УДК 519.21

И.Я. УСАР, Е.А. ЛЕБЕДЕВ

СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Ключевые слова: *система с повторными вызовами, стационарный режим, пороговая стратегия, оптимизация.*

Результаты для систем с повторными вызовами представляют один из важных разделов теории массового обслуживания [1]. Подробный обзор соответствующих результатов можно найти в [2, 3]. Системы с повторными вызовами широко используются в качестве математической модели для реальных систем в экономике, практике проектирования компьютерных сетей, современных системах мобильной связи, для описания посадки воздушных судов и др. [4–6], что объясняет интенсивное развитие за последние десятилетия теории этих систем.

Характерная особенность рассматриваемых систем заключается в том, что в случае занятости всех приборов прибывшие требования попадают на виртуальную орбиту и потом снова через случайный промежуток времени повторяют попытку получить обслуживание. Отметим, что в рамках моделей систем с повторными вызовами можно ставить и решать задачи оптимального выбора параметров системы, чему и посвящена настоящая статья. В ней рассмотрена система обслуживания с повторными вызовами типа $M_Q / M / m / \infty$, в которой интенсивность входящего потока λ_j зависит от j — количества источников повторных вызовов. Время обслуживания на каждом из m приборов показательное с параметром μ. Если все приборы заняты, то требование переходит на орбиту и повторяет попытку получить обслуживание через случайное время, которое имеет показательное распределение с параметром ν. Интенсивности обслуживания и повторных вызовов являются постоянными. Символ ∞ в кодировке системы обозначает емкость орбиты.

Для поиска стационарного распределения процесса обслуживания в системе $M_Q / M / m / \infty$ предложен подход, состоящий из двух этапов: на первом находятся явные формулы стационарного распределения в векторно-матричной форме для конечной орбиты, на втором — стационарные вероятности для бесконечной орбиты аппроксимируются вероятностями, полученными на первом этапе.

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В качестве модели процесса обслуживания рассмотрим двухмерную цепь Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ с непрерывным временем в фазовом пространстве $S = I \times J$, $I = \{0, 1, \ldots, m\}$, $J = \{0, 1, \ldots\}$, где $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ — количество занятых приборов и источников повторных вызовов соответственно. Инфинитезимальные характеристики $q_{(i,j)(i',j')}$ цепи $Q(t)$ заданы следующими соотношениями:

— если $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j \in J$, то

$$q_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j & \text{при} \quad (i', j') = (i+1, j), \\ i\mu & \text{при} \quad (i', j') = (i-1, j), \\ j\nu & \text{при} \quad (i', j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu) & \text{при} \quad (i', j') = (i, j), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{1}$$

— если $i = m$, $j \in J$, то

$$q_{(m,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j & \text{при } (i', j') = (m, j+1), \\ m\mu & \text{при } (i', j') = (m-1, j), \\ -(\lambda_j + m\mu) & \text{при } (i', j') = (m, j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Выясним условия существования стационарного режима для процесса $Q(t)$.

Лемма 1. Пусть $\lambda = \limsup\limits_{j} \lambda_j < \infty$. Тогда при $\dfrac{\lambda}{m\mu} < 1$ цепь $Q(t)$ эргодическая и ее предельное распределение совпадает с единственным стационарным.

Доказательство. В качестве тест-функций Ляпунова рассмотрим функции вида

$$\varphi(i, j) = ai + j, \quad (i, j) \in S. \tag{3}$$

Для указанных тест-функций средний перенос

$$y_{ij} = \sum_{(i',j') \neq (i,j)} q_{(i,j)(i',j')} (\varphi(i', j') - \varphi(i, j))$$

составит

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j a - i\mu a + j\nu(a-1), & 0 \le i \le m-1, \\ \lambda_j - m\mu a, & i = m. \end{cases}$$

При $\dfrac{\lambda}{m\mu} < 1$ для любого $a \in \left(\dfrac{\lambda}{m\mu}, 1\right)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $y_{ij} < -\varepsilon$ для всех $(i, j) \in S$ за исключением конечного числа состояний $(i, j) \in S$. Таким образом, для тест-функций (3) выполняются условия теоремы Твиди из [2].

Лемма доказана.

