УДК 519.713.2

И.К. РЫСЦОВ

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРОБЛЕМЕ КОЛЛАТЦА

Ключевые слова: $(3x+1)$-*проблема, гипотеза Коллатца, аффинные автоматы.*

ВВЕДЕНИЕ

В современной математике осталось мало проблем, суть которых можно объяснить школьнику, но которые не могли бы решить профессионалы. Одна из них — проблема Коллатца, или $(3x+1)$-проблема. Известному математику П. Эрдешу приписывают следующее пессимистическое изречение: «математика не готова к решению подобных проблем» [1]. Тем не менее количество посвященных ей работ с каждым годом возрастает и уже проведена конференция.

Функция Коллатца $C(n)$ определяется на натуральных числах следующим образом:

$$C(n)=\begin{cases} n/2, & n \text{ — четное,} \\ 3n+1, & n \text{ — нечетное.} \end{cases} \qquad (1)$$

Для каждого натурального числа n строится траектория $(n, C(n), C(C(n)), \ldots)$, состоящая из последовательных итераций этой функции. В дальнейшем k-кратную итерацию функции обозначим $C^{(k)}(n)$. Согласно гипотезе Коллатца любая траектория достигает единицы.

Проблема Коллатца (форма 1). Для всякого натурального числа n существует натуральное число k такое, что $C^{(k)}(n)=1$.

Из (1) видно, что по достижению единицы процесс входит в цикл (1, 4, 2), который называется тривиальным. Другими словами, итерационный процесс «забывает» начальное состояние и всегда достигает тривиального цикла. Можно убедиться в справедливости гипотезы Коллатца, проведя несложные вычисления для небольших натуральных чисел. В настоящее время эта гипотеза проверена с помощью компьютеров для чисел, не больших чем $100 \cdot 2^{50} \approx 1{,}12 \cdot 10^{17}$, и рекорды продолжают ставиться [2]. Но доказательства ее справедливости для натуральных чисел пока не существует, хотя самой проблеме уже 70 лет.

В настоящей статье сделана попытка по-новому взглянуть на уже известные результаты с точки зрения теории автоматов. Чтобы изложение было доступным широкому кругу читателей, приведены лишь элементарные методы, при этом многие результаты не рассмотрены. Из наиболее интересных неэлементарных подходов отметим обобщение функции Коллатца на кольцо 2-адических целых чисел [3], однако эти результаты достойны отдельной работы.

С точки зрения теории автоматов имеем одномерный аффинный автомат, обладающий крайне нерегулярным поведением. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на траекторию числа 27, приведенную в [2]. Таким образом, функция Коллатца показывает, насколько трудной может оказаться проблема достижимости состояний в одномерных аффинных автоматах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Функция Коллатца имеет ряд полезных модификаций. Отметим, что при нечетном n число $3n+1$ будет четным, поэтому процесс «сходимости» можно несколько ускорить за счет следующей функции:

$$D(n)=\begin{cases} n/2, & n \text{ — четное,} \\ (3n+1)/2, & n \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (2)$$

Именно эту форму исследовал Д. Лагариас в работах [1, 4, 5].

Функции $C(n)$ и $D(n)$ тесно связаны, поэтому гипотеза Коллатца справедлива для обеих. Траектория $(n, D(n), D^{(2)}(n), \ldots)$ получается из траектории для функции $C(n)$ удалением некоторых четных чисел, а именно тех, которые получаются сразу после умножения на три и прибавления единицы (нечетные операции).

С функцией $D(n)$ можно связать бесконечный функциональный орграф $G_D=(N, D)$, соединив дугой число n с числом $D(n)$, где N — множество натуральных чисел. Поскольку орграф функциональный [6], из каждой его вершины будет выходить одна дуга, и в каждую его вершину будет входить одна, но не более двух дуг. В этом можно убедиться, вычислив прообразы функции $D(n)$:

$$D^{-1}(n)=\begin{cases} \{(2n-1)/3, 2n\}, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 3, \\ \{2n\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $a \equiv b \pmod m$ обозначено сравнение целых чисел по модулю m.

Согласно гипотезе Коллатца из любой вершины орграфа G_D достигается единица, т.е. орграф G_D должен иметь структуру входящего ориентированного дерева [6], если его корнем считать тривиальный цикл (1, 2). Аналогичную структуру будет иметь орграф для функции $C(n)$. Это позволяет сформулировать «графическую» форму проблемы.

Проблема Коллатца (форма 2). Граф функции $D(n)$ является входящим ориентированным деревом, в корне которого находится тривиальный цикл.

В связи с орграфом G_D возникает еще одно утверждение, эквивалентное гипотезе Коллатца: предположим, что подмножество натуральных чисел M содержит единицу и замкнуто относительно умножения на два, кроме того, вместе с любым числом вида $3n+2$ оно содержит число $2n+1$, тогда M должно содержать все натуральные числа. Это утверждение справедливо, если по дугам орграфа G_D двигаться в противоположном направлении.

Можно и дальше ускорять процесс сходимости, если число $3n+1$ сразу делить на максимально возможную степень двойки. Обозначим $\operatorname{ord}_2(n)$ кратность двойки в разложении натурального числа n на простые множители, т.е. $2^{\operatorname{ord}_2(n)}$ будет наибольшей степенью двойки, которая делит число n. Функция $\operatorname{ord}_2(n)$ напоминает логарифм, поскольку $\operatorname{ord}_2(mn)=\operatorname{ord}_2(m)+\operatorname{ord}_2(n)$. Положим $ev(n)=2^{\operatorname{ord}_2(n)}$ и назовем эту степень четной частью числа n. Остальные сомножители в разложении отнесем к нечетной части числа n, которую обозначим $od(n)$. Отметим, что $od(n)$ будет наибольшим нечетным делителем числа n. Таким образом, для каждого натурального числа n имеет место разложение

$$n=ev(n)\cdot od(n)=2^{\operatorname{ord}_2(n)}\cdot od(n). \quad (3)$$

Обозначим N_0, N_1 множества четных и нечетных натуральных чисел соответственно. Рассмотрим функцию $E: N_1 \to N_1$, определенную следующим образом:

$$E(n)=od(3n+1), \ n \in N_1. \quad (4)$$

Другими словами, здесь число $3n+1$ делим сразу на максимально возможную степень двойки и в результате имеем нечетное число. Траекторию функции $E(n)$ для заданного числа n получаем из соответствующей траектории функции $C(n)$ удалением всех четных чисел. В этом случае единица становится неподвижной точкой функции $E(n)$. Нетрудно показать, что эта функция не имеет других неподвижных точек среди натуральных чисел. Но для доказательства гипотезы Коллатца необходимо, чтобы и суперпозиция функции $E(n)$ любой степени имела одну неподвижную точку.

