УДК 519.21

Д.А. ГОЛОЛОБОВ, Е.И. КАСИЦКАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТОДА ЭМПИРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Ключевые слова: *метод эмпирических средних, случайное поле, вероятность, функция, минимизация, непрерывность.*

ВВЕДЕНИЕ

Метод эмпирических средних [1–4] — один из наиболее эффективных аппроксимационных методов в теории стохастической оптимизации. В значительной мере это обусловлено его тесной связью с теорией статистического оценивания и оптимального управления. Достаточно хорошо развитая теория асимптотического оценивания предоставляет инструменты для исследования сходимости и скорости сходимости итеративных процедур стохастического программирования, кроме того, методы стохастического программирования позволяют строить приближенные оценки неизвестных параметров стохастических систем. В настоящей работе рассматриваются задачи оптимизации стохастических систем на основе наблюдений случайных полей в некоторой ограниченной области.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\{\xi(\vec{t}) = \xi(\vec{t}, \omega), \vec{t} \in \mathbf{R}^m\}$, $m \geq 1$, — однородное в узком смысле случайное поле на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ со значениями в некотором метрическом пространстве $(Y, \mathbf{B}(Y))$. Предполагается, что реализации $\xi(\vec{t})$ непрерывны на $\mathbf{R}^m$ с вероятностью единица. Задана непрерывная неотрицательная функция $b: J \times Y \to \mathbf{R}$, где J — замкнутое подмножество $\mathbf{R}^l$, $l \geq 1$.

Имеются наблюдения $\{\xi(\vec{t}): ||\vec{t}|| < T\}$, $T > 0$. Требуется найти точки минимума и минимальное значение функции

$$F(\vec{u}) = \mathbf{M} f(\vec{u}, \xi(\vec{0})), \ \vec{u} \in J. \tag{1}$$

Сформулируем некоторые вспомогательные результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1 [5]. Пусть $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in \mathbf{R}$, — однородное в широком смысле случайное поле со значениями в $\mathbf{R}$; $\mathbf{M}(\xi)\vec{t}) = 0$, $b(\vec{t}) = \mathbf{M}\xi(\vec{t} + \vec{s})\xi(\vec{s})$. Реализации $\xi(\vec{t})$ предполагаются измеримыми по Лебегу в $\mathbf{R}^k$ с вероятностью единица. Обозначим

$$X(\tau) = \int_{||\vec{t}||<\tau} \xi(\vec{t}) d\vec{t}, \ \ B(\tau) = \int_{||\vec{t}||<\tau} b(\vec{t}) d\vec{t}, \Lambda(\tau) = \int_{||\vec{t}||<\tau} d\vec{t}.$$

Предположим, что $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln\rho)^2}{\rho^k} \left(\int_0^\rho \frac{1}{\tau^2} |B(\tau)| \, d\tau \right) d\rho < \infty.$

Тогда с вероятностью единица имеем

$$\frac{X(\tau)}{\Lambda(\tau)} \to 0, \ \ \tau \to \infty.$$

© Д.А. Гололобов, Е.И. Касицкая, 2013

Теорема 2 [6]. Пусть $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, K — компактное подмножество некоторого банахова пространства с нормой $\|\bullet\|$. Предположим, что

$$\{Q_T(s) = Q_T(s, \omega) \in K \times \Omega,\ T \in \mathbf{R},\ T > 0\}$$

есть семейство действительных функций, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых T, S функция $Q_T(s, \omega)$, $\omega \in \Omega$, измерима;

2) при фиксированных T и ω функция $Q_T(s, \omega)$, $s \in K$, непрерывна;

3) для некоторого элемента $s_0 \in K$ при каждом $s \in K$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\lim_{T \to \infty} Q_T(s, \omega) = \Phi(s, s_0)\} = 1,$$

где $\Phi(s, s_0) > \Phi(s_0, s_0)$, $s \neq s_0$;

4) существуют $\gamma_0 > 0$ и функция $c(\gamma)$, $\gamma > 0$; $c(\gamma) \to 0$, $\gamma \to 0$, такие, что для любого элемента $s' \in K$ при любом $0 < \gamma < \gamma_0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim_{T \to \infty}} \sup_{\|s - s'\| < \gamma} |Q_T(s) - Q_T(s')| < c(\gamma) \right\} = 1.$$

