации. Действительно, согласно [9] в локальной окрестности точки x_* функция $\Theta(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для оператора $F(x)$, удовлетворяющего условию (3), в точке x_* выполняются достаточные условия минимума второго порядка. Это позволяет использовать методы ньютоновского типа, базирующиеся на методах последовательного квадратичного программирования в сочетании с модифицированными функциями Лагранжа [11], для решения эквивалентной оптимизационной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. — New York: Springer-Verlag, 2003. — **I.** — 728 p.
2. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. — New York: Springer-Verlag, 2003. — **II.** — 702 p.
3. Xiao B., Harker P.T. A nonsmooth Newton method for variational inequalities, I: Theory // Math. Progr. — 1994. — **65**, № 2. — P. 151–194.
4. Fukushima M. A relaxed projection method for variational inequalities // Math. Progr. — 1986. — **35**, № 1. — P. 58–70.
5. Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems // Math. Progr. — 1992. — **53**, № 1. — P. 99–110.
6. A global optimization approach for solving non-monotone variational inequality problems / M.-A. Majig, B. Barsbold, R. Enkhbat, M. Fukushima // Optimization. — 2009. — **58**. — P. 871–881.
7. Danilin Yu.M. On an approach to solution of variational inequalities // Тез. докл. II Укр. конф. «Автоматика-95», 24–30 сент. 1995 г. — Львов: Б.-и., 1995. — **1**. — С. 20.
8. Пшеничный Б.Н., Калжанов Т.У. Метод решения вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 6. — С. 48–55.
9. Данилин Ю.М., Шубенкова И.А. Оптимизация и решение выпуклых вариационных неравенств // Системні дослідження та інформ. технології. — 2003. — № 3. — С. 66–74.
10. Панин В.М., Александрова В.М. Линейная сходимость метода решения вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 3. — С. 175–179.
11. Данилин Ю.М. Последовательное квадратичное программирование и модифицированные функции Лагранжа // Там же. — 1994. — № 5. — С. 51–67.

Поступила 21.05.2012