С функцией $E(n)$ также можно связать функциональный орграф $G_E=(N_1, E)$, соединив дугой нечетное число n с числом $E(n)$. Из гипотезы Коллатца следует, что орграф G_E должен иметь структуру дерева с петлей, если его корнем считать единицу.

Однако структура орграфа G_E существенно сложнее по сравнению с орграфом G_D. В каждую вершину орграфа G_E дуги либо вообще не входят, либо входит бесконечное число дуг. В этом можно убедиться, вычислив прообразы функции $E(n)$:

$$E^{-1}(n)=\begin{cases}\varnothing, & n\equiv 0 \pmod 3,\\ \{(4^m n-1)/3 \mid m\geq 1\}, & n\equiv 1 \pmod 3,\\ \{(2\cdot 4^{m-1} n-1)/3 \mid m\geq 1\}, & n\equiv 2 \pmod 3.\end{cases} \tag{5}$$

Для доказательства формулы (5) отметим, что все прообразы числа n принадлежат множеству рациональных чисел $\{(2^m n-1)/3 \mid m\geq 1\}$. В зависимости от остатка при делении n на три в этом множестве можно выделить подмножества натуральных чисел, что и сделано в (5).

Любое нечетное число имеет вид $4n+1$ или $4n-1$. Нетрудно видеть, что функция $E(n)$ убывает на нечетных числах первого типа и возрастает на нечетных числах второго типа:

$$E(4n+1)<4n+1,\ \ E(4n-1)>4n-1. \tag{6}$$

Действительно, $E(4n+1)=od\,(12n+4)=od\,(3n+1)<4n+1$ и $E(4n-1)=od\,(12n-2)=$ $=6n-1>4n-1$. Кроме того, из (5) видно, что у каждого натурального числа будет бесконечное число прообразов первого типа и не более одного прообраза второго типа.

Отметим, что в (4) в отличие от (2) уже нет разветвления на два направления за счет появления новой функции $od\,(n)$. Но ввиду нерегулярности этой функции ее трудно исследовать аналитически, поэтому функция $E(n)$ редко встречается в литературе.

Основная трудность в проблеме Коллатца состоит в отсутствии априорной оценки числа необходимых итераций, поэтому уместными являются следующие определения. Пусть T — одна из функций C, D или E, тогда для заданного числа n возможны три типа траекторий:

— сходящаяся (существует k такое, что $T^{(k)}(n)=1$);

— нетривиальный цикл (траектория $T^{(k)}(n)$ становится периодической, причем $T^{(k)}(n)>1$ для всех k);

— расходящаяся ($\lim\limits_{k\to\infty} T^{(k)}(n)=\infty$).

Гипотеза Коллатца утверждает, что у натуральных чисел все траектории сходящиеся. Положим $\tau_T(n)=\min\{k \mid T^{(k)}(n)=1\}$, если траектория для числа n сходящаяся, и $\tau_T(n)=\infty$ в противном случае. Функция $\tau_T(n)$ называется полным временем остановки для числа n, ее также можно назвать высотой числа n, однако высотой иногда называют максимальное число, которое встречается на траектории [2].

Отметим, что для $n>1$ условие $T^{(k)}(n)=1$ влечет условие $T^{(k)}(n)<n$. Поэтому временем остановки для числа $n>1$ называют функцию $\sigma_T(n)=$ $=\min\{k \mid T^{(k)}(n)<n\}$ и $\sigma_T(n)=\infty$, если такого k не существует. Другими словами, если вернуться к числу, меньшему чем n, то остановку процесса гарантирует

индукция. Поэтому гипотеза Коллатца утверждает, что любое натуральное число имеет конечное время остановки.

Введенные функции принимают большие значения даже для небольших значений n. Например, для функции C имеем $\sigma_C(27) = 96$, $\tau_C(27) = 111$, и максимальным на траектории числа 27 является число 9232.

АВТОМАТ КОЛЛАТЦА

Промоделируем функцию $D(n)$ с помощью автомата. Определим аффинный автомат $A_1 = (Q, \{0,1\}, f)$ на множестве рациональных чисел Q, положив $f(q,0) = q/2$, $f(q,1) = 3q/2 + 1/2$. Объединим эти равенства в одно

$$f(q, x) = 3^x q / 2 + x / 2, \qquad (7)$$

где $q \in Q$ и $x \in \{0,1\}$. Таким образом, получен одномерный аффинный автомат [7]. Поскольку обе функции: $f_0(q) = q/2$ и $f_1(q) = (3q+1)/2$, являются биекциями на Q, автомат будет групповым, т.е. его полугруппа преобразований в этом случае является группой биекций на множестве Q. Это означает, что под действием любого входного слова каждое состояние будет иметь единственного предшественника. В частности, под действием входного слова в единицу перейдет только одно состояние.

В аффинном автомате входное слово $w = x(1)x(2)\ldots x(k)$ действует на состояние q следующим образом: $f(q, w) = q \cdot a(w) + b(w)$, где коэффициенты $a(w)$ и $b(w)$ определяются в данном случае равенствами:

$$a(w) = \frac{3^{x(1)+x(2)+\ldots+x(k)}}{2^k}, \quad b(w) = \sum_{i=1}^{k} x(i) \frac{3^{x(i+1)+\ldots+x(k)}}{2^{k+1-i}}. \qquad (8)$$

Эти выражения получаются последовательным применением функции переходов (7) к символам $x(i)$ входного слова w. Поскольку автомат A_1 групповой, $a(w) \neq 0$ для всех входных слов w.

Таким образом, под действием входного слова $w = x(1)x(2)\ldots x(k)$ в единицу перейдет единственное состояние $f^{-1}(1, w) = (1 - b(w)) / a(w)$. Подставив сюда выражения для коэффициентов (8), получим

$$f^{-1}(1, w) = \frac{1}{3^{x(1)+x(2)+\ldots+x(k)}} \left(2^k - \sum_{i=1}^{k} x(i)\, 2^{i-1} 3^{x(i+1)+\ldots+x(k)} \right). \qquad (9)$$

Трудно представить, что это выражение может принимать любые натуральные значения при некоторых значениях двоичных параметров, но именно этот факт следует из гипотезы Коллатца. Обозначим $\varphi: \{0,1\}^* \to Q$ функцию, которая входному слову w ставит в соответствие состояние $f^{-1}(1, w)$, описываемое (9). Тогда из гипотезы Коллатца следует включение $N \subset \mathrm{Im}\,(\varphi)$, где N — множество натуральных чисел.