Для каждого $T > 0$ и $\omega \in \Omega$ определим элемент $s(T) = s(T, \omega) \in K$ с помощью соотношения

$$Q_T(s(T)) = \min_{s \in K} Q_T(s).$$

В случае, когда имеется более одной точки минимума функции Q_T, в качестве $s(T)$ возьмем любую из них. Функцию $s(T, \omega)$, $T > 0$, $\omega \in \Omega$, выберем таким образом, чтобы для любого T и произвольной непрерывной функции $\mathsf{g} = \mathsf{g}(s)$: $K \to \mathbf{R}$ отображения $\mathsf{g}(s(T, \omega))$ и $Q_T(s(T, \omega), \omega)$, $\omega \in \Omega$, были измеримыми [7]. Тогда

$$\mathbf{P}\{\|s(T) - s_0\|\} \to 0,\ Q_T(s(T)) \to \Phi(s_0, s_0),\ T \to \infty\} = 1.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ

Задачу (1) аппроксимируем задачей минимизации функции

$$F_T(\vec{u}) = \frac{\int\limits_{\|\vec{t}\| < T} b(\vec{u}, \xi(\vec{t}))d\vec{t}}{\int\limits_{\|\vec{t}\| < T} d\vec{t}},\quad \vec{u} \in J. \tag{2}$$

Обозначим

$$b_1(\vec{t}) = b_1(\vec{t}, c) =$$

$$= \frac{\mathbf{M}\left(\inf\limits_{\|\vec{u}\| > c} f(\vec{u}, \xi(\vec{t})) - \mathbf{M}f \inf\limits_{\|\vec{u}\| > c} f(\vec{u}, \xi(\vec{0}))\right)\left(\inf\limits_{\|\vec{u}\| > c} f(\vec{u}, \xi(\vec{0})) - \mathbf{M}f \inf\limits_{\|\vec{u}\| > c} f(\vec{u}, \xi(\vec{0}))\right)}{\left(\inf\limits_{\|\vec{u}\| > c} f(\vec{u}, \xi(\vec{0})) - \mathbf{M}f \inf\limits_{\|\vec{u}\| > c} f(\vec{u}, \xi(\vec{0}))\right)^2},$$

$$b_2(\vec{t}) = b_2(\vec{t}, \vec{u}) = \frac{\mathbf{M}(f(\vec{u}, \xi(\vec{t})) - F(\vec{u}))(f(\vec{u}, \xi(\vec{0})) - F(\vec{u}))}{\mathbf{M}(f(\vec{u}, \xi(\vec{0})) - F(\vec{u}))^2},$$

$$b_3(\vec{t}\,) = b_3(\vec{t}, K, \gamma) =$$

$$= \frac{\mathbf{M}(\Psi(K,\gamma,\xi(\vec{t}\,)) - \mathbf{M}\Psi(K,\gamma,\xi(\vec{0})))(\Psi(K,\gamma,\xi(\vec{0})) - \mathbf{M}\Psi(K,\gamma,\xi(\vec{0})))}{\mathbf{M}(\Psi(K,\gamma,\xi(\vec{0})) - \mathbf{M}\Psi(K,\gamma,\xi(\vec{0})))^2},$$

где $\Psi(K,\gamma,z) = \sup\limits_{\vec{u},\vec{v}\in K:\ \|\vec{u}-\vec{v}\|<\gamma} |f(\vec{u},z) - f(\vec{v},z)|$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Предположим, что справедливы условия:

1) для любого $c>0$ имеем

$$\mathbf{M}\left\{\max_{\|\vec{u}\|<c} (f(\vec{u},\xi(\vec{0})))^2\right\} < \infty;$$

2) если J не ограничено, то для каждого $z\in Y$ имеем

$$f(\vec{u},z)\to\infty,\ \|\vec{u}\|\to\infty;$$

3) функция (1) имеет единственную точку минимума $\vec{u}_0$;

4) при всех $c>0$, $\vec{u}\in J$ для любого компакта $K\subset J$, $\gamma>0$ имеем

$$\int_0^1 \frac{(\ln\rho)^2}{\rho^m}\left(\int_0^\rho \frac{1}{\tau^2}|B_i(\tau)|\,d\tau\right)d\rho<\infty,\ i=\overline{1,3},$$

где $B_i(\tau) = \int\limits_{\|\vec{t}\|<\tau} b_i(\vec{t}\,)\,d\vec{t}$, $i=\overline{1,3}$.