Переменный характер интенсивности входящего потока в моделях типа $M_Q / M / m / \infty$ дает возможность ставить и решать для них различные оптимизационные задачи. Рассмотрим класс пороговых стратегий, которые задаются числами $0 = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{N-1} < H_N = \infty$, $H' = (H_1, H_2, \ldots, H_{N-1})$, где N — фиксированное число. Если в момент времени $t \ge 0$ количество источников повторных вызовов $Q_2(t) \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \ldots, N$, то будем говорить, что система с повторными вызовами функционирует в i-м режиме и интенсивность входящего потока равна h_i. Другие параметры от режима не зависят. Выбор пороговой стратегии означает фиксацию зависимости λ_j от числа источников повторных вызовов: $\lambda_j = h_i$, $j \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Индекс H, $Q(t) = Q(t, H), \ldots$, присвоим соответствующему процессу обслуживания и его характеристикам.

Пусть $S_1(t, H)$ — количество вызовов, обслуживание которых завершено в системе за время t; $S_2(t, H)$ — количество первичных вызовов, которые получили отказ в обслуживании и стали повторными; $S_3(t, H)$ — количество переключений интенсивности входящего потока. Если существуют пределы $\lim\limits_{t \to \infty} t^{-1} S_i(t, H)$, то обозначим их $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$W(H) = C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \to \max, \tag{4}$$

$$0 = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{N-1} < H_N = \infty, \; H_i \in \{0, 1, \ldots\}, \; i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где C_1 — прибыль, связанная с обслуживанием одного вызова; C_2 — штраф за отказ в обслуживании первичного вызова и перевод его на орбиту; C_3 — штраф за переключение интенсивности входящего потока.

Решением задачи (4) является такая пороговая стратегия H, которая максимизирует средний доход от работы системы. Подобные оптимизационные задачи для одноканальных систем с повторными вызовами рассмотрены в [7, 8].

В условиях существования стационарного режима (условия леммы 1) предельные функционалы $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$, тоже существуют и их можно выписать, подставив стационарные вероятности π_{ij}, $(i, j) \in I \times J$:

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} i\mu\pi_{ij}(H), \; S_2(H) = \sum_{i=1}^{N} h_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i - 1} \pi_{mj}(H),$$

$$S_3(H) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(h_i \pi_{mH_i - 1}(H) + \nu H_i \sum_{k=0}^{m-1} \pi_{kH_i} \right).$$

Таким образом, для решения оптимизационной задачи необходимы эффективные алгоритмы расчета стационарного распределения для системы типа $M_Q / M / m / \infty$.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНОЙ ОРБИТОЙ

Система с повторными вызовами и конечной орбитой имеет ограничение N на максимально возможное количество источников повторных вызовов. Инфинитезимальные характеристики $q^{(N)}_{(i,j)(i',j')}$ для процесса обслуживания $Q^{(N)}(t) = (Q_1^{(N)}(t), Q_2^{(N)}(t))$ совпадают с (1) при $i = 0, 1, \ldots, m-1$ и $j = 0, 1, \ldots, N$, а также с (2) при $i = m$ и $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Если $i = m$ и $j = N$, то

$$q^{(N)}_{(m,N)(i',j')} = \begin{cases} m\mu & \text{при } (i', j') = (m-1, N), \\ -m\mu & \text{при } (i', j') = (m, N), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Цепь Маркова $Q^{(N)}(t)$ принимает значение в конечном множестве состояний $S^{(N)} = I \times J^{(N)}$, $J^{(N)} = \{0, 1, \ldots, N\}$, и является эргодической. Обозначим ее стационарное распределение $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S^{(N)}$.

Поскольку интенсивность входящего потока зависит от количества повторных вызовов, для поиска стационарных вероятностей невозможно использование производящих функций. В рассматриваемом случае на основании теоремы о равенстве потоков вероятностей через границу замкнутого контура в стационарном режиме преобразуем систему уравнений Колмогорова к виду, который позволит выписать стационарные вероятности в явном векторно-матричном виде.

Чтобы сформулировать основной результат, введем обозначения. Пусть $A(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, — трехдиагональная матрица вида

$$A(j) = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(+)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(-)} & a_1^{(0)} & a_1^{(+)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(-)} & a_2^{(0)} & a_2^{(+)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m-2}^{(-)} & a_{m-2}^{(0)} & a_{m-2}^{(+)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m-1}^{(-)} & a_{m-1}^{(0)} \end{pmatrix},$$

где $a_i^{(0)} = \lambda_j + i\mu + j\nu$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$; $a_i^{(+)} = -\lambda_j$, $i = 0, 1, \ldots, m-2$; $a_i^{(-)} = -i\mu$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются матрицами размерности $(m \times m)$.