Но верно и обратное. Пусть для натурального числа n существует слово $w = x(1)x(2)\ldots x(k)$ такое, что $f(n, w) = 1$. Положим $n = n(0)$ и $n(i) = f(n(i-1), x(i))$, $1 \le i \le k$. Тогда слово $w = x(1)x(2)\ldots x(k)$ должно удовлетворять следующему условию:

$$n(i-1) \equiv x(i) \pmod 2, \; 1 \le i \le k. \qquad (10)$$

Действительно, любое отклонение от этого условия приводит к тупиковой ситуации. Если в нечетном состоянии появится нуль или в четном — единица, то получим состояние вида $(2n+1)/2^m$, где $m \ge 1$. Но такие состояния образуют замкнутый подавтомат относительно функций f_0, f_1 и, следовательно, из них недостижимо единичное состояние. Значит, натуральная траектория $n(1), \ldots, n(k)$ автомата A_1 однозначно определяется начальным состоянием $n = n(0)$ и должна совпадать с траекторией функции $D^{(i)}(n)$, $1 \le i \le k$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Проблема Коллатца (форма 3). Любое натуральное число n можно представить в форме (9) при некоторых значениях двоичных параметров $x(i)$.

В неявном виде автомат A_1 и функцию φ использовал Р. Террас при исследовании времени остановки для функции Коллатца [8]. Кроме того, он рассмотрел семейство обратных функций $\psi_k : N \to \{0,1\}^k$, которые натуральному числу n ставят в соответствие допустимое слово $w = x(1)x(2) \ldots x(k)$ длины k, т.е. слово, удовлетворяющее условию (10). Иначе говоря, слово w будет допустимым для состояния n, если под действием этого слова траектория автомата, которая начинается в состоянии n, остается все время в области натуральных чисел. Как уже отмечалось, если слово w длины k является допустимым для состояния n, то выполняются следующие равенства:

$$f(n, w) = f(n, \psi_k(n)) = n \cdot a(\psi_k(n)) + b(\psi_k(n)) = D^{(k)}(n). \qquad (11)$$

В связи с этим Р. Террас обратил внимание на важность момента, когда степень двойки впервые начинает обгонять степень тройки

$$3^{x(1)+x(2)+ \ldots +x(k)} < 2^k. \qquad (12)$$

Очевидно, что это неравенство будет выполняться, когда в допустимом слове накопится достаточное число нулей, поскольку каждый нуль вдвое увеличивает правую часть неравенства и не изменяет левую. Из (8) видно, что неравенство (12) эквивалентно условию $a(w) < 1$.

Р. Террас назвал коэффициентным временем остановки для числа $n > 1$ функцию $\omega(n) = \min\{k \mid a(\psi_k(n)) < 1\}$ и $\omega(n) = \infty$, если такого k не существует. Из (11) следует, что если $D^{(k)}(n) < n$, то $a(\psi_k(n)) < 1$, поскольку $b(\psi_k(n)) \ge 0$. Значит, $\omega(n) \le \sigma_D(n)$, но из условия $a(\psi_k(n)) < 1$ не следует, что $D^{(k)}(n) < n$, поскольку имеется дополнительный коэффициент $b(\psi_k(n))$. Однако Р. Террас предположил, что эти функции совпадают [7].

Гипотеза о коэффициентном времени остановки. Для любого натурального числа $n > 1$ выполняется равенство $\omega(n) = \sigma_D(n)$.

Это сильная гипотеза, но все численные эксперименты ее пока подтверждают. В частности, согласно этой гипотезе невозможно существование нетривиальных циклов в функции $D(n)$, а значит, и во всех формах функции Коллатца [1].

Равенства (8) показывают, что в автомате A_1 коэффициенты $a(w)$ и $b(w)$ сложно зависят от двоичного слова w. Оказывается, эти выражения можно упростить, но для этого нужно изменить функцию Коллатца.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ КОЛЛАТЦА

Рассмотрим следующую функцию, определенную на натуральных числах:

$$F(n) = 3n + 2^{\mathrm{ord}_2(n)} = 2^{\mathrm{ord}_2(n)}(3 \cdot od(n) + 1). \qquad (13)$$

Эта форма функции Коллатца, по-видимому, еще не рассматривалась. Для ее вычисления необходимо разложить натуральное число на четную и нечетную части, как указано в (3). Эта форма подобна функции $E(n)$. Однако здесь четная часть является аддитивным слагаемым и поэтому монотонно увеличивается по мере выполнения итераций. Чтобы сделать связь с функцией $E(n)$ более явной, докажем индукцией по k, что для любого нечетного числа n выполняется равенство

$$od(F^{(k)}(n)) = E^{(k)}(n). \qquad (14)$$

Действительно, при $k=1$ имеем $od(F(n)) = od(3n+1) = E(n)$. Обозначим m_k число $F^{(k)}(n)$, а n_k число $E^{(k)}(n)$, тогда по предположению индукции имеем $od(m_k) = n_k$. Далее выполним еще одну итерацию, тогда из (4) и (13) получим

$$od(F(m_k)) = od(ev(m_k)(3od(m_k)+1)) = od(3n_k+1) = E(n_k).$$

Таким образом, свойство (14) доказано и, следовательно, гипотеза Коллатца эквивалентна следующему утверждению.

Проблема Коллатца (форма 4). Для всякого натурального числа *n* существует натуральное число k такое, что $od(F^{(k)}(n)) = 1$.

Соответственно полным временем остановки для функции $F(n)$ назовем функцию $\tau_F(n) = \min\{k \mid od(F^{(k)}(n)) = 1\}$, если такое *k* существует, и $\tau_F(n) = \infty$ в противном случае. Если $F^{(k)}(n) = 2^m$ и $k = \tau_F(n)$, то число *m* указывает на количество делений на два (четные операции), которые надо выполнить при итерациях функции $C(n)$, чтобы достичь единицы. Значит, в этом случае $\tau_C(n) = \tau_F(n) + m$. Кроме того, из свойства (14) следует, что $\tau_E(n) = \tau_F(n)$. Например, $\tau_E(27) = \tau_F(27) = 41$, $F^{(41)}(27) = 2^{70}$ и $\tau_C(27) = \tau_F(27) + 70 = 111$.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств функции $F(n)$. Отметим, что $ev(2n) = 2ev(n)$, и значит $F(2n) = 3\cdot 2n + 2\cdot ev(n) = 2\cdot F(n)$. Далее, применяя индукцию по m, получаем следующую формулу:

$$F(2^m n) = 2^m \cdot F(n) \tag{15}$$

для всех $m \geq 1$.

Назовем натуральные числа *m* и *n* эквивалентными, если $od(m) = od(n)$, т.е. если они отличаются лишь степенью двойки. Очевидно, что в каждом классе эквивалентности находится точно одно нечетное число, которое будем считать представителем этого класса. Обозначим $P(2j-1) = \{2^{i-1}(2j-1) \mid i \geq 1\}$ класс с нечетным представителем $2j-1$. В частности, первый класс $P(1)$ будет содержать все степени двойки. Согласно гипотезе Коллатца для любого *n* рано или поздно траектория функции $F(n)$ попадет в первый класс.