Тогда при всех $T>0$, $\omega\in\Omega'$, $\mathbf{P}(\Omega')=1$ существует по крайней мере одна точка минимума $\vec{u}(T)=\vec{u}(T,\omega)$ функции (2). Для любого $T>0$ функцию $\vec{u}(T,\omega)$ выберем $\mathcal{G}'$-измеримой, где $\mathcal{G}'=\{A\in\mathcal{G}: A\subset\Omega'\}$.

Для любой точки минимума $\vec{u}(T)$ имеем

$$\mathbf{P}\{\vec{u}(T)\to\vec{u}_0,\ F_T(\vec{u}(T))\to F(\vec{u}_0),\ T\to\infty\}=1.$$

Доказательство. Из непрерывности f и теоремы Лебега о предельном переходе следует, что с вероятностью единица при всех T функция $F_T(\vec{u})$, $\vec{u}\in J$, непрерывна. Если J не ограничено, то по условию 2 с вероятностью единица для любого T имеем $F_T(\vec{u})\to\infty$, $\|\vec{u}\|\to\infty$. Поэтому существует $\Delta=\Delta(T,\omega)>0$, для которого при $\|\vec{u}\|>\Delta$ получаем $F_T(\vec{u})>F_T(\vec{u}_0)$, откуда $\inf\limits_{\vec{u}\in J} F_T(\vec{u}) = \inf\limits_{\vec{u}\in J:\ \|\vec{u}\|\le\Delta} F_T(\vec{u})$. Следовательно, при каждом $T>0$ и $\omega\in\Omega'$, $\mathbf{P}(\Omega')=1$ найдется по крайней мере одна точка минимума $\vec{u}(T)=\vec{u}(T,\omega)$ функции (2). Из измеримости функции $F_T(\vec{u},\omega)$, $\omega\in\Omega'$, и свойств измеримых отображений [3] вытекает, что можно выбрать $\vec{u}(T,\omega)$, $\omega\in\Omega'$, таким образом, чтобы отображение было $\mathcal{G}'$-измеримо.

Далее покажем, что при неограниченном J существует $c>0$ такое, что с вероятностью единица, начиная с некоторого T, зависящего от ω, все точки минимума (2) принадлежат множеству

$$K_c = \{\vec{u}\in J: \|\vec{u}\|\le c\}.$$

Обозначим

$$\varphi(c,\gamma) = \inf_{\|\vec{u}\|>c} f(\vec{u},z).$$

В силу условия 2 с вероятностью единица при каждом $\vec{t} \in \mathbf{R}^m$ имеем

$$\varphi(c, \xi(\vec{t})) \to \infty, \ c \to \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{M}\varphi(c, \xi(\vec{0})) \to \infty, \ c \to \infty.$

Выберем c_0 таким образом, чтобы

$$\mathbf{M}\varphi(c_0, \xi(\vec{0})) > \mathbf{M}\varphi(\vec{u}_0, \xi(\vec{0})) . \tag{3}$$

По условию 4 к случайным полям $\varphi(c, \xi(\vec{t}))$ и $f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))$ применима теорема 1 . Таким образом, из (3) с вероятностью единица, начиная с некоторого T, зависящего от ω, имеем

$$\frac{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \varphi(c_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t}}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}} > \frac{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t}\,'}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}} = F_T(\vec{u}_0) . \tag{4}$$

Поскольку

$$\inf_{\|\vec{u}\|>c_0} F_T(\vec{u}) \geq \frac{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \varphi(c_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t}}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}},$$

из (4) получаем необходимое утверждение.

Проверим справедливость условий теоремы 2 для семейства функций

$$\{F_T : K \times \Omega' \to \mathbf{R}, T > 0\},$$

где $K = K_{c_0}$.

Условия 1 и 2 выполнены. Из условия 4 теоремы 3 и теоремы 1 следует, что для любого $\vec{u} \in J$ с вероятностью единица $F_T(\vec{u}) \to F(\vec{u}), \ T \to \infty$. Из непрерывности f и теоремы Лебега о предельном переходе вытекает непрерывность функции $F(\vec{u})$. Учитывая условие 3 теоремы 3, получаем справедливость условия 3 теоремы 2.