Обозначим треугольную матрицу

$$D(N) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -(N\nu + \lambda_N) & 2\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -N\nu & -(N\nu + \lambda_N) & 3\mu & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \cdots & -(N\nu + \lambda_N) & (m-1)\mu \end{pmatrix},$$

а также векторы

$$\pi'^{(N)}(j)=(\pi_{0j}^{(N)},\pi_{1j}^{(N)},\ldots,\pi_{m-1j}^{(N)}),$$

$$G'^{(N)}(j)=\frac{\pi'^{(N)}(j)}{\pi_{0N}^{(N)}}=(G_{0j}^{(N)},G_{1j}^{(N)},\ldots,G_{m-1j}^{(N)}).$$

Обозначим $(m-1)$-мерный вектор, состоящий из единиц, $\overline{1}(m-1)$; $(m-1)$-мерный вектор, i-я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю, $e_i(m-1)$; $\overline{1}, e_i$ — аналогичные векторы размерности m.

Теорема 1. Если $\lambda_j>0$, $j=0,1,\ldots,N$, то стационарные вероятности $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i,j)\in S^{(N)}$, имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix}\pi_{1N}^{(N)}\\ \pi_{2N}^{(N)}\\ \cdots\\ \pi_{m-1N}^{(N)}\end{pmatrix}=\pi_{0N}^{(N)}D^{-1}(N)(N\nu\overline{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1)),\ \ j=0,1,\ldots,N-1; \tag{5}$$

$$\pi_{mN}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu}G'^{(N)}(N)(N\nu\overline{1}+\lambda_N e_m),\ \ j=0,1,\ldots,N-1;$$

$$\pi'^{(N)}_j=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\,\nu^{N-j}}{j!}G'^{(N)}(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j),\ \ j=0,1,\ldots,N-1; \tag{6}$$

$$\pi_{mj}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\,\nu^{N-j}}{\lambda_j\, j!}G'^{(N)}(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\overline{1},\ \ j=0,1,\ldots,N-1, \tag{7}$$

где

$$\pi_{0N}^{(N)}=\left\{G'^{(N)}(N)\left(\overline{1}+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\times T(j+1)\left[T(j)+\frac{1}{\lambda_j}\right]\overline{1}+\frac{1}{m\mu}(N\nu\overline{1}+\lambda_N e_m)\right)\right\}^{-1}, \tag{8}$$

$$G^{(N)}(N)=\begin{pmatrix}1\\ D^{-1}(N)(N\nu\overline{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1))\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$T(j)=\left[B+\frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j),\ \ j=0,1,\ldots,N-1.$$

Доказательство. Для удобства обозначим $\pi_{ij}^{(N)}=\widetilde{\pi}_{ij}$, $G_{ij}^{(N)}=\widetilde{G}_{ij}$, $(i,j)\in S^{(N)}$. Для каждого $k=0,1,\ldots,m-1$ разобьем $S^{(N)}$ на два подмножества: $E_k=\{(0,N),(1,N),\ldots,(k,N)\}$ и $\overline{E}_k=S^{(N)}\setminus E_k$. В силу равенства потоков вероятностей через замкнутый контур в стационарном режиме [6] имеем

$$N\nu\widetilde{\pi}_{0N}+N\nu\widetilde{\pi}_{1N}+\ldots+N\nu\widetilde{\pi}_{k-1N}+(N\nu+\lambda_N)\widetilde{\pi}_{kN}=$$
$$=(k+1)\mu\widetilde{\pi}_{k+1N},\ \ k=0,1,\ldots,m-1. \tag{10}$$

Для $\widetilde{G}_{ij}=\dfrac{\widetilde{\pi}_{ij}}{\widetilde{\pi}_{0N}}$, $(i,j)\in S^{(N)}$, первые $(m-1)$ уравнения из системы (10) имеют вид

$$\begin{pmatrix}\widetilde{G}_{1N}\\ \dots\\ \widetilde{G}_{m-1\,N}\end{pmatrix}=D^{-1}(N)(N\nu\bar{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1)),$$

что дает (9). Из (10) при $k=m-1$ получаем

$$\widetilde{G}_{mN}=\frac{1}{m\mu}\widetilde{G}'(N)(N\nu\bar{1}+\lambda_N e_m)\,. \tag{11}$$