Расположим все натуральные числа в виде бесконечной двухмерной таблицы S, в которой столбцами являются классы эквивалентности

$$s(i,j) = 2^{i-1}(2j-1) \tag{16}$$

для всех $i \geq 1$, $j \geq 1$. Строками этой таблицы будут арифметические прогрессии со степенями двойки в качестве разностей. Свойство (15) показывает, что функция $F(n)$ сохраняет отношение эквивалентности и отображает каждый столбец этой таблицы внутрь другого столбца.

Отметим, что если из каждого элемента таблицы S вычесть единицу и отбросить первую строку, которая будет состоять из четных чисел, то получится таблица из [9], обладающая многими интересными свойствами.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Распространим функцию F на рациональные числа, учитывая, что при таком расширении в функции Коллатца появится бесконечное множество нетривиальных циклов [2].

Для ненулевого целого числа *m* четная часть $ev(m)$ равна $2^{\mathrm{ord}_2(m)}$, т.е. степени двойки в разложении числа *m* на простые множители. Небольшая сложность возникает в нуле, поскольку $\mathrm{ord}_2(0) = \infty$, тем не менее, будем считать, что и четная, и нечетная части нуля равны нулю $ev(0) = od(0) = 0$. Для ненулевого рационального числа $q = m/n$ положим $\mathrm{ord}_2(q) = \mathrm{ord}_2(m) - \mathrm{ord}_2(n)$, $ev(q) = 2^{\mathrm{ord}_2(q)}$,

$od(q) = od(m)/od(n)$. Отметим, что числа $\mathrm{ord}_2(q)$ и $od(q)$ не зависят от представления числа q в виде дроби. Таким образом, равенство (3) непосредственно обобщается на ненулевые рациональные числа

$$q = ev(q) \cdot od(q) = 2^{\mathrm{ord}_2(q)} \cdot od(q). \tag{17}$$

Наконец, для ненулевого рационального числа q положим

$$F(q) = 3q + 2^{\mathrm{ord}_2(q)} = 2^{\mathrm{ord}_2(q)}(3 \cdot od(q) + 1). \tag{18}$$

Кроме того, будем считать, что $F(0) = 0$. Из этого определения для ненулевого рационального числа $q = m/n$ следует неравенство

$$\mathrm{ord}_2(q) < \mathrm{ord}_2(F(q)), \tag{19}$$

поскольку $3 \cdot od(q) + 1 = (3 \cdot od(m) + od(n))/od(n)$, а сумма (или разность) двух нечетных чисел является четным числом. Кроме того, для положительных рациональных чисел $q > 0$ и, в частности, для натуральных чисел выполняется следующее неравенство:

$$q < F(q). \tag{20}$$

Рассмотрим множество рациональных чисел $Q_2 = \{q \mid \mathrm{ord}_2(q) \geq 0\}$, которые представляются в виде несократимой дроби с нечетным знаменателем. В дальнейшем ограничимся рациональными числами из Q_2, поскольку это позволит работать с неотрицательными экспонентами.

Определим автомат $A_2 = (Q_2, Z^+, f)$ с подмножеством рациональных чисел Q_2 в качестве состояний и с множеством неотрицательных целых чисел Z^+ в качестве входов. Функцию переходов $f(q, x)$ в соответствии с (17) и (18) находим следующим образом:

$$f(q, x) = 3q + 2^x. \tag{21}$$

Автомат A_2 также будет аффинным групповым автоматом, но с бесконечным числом входов. Входное слово $w = x(1)x(2) \ldots x(k)$ действует на состояние q следующим образом:

$$f(n, w) = 3^k \cdot q + bt(w), \tag{22}$$

где коэффициент $bt(w)$ определяется по формуле

$$bt(w) = \sum_{i=1}^{k} 2^{x(i)} \, 3^{k-i}. \tag{23}$$

Эта формула получается последовательным применением функции переходов (21) к символам $x(i)$ входного слова w.

Определим теперь допустимые слова. Пусть автомат A_2 находится в начальном состоянии $q = q(0)$ и на его вход подается слово $w = x(1)x(2) \ldots x(k)$ и пусть $q(i) = f(q(i-1), x(i))$, $1 \leq i \leq k$, — траектория состояний автомата под действием этого слова. Тогда слово w называется допустимым, если для всех i, $1 \leq i \leq k$, выполняется условие

$$x(i) = \mathrm{ord}_2(q(i-1)), \; 1 \leq i \leq k. \tag{24}$$

Допустимое слово w длины k однозначно определяется начальным состоянием q, и из (21) и (24) индукцией по k легко убедиться, что траектория автомата A_2 на допустимом слове w должна совпадать с траекторией функции $F(q)$:

$$q(i) = F^{(i)}(q), \; 1 \leq i \leq k. \tag{25}$$

Кроме того, из неравенства (19) следует, что допустимое слово $w = x(1)x(2) \ldots$ $\ldots x(k)$ должно быть монотонным, т.е. удовлетворять следующей цепочке неравенств:

$$0 \leq x(1) < x(2) < \ldots < x(k). \tag{26}$$

Таким образом, если автомат A_2 из состояния q под действием допустимого слова $w = x(1)\,x(2)\,\ldots\,x(k)$ длины k переходит в состояние 2^y, то из (22), (23) получим

$$q = f^{-1}(2^y, w) = \frac{2^y - bt(w)}{3^k} = 2^y 3^{-k} - \sum_{i=1}^{k} 2^{x(i)}\, 3^{-i}, \tag{27}$$

где $0 \le x(1) < x(2) < \ldots < x(k) < y$. Отсюда и из свойства (25) получаем следующую важную формулу:

$$F^{(k)}\left(2^y 3^{-k} - \sum_{i=1}^{k} 2^{x(i)}\, 3^{-i}\right) = 2^y. \tag{28}$$

ЧИСЛА БОМА–ЗОНТАЧЧИ

Пусть согласно (26) задана монотонная последовательность неотрицательных целых чисел $0 \le x(1) < x(2) < \ldots < x(k)$ длины k. С помощью позиционного двоичного кодирования эту последовательность можно отождествить с натуральным числом

$$m = \sum_{i=1}^{k} 2^{x(i)},\ 0 \le x(1) < x(2) < \ldots < x(k). \tag{29}$$

И наоборот, номера единичных разрядов двоичного разложения натурального числа дают такую монотонную последовательность.

Число единиц в двоичном разложении натурального числа m назовем валентностью (весом) этого числа и обозначим $\upsilon(m)$. Число $\mathrm{ord}_2(m) = x(1)$ назовем (двоичным) порядком числа m. Отметим, что после вынесения за скобки младшей степени двойки в выражении (29) остается нечетное число. Двоичной степенью $\deg_2(m)$ натурального числа m назовем наибольшую степень двойки $x(k)$ в его двоичном разложении (29).