Обозначим

$$\psi(\gamma, z) = \sup_{\vec{u}, \vec{v} \in K: \|\vec{u}-\vec{v}\|<\gamma} |f(\vec{u}, \mathrm{z}) - f(\vec{v}, \mathrm{z})| .$$

С вероятностью единица для любых $T > 0, \ \vec{u}' \in K, \ \gamma > 0$ имеем

$$\zeta_T(\vec{u}', \gamma) = \sup_{\vec{u} \in K: \|\vec{u}-\vec{u}'\|<\gamma} |F_T(\vec{u}) - F_T(\vec{u}')| \leq \frac{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \psi(\gamma, \xi(\vec{t}))d\vec{t}}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}}. \tag{5}$$

По условию 4 к полю $\psi(\gamma, \xi(\vec{t}))$ применима теорема 1, т.е. для любого $\gamma > 0$ с вероятностью единица получаем

$$\frac{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \psi(\gamma, \xi(\vec{t}))d\vec{t}}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}} \to \mathbf{M}\psi(\gamma, \xi(\vec{0})), \ T \to \infty. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$c(\gamma)=\mathbf{M}\psi(\gamma,\xi(\vec{0}))+\gamma,\ \gamma>0.$$

Из соотношений (5), (6) следует, что при всех $\vec{u}'\in K,\ \gamma>0$ получаем

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\zeta_T(\vec{u}',\gamma)<c(\gamma)\right\}=1.$$

Из непрерывности f и компактности K имеем

$$\psi(\gamma,z)\searrow 0,\ \gamma\to 0.$$

Применив теорему о предельном переходе, получим

$$c(\gamma)\to 0,\ \gamma\to 0.$$

Итак, выполнено условие 4 теоремы 2.

Из теоремы 2 вытекает справедливость теоремы 3.

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении исследуемых оценок.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭМПИРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Предположим, что выполнены условия теоремы 3, а также следующие:

1) $\vec{u}_0$ — внутренняя точка J;

2) существует такая замкнутая окрестность S точки $\vec{u}_0$, что для любого $z\in Y$ функция $f(\vec{u},z),\ \vec{u}\in S$, дважды непрерывно дифференцируема;

3) функции $\vec{\nabla} f(\vec{u}_0,z),\ \Phi(\vec{u}_0,z),\ z\in Y$, непрерывны на Y, где

$$\nabla f(\vec{u},z)=\frac{df}{du_j}(\vec{u},z)_{j=1}^{l};\quad \Phi(\vec{u},z)=\frac{d^2 f}{du_j du_k}(\vec{u},z)_{j,k=1}^{l};\quad \vec{u}=(\vec{u}_j)_{j=1}^{l}\in S,\quad z\in Y;$$

4) $\mathbf{M}\{\max_{\vec{u}\in S}||\vec{\nabla} f(\vec{u},\xi(\vec{0}))||\}<\infty$;

5) для любого $T>0$ с вероятностью единица

$$\int_{||\vec{t}\,||<T}\max_{\vec{u}\in S}||\Phi(\vec{u},\xi(\vec{t}\,))||\,d\vec{t}<\infty;$$

6) функция $\Phi(\vec{u},z)$ непрерывна в точке $\vec{u}_0$ равномерно по $z\in Y'$; $\mathbf{P}\{\xi(\vec{t}\,)\in Y'$ для любого $\vec{t}\in\mathbf{R}_+^m\}=1$;

7) поле $\xi(\vec{t}\,)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания [4] с параметром

$$\alpha(d)=O(d^{-m-\varepsilon}),\ d\to\infty,\ \varepsilon>0,\ \int_0^1\frac{(\ln\rho)^2}{\rho^m}\left(\int_0^{\rho}\frac{1}{\tau^2}|B_{jk}(\tau)|\,d\tau\right)d\rho<\infty,$$

где $B_{jk}(\tau)=\int_{||\vec{t}\,||<T} b_{jk}(\vec{t}\,)\,d\vec{t}$,

$$b_{jk}(\vec{t}\,)=$$

$$=\frac{\mathbf{M}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_k}(\vec{u}_0,\xi(\vec{t}\,))-\mathbf{M}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_k}(\vec{u}_0,\xi(\vec{0}))\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_k}(\vec{u}_0,\xi(\vec{0}))-\mathbf{M}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_k}(\vec{u}_0,\xi(\vec{0}))\right)}{\mathbf{M}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_k}(\vec{u}_0,\xi(\vec{0}))-\mathbf{M}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_k}(\vec{u}_0,\xi(\vec{0}))\right)^2},$$

$$j,k=\overline{1,l};$$

8) $\mathbf{M}||\Phi(\vec{u}_0, \xi(\vec{0}))||^2 < \infty$;