Найдем $\widetilde{G}_{mj}$ при условии, что $j=0,1,\dots,N-1$. Разобьем $S^{(N)}$ на два подмножества: $S_j^{(N)}=\{(\alpha,\beta)\in S^{(N)}:\beta\le j\}$ и $\bar{S}_j^{(N)}=S^{(N)}\setminus S_j^{(N)}$. Снова используя равенство потоков вероятностей через замкнутый контур, имеем $\lambda_j\widetilde{\pi}_{mj}=$ $=(j+1)\nu\widetilde{\pi}_{0\,j+1}+\dots+(j+1)\nu\widetilde{\pi}_{m-1\,j+1}$, откуда получаем

$$\widetilde{G}_{mj}=\frac{(j+1)\nu}{\lambda_j}\widetilde{G}'(j+1)\bar{1},\quad j=0,1,\dots,N-1\,. \tag{12}$$

Рассмотрим $m\times N$ замкнутых контуров, которые содержат одну точку (i,j) из области $\widetilde{S}^{(N)}=\{0,1,\dots,m-1\}\times\{(0,1,\dots N-1\}$. Соответствующие уравнения для $\widetilde{G}_{ij}$, $(i,j)\in\widetilde{S}^{(N)}$, имеют вид

$$(\lambda_j+j\nu)\widetilde{G}_{0j}=\mu\widetilde{G}_{1j},\quad i=0, \tag{13}$$

$$(\lambda_j+i\mu+j\nu)\widetilde{G}_{ij}=(j+1)\nu\widetilde{G}_{i-1\,j+1}+\lambda_j\widetilde{G}_{i-1\,j}+(i+1)\mu\widetilde{G}_{i+1\,j},\quad i=1,2,\dots,m-2. \tag{14}$$

При $i=m-1$ с учетом (12) получаем

$$(\lambda_j+(m-1)\mu+j\nu)\widetilde{G}_{m-1\,j}=$$

$$=(j+1)\nu\widetilde{G}_{m-2\,j+1}+\lambda_j\widetilde{G}_{m-2\,j}+\frac{(j+1)m\mu\nu}{\lambda_j}\widetilde{G}'(j+1)\bar{1}. \tag{15}$$

Представим систему (13)–(15) в векторно-матричном виде

$$\widetilde{G}'(j)=(j+1)\nu\widetilde{G}'(j+1)\left[B+\frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j)=$$

$$=(j+1)\nu\widetilde{G}'(j+1)T(j),\quad j=0,1,\dots,N-1. \tag{16}$$

Подставляя правую часть (16) в (12), имеем

$$\widetilde{G}_{mj}=\frac{N!\,\nu^{N-j}}{j!\,\lambda_j}\widetilde{G}'(N)T(N-1)\times\dots\times T(j+1)\bar{1},\quad j=0,1,\dots,N-1.$$

Условие нормировки для стационарных вероятностей $\widetilde{\pi}_{ij}$, $(i,j)\in S$, позволяет найти $\widetilde{\pi}_{0N}$. Это дает формулу (8). Соотношения (5)–(7) являются прямым следствием (11)–(16).

Теорема доказана.

Очевидно, формулы (5)–(9) представляют собой эффективную рекуррентную процедуру для вычисления стационарного распределения.

Если справедливы условия леммы 1 и $N \to \infty$, то стационарные вероятности $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S^{(N)}$, сходятся к соответствующим вероятностям системы типа $M_Q / M / m / \infty$.

СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ПРИБОРОВ

Рассмотрим систему типа $M_Q / M / 2 / \infty$. В этом классе моделей можно провести более подробный анализ и получить явные формулы.

Положим, не нарушая общности, $\mu = 1$ и

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \dfrac{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}, & i < j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

где $\rho_k = \dfrac{\lambda_k}{2\mu} = \dfrac{\lambda_k}{2}$ — загрузка системы первичными требованиями, когда $Q_2(t) = k$.

Следствие 1. При условиях $\lambda_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots$, и $\limsup_j \lambda_j / 2 < 1$ для системы с повторными вызовами типа $M_Q / M / 2 / \infty$ стационарные вероятности имеют вид

$$\pi_{0j} = \frac{R_j}{j!\,\nu^j}, \quad \pi_{1j} = \frac{(\lambda_j + j\nu)R_j}{j!\,\nu^j},$$

$$\pi_{2j} = \frac{(1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu)R_j}{\lambda_j\, j!\,\nu^j} \cdot \frac{\rho_j[(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]}{1+\rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu}, \tag{17}$$

где

$$R_j = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(j)}{i!\,\nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{i!\,\nu^i A_j(i)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i\, i!\,\nu^i} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i\, i!\,\nu^i A_j(i+1)} \right\}^{-1}. \tag{18}$$

Доказательство. Сначала изучим модель $M_Q / M / 2 / N$, где N — максимально возможное количество источников повторных вызовов. Применим к этой системе результаты теоремы 1, которая дает явные формулы для стационарных вероятностей. Действительно, в данном случае