Определим функцию $\psi : N \to Q$, положив $\psi(2^x) = 2^x$ для всех $x \ge 0$, а числу m вида (29), где $\upsilon(m) = k \ge 2$, поставим в соответствие число

$$\psi(m) = \frac{2^{x(k)} - 2^{x(1)}3^{k-2} - \ldots - 2^{x(k-2)}3 - 2^{x(k-1)}}{3^{k-1}}. \tag{30}$$

Назовем числа, находящиеся в области значений этой функции, числами Бома–Зонтаччи, поскольку эти авторы первыми обратили внимание на их важность для проблемы Коллатца [10]. Точнее, число вида (30) назовем числом Бома–Зонтаччи уровня $k-1$, а число m будем считать «номером» соответствующего числа Бома–Зонтаччи. Степени двойки можно считать числами Бома–Зонтаччи нулевого уровня.

Обратим внимание, что в (27) и (28) также фигурируют числа Бома–Зонтаччи. Поэтому из гипотезы Коллатца вытекает включение

$$N \subset \mathrm{Im}\,(\psi). \tag{31}$$

Свойство (28) показывает, что верно и обратное утверждение. Таким образом, приходим к следующей эквивалентной форме гипотезы Коллатца.

Проблема Коллатца (форма 5). Любое натуральное число является числом Бома–Зонтаччи.

Чтобы лучше понять структуру чисел Бома–Зонтаччи, начнем изучение их составных частей. Функцию bt из (23) можно определить на натуральных числах $bt : N \to N$ следующим образом:

$$bt(m) = 2^{x(1)}3^{k-1} + \ldots + 2^{x(k-1)}3 + 2^{x(k)},\ 0 \le x(1) < x(2) < \ldots < x(k), \tag{32}$$

где число m имеет двоичное разложение вида (29). Число $bt(m)$ назовем битернарным числом уровня k. Название для этих чисел отражает комбинацию названий степеней двойки (бинарные) со степенями тройки (тернарные). Отметим, что битернарные числа не делятся на три, поэтому не всякое натуральное число можно представить в виде (32). Таким образом, отображение $bt: N \to N$ не является ни сюръекцией, ни инъекцией, поскольку, например, $bt(7) = bt(17) = 19$. Функция bt неподвижна на степенях двойки $bt(2^x) = 2^x$ для всех $x \geq 0$.

Оказывается, битернарные числа имеют свою историю, поскольку еще Рамануджан рассматривал суммы следующего вида [2]:

$$2^{x(1)}3^{y(k)} + \ldots + 2^{x(k-1)}3^{y(2)} + 2^{x(k)}3^{y(1)},$$

где $0 \leq x(1) < x(2) < \ldots < x(k)$, $0 \leq y(1) < y(2) < \ldots < y(k)$. А. Анисимов называет такие числа битритовыми (производная от битов и тритов) и отмечает, что любое натуральное число является битритовым [11].

Порядок $\mathrm{ord}_2(bt(m))$ битернарного числа $bt(m)$ совпадает с порядком числа m:

$$\mathrm{ord}_2(bt(m)) = \mathrm{ord}_2(m) = x(1), \tag{33}$$

поскольку после вынесения за скобки младшей степени двойки в выражении (32) остается нечетное число.

Нетрудно показать, что на натуральных числах, имеющих одинаковую валентность, функция bt взаимно однозначна. Действительно, пусть имеет место равенство

$$2^{x(1)}3^{k-1} + \ldots + 2^{x(k-1)}3 + 2^{x(k)} = 2^{y(1)}3^{k-1} + \ldots + 2^{y(k-1)}3 + 2^{y(k)}. \tag{34}$$

Тогда из (33) имеем $x(1) = y(1)$, поскольку двоичные порядки равных натуральных чисел должны быть равны. Сокращая обе части равенства (34) на общий член $2^{x(1)}3^{k-1}$, приходим к равенству битернарных чисел уровня $k-1$. Далее, рассуждая аналогично или применяя индукцию, заключаем, что $x(i) = y(i)$, $2 \leq i \leq k$. Таким образом, при фиксированном числе k каждое натуральное число имеет не более одного представления в виде битернарного числа уровня k.

Ядром $\mathrm{Ker}(F)$ функции $F(q)$ назовем множество рациональных чисел

$$\mathrm{Ker}(F) = \{q \mid (\exists k)\, F^{(k)}(q) = 0\}. \tag{35}$$

Рассмотрим функцию $rt: N \to Q$ следующего вида:

$$rt(m) = -\frac{bt(m)}{3^k} = -(2^{x(1)}3^{-1} + \ldots + 2^{x(k-1)}3^{-(k-1)} + 2^{x(k)}3^{-k}), \tag{36}$$

где число m имеет двоичное разложение вида (29) и $k = \upsilon(m)$. Кроме того, будем считать, что $rt(0) = 0$. Число $rt(m)$ назовем корневым числом уровня k. В отличие от функции bt функция rt взаимно однозначна. Действительно, если $rt(m) = rt(n)$, то натуральные числа m и n должны иметь одинаковую валентность и тогда из равенства $bt(m) = bt(n)$ следует, что $m = n$. Отметим, что $rt(7) = -19/27$, а $rt(17) = -19/9$. Очевидно, что свойство (33) верно и для корневых чисел, поскольку они отличаются от битернарных нечетным знаменателем

$$\mathrm{ord}_2(rt(m)) = \mathrm{ord}_2(bt(m)) = x(1). \tag{37}$$

Рассмотрим также функцию $g(m)$, которая стирает младший единичный разряд в двоичной записи ненулевого натурального числа m:

$$g(m) = m - 2^{\mathrm{ord}_2(m)}. \tag{38}$$

Имеет место следующее соотношение для любого натурального числа m:

$$F(rt(m)) = rt(g(m)). \tag{39}$$

Действительно, с учетом свойств (36) и (37) имеем следующие равенства:

$$F(rt(m)) = -2^{x(1)} - \frac{bt(m-2^{x(1)})}{3^{k-1}} + 2^{x(1)} = -\frac{bt(g(m))}{3^{k-1}} = rt(g(m)).$$

Таким образом, функции F и g сопряжены через функцию rt. Другими словами, функция F действует на корневые числа как функция g на натуральные, она стирает младший «битернарный разряд» в корневом числе и тем самым понижает его уровень на единицу. С помощью индукции соотношение (39) можно обобщить на любое натуральное число k:

$$F^{(k)}(rt(m)) = rt(g^{(k)}(m)). \quad (40)$$

Отсюда, если положить $k = \upsilon(m)$, с учетом (38) и очевидного равенства $g^{(k)}(m) = 0$ получаем соотношение

$$F^{(k)}(rt(m)) = 0, \ k = \upsilon(m). \quad (41)$$

Значит, все корневые числа согласно (35) находятся в ядре функции F. Для доказательства следующей теоремы используем понятие эквивалентности.