9) матрица $\mathbf{A}_0 = \mathbf{M}\Phi(\vec{u}_0, \xi(\vec{0}))$ невырожденна;

10) для некоторого $\delta > \dfrac{2m}{\varepsilon}$ имеем $\mathbf{M}||\vec{\nabla} f(\vec{u}_0, \xi(\vec{0}))||^{2+\delta} < \infty$;

11) матрица $\mathsf{g}(\vec{0})$ невырожденна, где $\mathsf{g}(\vec{\lambda})$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$, — спектральная плотность поля $\{\vec{\nabla} f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t})), \vec{t} \in \mathbf{R}^m\}$.

Пусть $\vec{u}(T)$ — точка минимума (2), причем функция $\vec{u}(T, \omega)$, $\omega \in \Omega'$, $\mathcal{G}'$-измерима, $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. Тогда

$$\left(\int\limits_{||\vec{t}\,|| < T} d\vec{t} \right)^{\frac{1}{2}} (\vec{u}(T) - \vec{u}_0)$$

сходится по распределению к $N(\vec{0}, (2\pi)^m (A_0)^{-1} \mathsf{g}(\vec{0})(A_0)^{-1})$, $T \to \infty$.

Предположим, что выполнены также условия:

12) для некоторого $\delta_1 > \dfrac{2m}{\varepsilon}$ имеем

$$\mathbf{M}(f(\vec{u}_0, \xi(\vec{0})))^{2+\delta_1} < \infty;$$

13) $\mathsf{g}(\vec{0}) \neq 0$, где $\mathsf{g}_1(\vec{\lambda})$, $\vec{\lambda} \in \mathbf{R}^m$, — спектральная плотность поля $\{f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))$, $\vec{t} \in \mathbf{R}^m\}$.

Тогда

$$\left(\int\limits_{||\vec{t}\,|| < T} d\vec{t} \right)^{\frac{1}{2}} (F_T(\vec{u}(T)) - F(\vec{u}_0))$$

сходится по распределению к $N(\vec{0}, (2\pi)^m \mathsf{g}_1(\vec{0}))$.

Доказательство. Из условий 2–4 и теоремы Лебега о предельном переходе следует, что с вероятностью единица для любого $T > 0$ функция $F_T(\vec{u})$, $\vec{u} \in S$, дважды непрерывно дифференцируема на S. Имеем

$$\vec{\nabla} F_T(\vec{u}) = \frac{1}{\int\limits_{||\vec{t}\,|| < T} d\vec{t}} \int\limits_{||\vec{t}\,|| < T} \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k} (\vec{u}, \xi(\vec{t})) d\vec{t}; \;\; j, k = \overline{1, l}; \;\; \vec{u} \in S.$$

В силу состоятельности $\vec{u}(T)$, с вероятностью, сходящейся к единице при $T \to \infty$, $\vec{u}(T)$ является внутренней точкой S. Используя необходимое условие экстремума, получаем, что с такой же вероятностью

$$\vec{\nabla} F_T(\vec{u}(T)) = \vec{0}. \tag{7}$$

Применив формулу Тейлора, из (7) получим, что при всех $T > 0$, $\omega \in \Omega(T)$, $\mathbf{P}(\Omega(T)) = 1$, $T \to \infty$, имеем

$$\vec{\nabla} F_T(\vec{u}_0) + A(T)(\vec{u}(T) - \vec{u}_0) = \vec{0}, \tag{8}$$

где

$$A(T) = A(T, \omega) = \frac{\partial^2 F_T}{\partial u_j \partial u_k} (\vec{u}^{\,j}(T, \omega), \omega)_{j,k=1}^{l},$$

$$\vec{u}^{\,j}(T, \omega) = \vec{u}_0 + \theta_j(T, \omega)(\vec{u}(T, \omega) - \vec{u}_0), \;\; 0 \le \theta_j(T, \omega) \le 1.$$

Обозначим

$$A_1(T) = A_1(T,\omega) = \begin{cases} A(T,\omega), & \omega \in \Omega(T), \\ B, & \omega \in \Omega \setminus \Omega(T), \end{cases}$$

где B — произвольная постоянная матрица.