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j + j\nu & -\lambda_j \\ -1 & 1+\lambda_j + j\nu \end{pmatrix}$$

и

$$T(j) = \frac{1}{\rho_j[(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]} \begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \; j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Из формул (5)–(9) после соответствующих преобразований получаем

$$\pi_{0j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\,\nu^{N-j} A_j(N)}{j!}, \quad \pi_{1j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\,\nu^{N-j} (\lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{2j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!},\ \ j=0,1,\dots,N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}(\lambda_N+N\nu),\ \pi_{2N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{(\lambda_N+N\nu)^2+N\nu}{2},$$

$$\pi_{0N}^{(N)}=\left\{1+\lambda_N+N\nu+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}+\right.$$

$$\left.+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!}+\frac{1}{2}((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu)\right\}^{-1}.$$

Переходя к пределу в этих формулах при $N\to\infty$, получаем

$$R_j\equiv\lim_{N\to\infty}\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)=\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(N)}{i!\nu^i A_j(N)}+\right.$$

$$\left.+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i A_j(N)}\right\}^{-1}.$$

Если $i,j<N$, то

$$\frac{A_i(N)}{A_j(N)}=\begin{cases}A_i(j), & \text{если}\ \ i<j,\\ A_i(i)=1, & \text{если}\ \ i=j,\\ A_j^{-1}(i), & \text{если}\ \ i>j,\end{cases}$$

и поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)=\left\{\sum_{i=0}^{j}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i A_j(i)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i A_j(i+1)}\right\}^{-1}.$$

Из этих соотношений получаем (17), (18). Следствие доказано.

Изучим скорость сходимости стационарных вероятностей для систем $M_Q/M/2/N$ и $M_Q/M/2/\infty$. Анализируя явный вид формул для π_{ij} и $\pi_{ij}^{(N)}$, получаем следующий результат.

Следствие 2. Пусть для системы $M_Q/M/2/\infty$ справедливы условия следствия 1. Тогда для любого j имеем

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}|=\frac{1}{2j!\nu^{j-2}\theta_j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}|=\frac{\lambda_j+j\nu}{2j!\nu^{j-2}\theta_j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_{j+1}(N)|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}|=\frac{1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{2\lambda_j j!\nu^{j-2}\theta_j^2},$$

где

$$\theta_j = \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu) A_i(j)}{i!\nu^i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\lambda_i i! \nu^i} +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{i!\nu^i A_j(i)} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i! \nu^i A_j(i+1)} .$$

Рассмотрим пример системы типа $M_Q / M / 2 / 20$, функционирующей в двух режимах, выбор которых определяется порогом $H \in \{1, 2, \ldots, 19\}$. Зафиксированы следующие параметры системы: $h_1 = 2{,}5$; $h_2 = 0{,}5$; $\mu = 1$; $\nu = 0{,}1$. Коэффициенты качества равны: $C_1 = 6$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$.

Программа, написанная на основе полученных формул, дает следующие значения целевого функционала:

$$W(1) = 3{,}29487;\ W(2) = 3{,}42729;\ W(3) = 3{,}53285;\ W(4) = 3{,}61861;$$

$$W(5) = 3{,}68956;\ W(6) = 3{,}74924;\ W(7) = 3{,}80022;\ W(8) = 3{,}84437;$$

$$W(9) = 3{,}88309;\ W(10) = 3{,}91744;\ W(11) = 3{,}94823;\ W(12) = 3{,}97605;$$

$$W(13) = 4{,}00132;\ W(14) = 4{,}02418;\ W(15) = 4{,}04396;\ W(16) = 4{,}05742;$$

$$W(17) = 4{,}05189;\ W(18) = 3{,}97815;\ W(19) = 3{,}61672 .$$

Таким образом, максимум целевой функции 4,05742 достигается для порога $H = 16$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко И.Н., Коба Е.В. К классификации СМО с повторением вызовов // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 84–91.
2. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial Queues. — London: Chapman and Hall, 1997. — 317 p.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. — Berlin: Springer, 2008. — 317 p.
4. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis // Revista Matematica Complutense. — 2002. — **15**. — P. 101–129.
5. Anisimov V.V., Artalejo J.R. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // Queuing Systems. — 2001. — **39**. — P. 157–182.
6. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. — М.: Мир, 1993. — 336 с.
7. Клименок В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами // Автоматика и вычислительная техника. — 1990. — № 1. — С. 25–30.
8. Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети // Там же. — 1991. — № 2. — С. 25–31.

Поступила 13.12.2012