Назовем рациональные числа q и r из Q_2 эквивалентными, если $od(q) = od(r)$. Другими словами, отношение эквивалентности без изменений переносится на рациональные числа. Рациональное число q назовем «нечетным», если $q = od(q)$, т.е. если оно является отношением двух целых нечетных чисел. Обозначим $P(q) = \{2^x q \mid x \geq 0\}$ класс эквивалентности с единственным нечетным представителем $q = od(q)$. Свойство (15) остается верным и для рациональных чисел, поэтому функция $F(q)$ также действует на классах эквивалентности.

Теорема 1. При фиксированном числе k корневые числа уровня k и только они являются решениями уравнения $F^{(k)}(q) = 0$.

Доказательство. Из соотношения (41) следует, что все корневые числа уровня k являются решениями этого уравнения. Докажем индукцией по k, что других решений не существует.

Пусть $k = 1$ и $F(q) = 0$ для ненулевого рационального числа q, тогда $3q + ev(q) = 0$. Подставив сюда вместо q выражение $ev(q)od(q)$ из соотношения (17) и сократив на ненулевое число $ev(q)$, получим $od(q) = -1/3$. Значит, число q должно находиться в классе эквивалентности $P(-1/3)$, т.е. $q = rt(2^x) = -2^x/3$ при некотором числе $x \geq 0$. Таким образом, базис индукции доказан.

Предположим, что утверждение доказано для всех чисел, меньших чем k, докажем его для числа $k > 1$. Пусть для ненулевого рационального числа q выполняется условие $F^{(k)}(q) = 0$, тогда из предположения индукции следует, что число $F(q)$ должно быть корневым числом уровня $k-1$, т.е. $F(q) = rt(m)$ для некоторого натурального числа m валентности $k-1$. Из свойств (19) и (37) получаем неравенство

$$\mathrm{ord}_2(q) < \mathrm{ord}_2(F(q)) = \mathrm{ord}_2(rt(m)) = \mathrm{ord}_2(m). \quad (42)$$

Отсюда и из равенства $F(q) = 3q + 2^{\mathrm{ord}_2(q)} = rt(m)$ заключаем, что имеет место равенство $q = -2^x/3 + rt(m)/3$, где $x = \mathrm{ord}_2(q)$. Тогда из неравенства (42) следует, что $q = rt(n)$, где $n = 2^x + m$.

Теорема доказана.

Таким образом, ядро функции F имеет слоистую (уровневую) структуру, на отдельных слоях которой располагаются корневые числа соответствующего уровня. Докажем теперь следующее утверждение, которое назовем аддитивной леммой.

Лемма 1. Пусть q и r — ненулевые рациональные числа и k — натуральное число такое, что $\operatorname{ord}_2(F^{(k-1)}(q)) < \operatorname{ord}_2(r)$, тогда имеет место следующее равенство: $F^{(k)}(q+r) = F^{(k)}(q) + 3^k \cdot r$.

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по k. Поскольку $F^{(0)}(q) = q$ при $k = 1$, условие леммы дает неравенство $\operatorname{ord}_2(q) < \operatorname{ord}_2(r)$, из которого следует, что $\operatorname{ord}_2(q) = \operatorname{ord}_2(q+r)$. Отсюда получаем следующее равенство:

$$F(q+r) = 3 \cdot (q+r) + 2^{\operatorname{ord}_2(q+r)} = 3 \cdot q + 2^{\operatorname{ord}_2(q)} + 3r = F(q) + 3r. \qquad (43)$$

Таким образом, базис индукции доказан.

Предположим теперь, что утверждение доказано для всех чисел, меньших чем k, тогда докажем его для числа $k > 1$. Из предположения индукции имеем

$$F^{(k)}(q+r) = F(F^{(k-1)}(q+r)) = F(F^{(k-1)}(q) + 3^{k-1} \cdot r).$$

Далее, из условия леммы следует, что $\operatorname{ord}_2(F^{(k-1)}(q) + 3^{k-1} \cdot r) = \operatorname{ord}_2(F^{(k-1)}(q))$. Тогда, подставив в равенство (43) $F^{(k-1)}(q)$ вместо q и $3^{k-1} \cdot r$ вместо r, получим равенство

$$F(F^{(k-1)}(q) + 3^{k-1} \cdot r) = F(F^{(k-1)}(q)) + 3 \cdot 3^{k-1} \cdot r = F^{(k)}(q) + 3^k \cdot r.$$

Лемма доказана.

Вернемся к числам Бома–Зонтаччи. Пусть натуральное число m имеет двоичное разложение вида (29) и валентность не меньше двух $k = \upsilon(m) \geq 2$. Из (30) и (36) следует соотношение

$$\psi(m) = \frac{2^{x(k)}}{3^{k-1}} + rt(m - 2^{x(k)}). \qquad (44)$$

Тогда из (40) получим равенство

$$F^{(k-2)}(rt(m - 2^{x(k)})) = rt(g^{(k-2)}(m - 2^{x(k)})) = rt(2^{x(k-1)}) = -2^{x(k-1)}/3.$$

Значит, имеет место следующее неравенство:

$$\operatorname{ord}_2(F^{(k-2)}(rt(m - 2^{x(k)})) = x(k-1) < x(k) = \operatorname{ord}_2(2^{x(k)}/3^{k-1}).$$

Следовательно, к числам $rt(m - 2^{x(k)})$ и $2^{x(k)}/3^{k-1}$ можно применить лемму 1 и с помощью свойства (41) получить соотношение

$$F^{(k-1)}(\psi(m)) = F^{(k-1)}(rt((m - 2^{x(k)})) + 3^{k-1} \frac{2^{x(k)}}{3^{k-1}} = 2^{x(k)}.$$

Отметим, что это соотношение тривиально выполняется для степеней двойки, поскольку $F^{(0)}(2^x) = 2^x$. Значит, для всех натуральных чисел m, имеющих двоичное разложение (29), имеет место следующее равенство:

$$F^{(k-1)}(\psi(m)) = 2^{\deg_2(m)}, \ k = \upsilon(m), \ \deg_2(m) = x(k). \qquad (45)$$

Таким образом, получено еще одно доказательство равенства (28), при этом выяснилось, что числа Бома–Зонтаччи являются смещенными на некоторое число корневыми числами. Тем самым слоистая структура, свойственная корневым числам, наследуется числами Бома–Зонтаччи.

КОДИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим функцию $\psi(m)$. Обозначим $N(k)$ множество натуральных чисел валентности $k \geq 1$, а $BZ(k)$ множество чисел Бома–Зонтаччи уровня k. Нетрудно показать, что функция ψ взаимно однозначна на множестве $N(k)$. Действительно, пусть имеет место равенство

$$2^{x(k)} - 2^{x(1)} 3^{k-2} - \ldots - 2^{x(k-1)} = 2^{y(k)} - 2^{y(1)} 3^{k-2} - \ldots - 2^{y(k-1)}.$$

Тогда, рассуждая как и в случае битернарных чисел, заключаем, что $x(1) = y(1)$, поскольку двоичные порядки равных целых чисел должны быть равны, и т.д.