По условию 6 имеем

$$\left\| A_1(T) - \frac{1}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \Phi(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t} \right\| \to 0,\ T \to \infty, \text{ по вероятности.}$$

В силу условий 8, 9 к полю $\Phi(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))$ применима теорема 1. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{1}{\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \Phi(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t} \to A_0,\ T \to \infty \right\} = 1. \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что

$$A_1(T) \to A_0,\ T \to \infty, \tag{10}$$

по вероятности.

В силу (10) для всех $T > 0$, $\omega \in \Omega_1(T)$, $\mathbf{P}(\Omega_1(T)) = 1$, $T \to \infty$, матрица $A_1(T)$ невырожденна. Тогда из (8) следует

$$\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t} \right)^{\frac{1}{2}} (\vec{u}(T) - \vec{u}_0) = -(A_1(T))^{-1} \left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \vec{\nabla} f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t}. \tag{11}$$

Из (10) вытекает, что по вероятности

$$(A_1(T))^{-1} \to (A_0)^{-1},\ T \to \infty.$$

По теореме Лебега о предельном переходе имеем

$$\vec{\nabla} \mathbf{M} f(\vec{u}, \xi(\vec{0})) = \mathbf{M} \vec{\nabla} f(\vec{u}, \xi(\vec{0})),\ \vec{u} \in S.$$

Следовательно, $\mathbf{M} \vec{\nabla} f(\vec{u}, \xi(\vec{0})) = \vec{0}$.

В силу условий 7, 11 теоремы 4 к полю

$$\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \vec{\nabla} f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))d\vec{t} \tag{12}$$

применима центральная предельная теорема [8, с. 25], т.е. (12) сходится по распределению к $N(\vec{0}, (2\pi)^m \mathrm{g}(\vec{0}))$ при $T \to \infty$.

Таким образом, из (11) следует первое утверждение теоремы.

По теореме Тейлора для всех $T > 0$, $\omega \in \Omega(T)$, $\mathbf{P}(\Omega_1(T)) = 1$, $T \to \infty$, имеем

$$\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t} \right)^{\frac{1}{2}} (F_T(\vec{u}(T)) - F(\vec{u}_0)) = \left(\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} \vec{\nabla} f(\vec{u}_0, \xi(\vec{t}))\, d\vec{t} \right)' (\vec{u}(T) - \vec{u}_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}\right)^{\frac{1}{2}} (\vec{u}(T)-\vec{u}_0)' A_2(T)(\vec{u}(T)-\vec{u}_0)+$$

$$+\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} (f(\vec{u}_0,\xi(\vec{t}))-Ef(\vec{u}_0,\xi(\vec{0})))d\vec{t}, \tag{13}$$

где

$$A_2(T)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k}(\vec{v}(T,\omega),\omega)\right)_{j,k=1}^{l},$$

$$\vec{v}(T,\omega)=\vec{u}_0+\Theta(T,\omega)(\vec{u}(T,\omega)-\vec{u}_0),\ 0<\Theta(T,\omega)<1.$$

В силу центральной предельной теоремы и условий теоремы 4

$$\left(\int\limits_{\|\vec{t}\|<T} d\vec{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\|\vec{t}\|<T} (f(\vec{u}_0,\xi(\vec{t}))-Ef(\vec{u}_0,\xi(\vec{0})))d\vec{t}$$

сходится по распределению к $N(\vec{0},2\pi g_1(\vec{0}))$ при $T\to\infty$.

Из закона больших чисел для первой и второй производных функции F_T, первого утверждения теоремы и соотношения (13) вытекает второе утверждение теоремы 4.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано асимптотическое поведение оценок метода эмпирических средних однородного случайного поля с непрерывным временем, наблюдаемого на круге. Доказана сильная состоятельность эмпирической оценки. Полученные результаты могут быть использованы при численном нахождении и исследовании скорости сходимости метода эмпирических средних.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнопов П.С. Асимптотические свойства некоторых классов М-оценок // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 4. — С. 10–27.
2. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 250 p.
3. Knopov P.S. On some classes of M-estimates for non-stationary regression models // Theory Stochastic Processes. — 1997. — **3** (**19**), N 1–2. — P. 222–238.
4. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. О больших уклонениях эмпирических оценок в задачах стохастического программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 52–61.
5. Юринский В.В. Об усиленном законе больших чисел для случайных полей // Мат. заметки. — 1974. — **16**, № 1. — С. 141–149.
6. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. — Киев: Вища шк., 1982. — 192 с.
7. Леоненко Н.Н., Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей. — Киев: Вища шк., 1986. — 216 с.

Поступила 10.01.2013