Обозначим ψ_k ограничение ψ на $N(k)$, тогда биекция $\psi_k : N(k) \to BZ(k-1)$ должна иметь обратную, которую обозначим φ_k. Биекция $\varphi_k : BZ(k-1) \to N(k)$ обладает следующим свойством:

$$\varphi_k(\psi_k(m)) = m = \sum_{i=1}^{k} 2^{x(i)}, \tag{46}$$

где число m имеет двоичное разложение вида (29). Из свойств (40), (44) и леммы 1 вытекает равенство

$$F^{(i-1)}(\psi(m)) = \frac{2^{x(k)}}{3^{k-i}} + rt(g^{(i-1)}(m - 2^{x(k)})),\ 1 \leq i \leq k.$$

Значит, $\mathrm{ord}_2(F^{(i-1)}(\psi(m))) = x(i)$, $1 \leq i \leq k$, и, следовательно, функция φ_k «собирает» степени двойки, которые образуются вдоль траектории $F^{(i-1)}(\psi(m))$, $1 \leq i \leq k$, и тем самым кодирует эту траекторию натуральным числом. При такой трактовке функция φ_k легко переносится на натуральные числа и рациональные числа с нечетными знаменателями, но там она уже не будет биекцией.

Таким образом, функция $\psi(m)$ по коду траектории восстанавливает исходное число Бома–Зонтаччи. Поскольку эта функция всюду определена, любое натуральное число может быть кодом некоторой «успешной» траектории.

Отметим, что множества $N(k)$ взаимно не пересекаются при различных числах k, в то время как множества $BZ(k)$ включаются одно в другое:

$$BZ(k-1) \subset BZ(k) \tag{47}$$

при любом $k \geq 1$. Действительно, пусть число m имеет разложение вида (29), тогда из свойства (45) следует, что траектория числа Бома–Зонтаччи $\psi(m)$ «успешно» заканчивается на числе $2^{x(k)}$. Но можно сделать еще один шаг $F(2^{x(k)}) = 2^{x(k)+2}$ и, следовательно, $\psi(m) = \psi(m + 2^{x(k)+2})$. Впрочем, это равенство легко проверяется с помощью формулы (30). Значит, число $\psi(m)$ имеет представление уровня k и включение (47) доказано. Следовательно, каждое число Бома–Зонтаччи имеет бесконечно много номеров.

Отметим также быстрый рост функции φ_k. Например, $F^{(41)}(27) = 2^{70}$ и, следовательно, для кодирования этой траектории понадобится 71 двоичный разряд или 22 десятичных разряда: $\varphi_{42}(27) = 1258491824377140468475$.

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА БОМА–ЗОНТАЧЧИ

Вернемся к включению (31), поскольку вопрос о натуральных числах Бома–Зонтаччи является одним из главных в данной проблеме. Можно попытаться найти формулы для этих чисел или их номеров, надеясь, что любое натуральное число будет иметь соответствующий номер.

Числами нулевого уровня $BZ(0)$, как уже отмечалось, являются степени двойки $BZ(0)=P(1)$. Нечетные рациональные числа Бома–Зонтаччи первого уровня исчерпываются числами вида $(2^x-1)/3$, где $x\in N$. Из них только при четных числах x получаются натуральные числа, поэтому имеем

$$BZ(1)\cap N_1=\{(4^x-1)/3\mid x\in N\}. \qquad (48)$$

Из равенства $F((4^x-1)/3)=4^x$ следует, что $\varphi_2((4^x-1)/3)=1+4^x$. Отметим также, что числа Бома–Зонтаччи первого уровня являются частичными суммами бесконечной геометрической прогрессии

$$(4^x-1)/3=\sum_{i=0}^{x-1}4^i=1+4+\ldots+4^{x-1}. \qquad (49)$$

Этот результат можно получить и из следующего общего утверждения.

Лемма 2. Если n является нечетным натуральным числом Бома–Зонтаччи, то число $4n+1$ также будет числом Бома–Зонтаччи того же уровня.

Доказательство. Из условия леммы вытекают следующие равенства: $F(4n+1)=4(3n+1)=4F(n)$. Значит, траектории чисел n и $4n+1$ попадают в один класс после первого шага. Поэтому если $F^{(k)}(n)=2^x$ при $k\geq 1$, то $F^{(k)}(4n+1)=$ $=2^{x+2}$, и лемма доказана.

Отметим, что единица в силу включения (47) имеет представление для первого уровня. Поэтому можно воспользоваться леммой 2 и применить к единице неограниченное число раз функцию $f_4(n)=4n+1$ для получения всех чисел вида (49) на первом уровне.

Конечно, элементарными методами результата не достигнешь, хотя и второй, и третий уровни можно еще подвергнуть такому анализу. Опишем общий метод, позволяющий получать натуральные числа Бома–Зонтаччи на любом уровне и основанный на следующем утверждении.

Лемма 3. Число 2 является первообразным (примитивным) корнем по модулю 3^k при любом $k\geq 1$.

Доказательство. Это утверждение следует из известных фактов теории чисел, например, доказательства теоремы 2 из [12, гл. 4]. Отметим также, что число 4 имеет порядок 3^{k-1} по модулю 3^k из [12, гл. 4, следствие 2]. Значит, в подгруппе группы $U(Z/3^kZ)$, порожденной числом 2, четные степени двойки образуют подгруппу порядка 3^{k-1}, а нечетные степени — смежный класс по этой подгруппе. Таким образом, порядок подгруппы, порожденной числом 2, равен $2\cdot 3^{k-1}=3^k-3^{k-1}=\varphi(3^k)$, где φ — функция Эйлера. Значит, число 2 порождает всю группу $U(Z/3^kZ)$, состоящую из чисел, взаимно простых с модулем 3^k и меньших чем 3^k. Следовательно, число 2 является первообразным корнем и лемма доказана.

Положим $c(k)=\varphi(3^k)=3^k-3^{k-1}$. Как было показано в лемме 2, число $c(k)$ будет периодом числа 2 по модулю 3^k, т.е. $c(k)$ — наименьшее число, удовлетворяющее сравнению

$$2^{c(k)}\equiv 1 \pmod{3^k}. \qquad (50)$$

Возьмем теперь произвольное битернарное число $bt(m)$ уровня k вида (32). Поскольку число $bt(m)$ не делится на три, оно будет взаимно простым с числом 3^k и, следовательно, будет элементом группы $U(Z/3^kZ)$. Тогда по лемме 3 найдется число $0\leq y(m)<c(k)$ такое, что $2^{y(m)}\equiv bt(m) \pmod{3^k}$. Отсюда и из свой-

ства (50) заключаем, что при любом целом неотрицательном числе $x \geq 0$ следующие числа Бома–Зонтаччи будут целыми:

$$\frac{2^{x \cdot c(k) + y(m)} - bt(m)}{3^k}. \qquad (51)$$

Отметим, что начиная с некоторого x_0 все числа вида (51) будут натуральными. Поэтому, чтобы получить номер натурального числа Бома–Зонтаччи, можно выбрать произвольное натуральное число, а последний старший разряд подбирать в зависимости от выбранного числа. Таким образом, можно получить, например, все числа на первом уровне вида (49).

ПРОБЛЕМА ЦИКЛОВ

Данная проблема состоит в доказательстве отсутствия нетривиальных циклов для функции Коллатца, состоящих из натуральных чисел. Отметим, что решение проблемы циклов не влечет решения проблемы Коллатца, поскольку остается еще проблема расходимости.

Пусть m — нечетное натуральное число, в двоичном разложении которого имеется k единиц:

$$m = 1 + 2^{y(1)} + \ldots + 2^{y(k-1)}, \; 0 = y(0) < y(1) < \ldots < y(k-1), \; k \geq 1. \qquad (52)$$

Далее, положим $d(i) = y(i) - y(i-1)$, $1 \leq i \leq k-1$, и запишем нечетное битернарное число $bt(m)$ как функцию последовательности натуральных чисел $d(i)$, $1 \leq i \leq k-1$:

$$bt(d(1), \ldots, d(k-1)) = 3^{k-1} + 2^{d(1)} 3^{k-2} + \ldots + 2^{d(1) + \ldots + d(k-1)}. \qquad (53)$$

Бом и Зонтаччи описали все рациональные числа, которые могут встречаться в циклах функции Коллатца [10]. А именно, пусть m — нечетное натуральное число вида (52) и $y(k) > y(k-1) = \deg_2(m)$. Положим $d(k) = y(k) - y(k-1)$, тогда следующее рациональное число назовем циклическим порядка k:

$$cc(d(1), \ldots, d(k-1), d(k)) = \frac{3^{k-1} + 2^{d(1)} 3^{k-2} + \ldots + 2^{d(1) + \ldots + d(k-1)}}{2^{y(k)} - 3^k}. \qquad (54)$$

Остальные члены цикла получаются циклическим сдвигом влево последовательности натуральных чисел $d(i)$, $1 \leq i \leq k$:

$$cc(d(2), \ldots, d(k), d(1)), \; \ldots \; , cc(d(k), d(1), \ldots, d(k-1)). \qquad (55)$$

Обозначим cc_1 число вида (54), а cc_i, $2 \leq i \leq k$, числа вида (55), тогда с помощью непосредственного вычисления можно убедиться, что $F(cc_i)$ эквивалентно cc_{i+1}, $1 \leq i \leq k-1$, а $F(cc_k)$ эквивалентно cc_1, т.е. числа cc_i, $1 \leq i \leq k$, действительно образуют цикл.

Отметим, что члены цикла (55) либо все отрицательные, либо все положительные, поскольку их знак определяется знаменателем $2^{y(k)} - 3^k$, который у всех членов цикла одинаковый. Кроме того, они либо все целые, либо все нецелые, поскольку функция F сохраняет целочисленность. Обозначим CC совокупность всех циклических рациональных чисел вида (54), тогда для решения проблемы циклов необходимо доказать условие

$$CC \cap N_1 = \{1\}. \qquad (56)$$

Следует отметить, что при $k = 1$ формула (54) дает рациональные неподвижные классы, которые определяются числами $1/(2^y - 3)$, где $y \geq 1$. Только при $y = 2$ в этом случае получается натуральное число, равное единице. Другими словами, только единичный класс является неподвижным (относительно функции F), состоящим из натуральных чисел.

С ростом k проверка условия (56) усложняется. Тем не менее доказательство условия (56) может оказаться проще доказательства включения (31). Остается нерешенным вопрос, почему битернарное число $bt(m)$ уровня k не может иметь нетривиального положительного делителя вида $2^y - 3^k$, где $y > \deg_2(m)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теореме 1 удалось разбить корневые числа по уровням. Номер уровня показывает число итераций функции F, необходимых для достижения нуля. Отметим, что корневые числа на разных уровнях подобно натуральным числам различной валентности взаимно не пересекаются. С помощью аддитивной леммы эту иерархию удается перенести на числа Бома–Зонтаччи. Здесь номер уровня указывает на число итераций функции F, достаточное для достижения единичного класса. Однако числа Бома–Зонтаччи образуют возрастающую иерархию.

Нумерация «успешных» траекторий натуральными числами с помощью степеней двойки может показаться необычной. Действительно, на первый взгляд кажется, что достижение единичного класса зависит лишь от нечетных чисел данного ряда. Тем не менее в случае успешного окончания процесса можно с помощью степеней двойки восстановить исходное число, а значит, и всю траекторию. Это свидетельствует о наличии связи между горизонтальным и вертикальным направлениями в таблице S, которая определяется из (16).

Следует отметить, что получены впечатляющие результаты на возможный размер цикла, который оказывается астрономическим [2]. Эти результаты основаны на тонком приближении иррационального числа $\log_2(3)$ рациональными дробями, а также на том, что возможная величина циклического натурального числа должна быть очень большой. Однако главный вопрос, на который предстоит еще ответить: почему битернарное число $bt(m)$ уровня k не может иметь нетривиального положительного делителя вида $2^y - 3^k$, где $y > \deg_2(m)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lagarias J. The $3x+1$ problem and its generalization // American Mathematical Monthly. — 1985. — **92**, N 1. — P. 3–23.
2. Chamberland M. An update on the $3x+1$ problem // Butlletі de la Societat Catalana de Mathematiques. — 2003. — **18**. — P. 19–45.
3. Akin E. Why is the $3x+1$ problem hard? // Contemp. Math. — 2004. — **356**. — P. 1–20.
4. Lagarias J. $3x+1$ problem annotated bibliography. — www.research.att.com /~jc1/doc/3x+1bib.ps.
5. Lagarias J. The ultimate challenge: the $3x+1$ problem. — N.Y.: AMS, 2010. — 344 p.
6. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.
7. Рысцов И.К. Проблема мортальности и аффинные автоматы // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 24–29.
8. Terras R. A stopping time problem on the positive integers // Acta Arithmetica. — 1976. — **30**. — P. 241–252.
9. Cadogan C. A solution of the $3x+1$ problem // Caribbean J. Math. and Comput. Sci. — 2006. — **13**. — P. 1–11.
10. Bohm C., Sontacchi G. On the existence of cycles of given length in integer sequence // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. — 1978. — **64**, N 2. — P. 260–264.
11. Анисимов А.В. Представление чисел в смешанном базисе (2 ,3) // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 4. — С. 3–18.
12. Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987. — 415 с.

Поступила 10.09.2012