СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА, О.Н. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН

УДК 519.6

МЕТОД ИНТЕРЛИНАЦИИ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ $\vec{w}(x, y, z, t)$ НА СИСТЕМЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПРЯМЫХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В МЕЖСКВАЖИННОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Ключевые слова: *сейсмическая томография, вектор ускорения, интерлинация функций, сейсмическое зондирование коры Земли, акселерометры.*

В настоящей статье рассмотрен метод построения операторов интерлинации вектор-функций $\vec{w}(x, y, z, t)$, заданных своими следами $\vec{w}_k(z, t) = \vec{w}(X_k, Y_k, z, t)$, $k = \overline{1, M}$, на системе произвольно расположенных вертикальных прямых $\Gamma_k = \{(x, y, z): x = X_k,\ y = Y_k,\ -H \le z \le 0\}$, $k = \overline{1, M}$. Операторы позволяют вычислять вектор $\vec{w}$ в произвольной точке (x, y, z) между прямыми Γ_k для произвольного момента времени $t \ge 0$. Этот метод предлагается использовать для построения сейсмической межскважинной акселерометрической математической модели структуры коры Земли на основе данных $\vec{w}_k(z, t)$, $k = \overline{1, M}$, о векторе ускорения $\vec{w}(x, y, z, t)$ в каждой точке прямой — скважине Γ_k данной системы скважин, полученных акселерометрами при сейсмическом зондировании коры Земли.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая работа посвящена формулированию и исследованию метода восстановления вектора $\vec{w}(x, y, z, t) = a_1(x, y, z, t)\vec{i} + a_2(x, y, z, t)\vec{j} + a_3(x, y, z, t)\vec{k}$ в произвольной точке (x, y, z, t) между прямыми данной системы произвольно расположенных вертикальных прямых (скважин) $\Gamma_k = \{(x, y, z):\ x = X_k,$ $y = Y_k,\ -H \le z \le 0\}$, $k = \overline{1, M}$, на основе данных

$$\vec{w}_k(z, t) = a_{1k}(z, t)\vec{i} + a_{2k}(z, t)\vec{j} + a_{3k}(z, t)\vec{k},$$

$$a_{1k}(z, t) = a_1(X_k, Y_k, z, t);\ a_{2k}(z, t) = a_2(X_k, Y_k, z, t);$$

$$a_{3k}(z, t) = a_3(X_k, Y_k, z, t),\ k = \overline{1, M}.$$

Один из возможных применений этого метода — построение пространственной межскважинной акселерометрической математической модели коры Земли на основе данных сейсмического зондирования, когда функции $a_{ij}(z, t), i = \overline{1, 3},\ j = \overline{1, M}$, — компоненты вектора ускорения, измеренные акселерометрами в каждой точке z скважины, которые также являются функциями времени

$t \geq 0$. Это ускорение связано с сейсмическими колебаниями коры Земли, возникающими вследствие землетрясения или проведенного человеком взрыва.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В задаче исследования неоднородных сред, являющейся одной из важнейших задач современности [1], широко используются методы сейсмической томографии — методология оценки свойств Земли [2–13]. В общей сейсмологии томография является лишь частью сейсмического изображения и, как правило, применяется для специальных целей — оценки скоростей распространения волн сжатия (P-волн, compressional waves) и волн сдвига фрагмента изображения (S-волн). Решение этой задачи может использоваться также для восстановления коэффициента Q ослабления колебаний. Другой областью сейсмического изображения структуры коры Земли является сейсмическая миграция, при которой оценки свойств включают коэффициент рефлективности, характеризующий способность волн к отражению, или рефлективность (reflection– отражение).

Наиболее простой случай сейсмической томографии состоит в оценке скорости P-волн. Для решения этой задачи разработано несколько методов: томография времен прибытия — рефракционная (refraction traveltime tomography; refraction — преломление); конечно-частотная томография времен прибытия (finite-frequency traveltime tomography); рефлексивная томография времен прибытия (reflection traveltime tomography); томография форм сейсмических волн (waveform tomography). Сейсмическая томография формулируется как обратная задача. В рефракционной томографии времен прибытия наблюдаемыми данными являются первые времена t прибытия волн в точки измерения и параметрами модели является медленность (slowness) $s = v^{-1}$, где v — скорость распространения волны. В этом случае задачу можно сформулировать как $t = Ls$, где L — соответствующий оператор, который является матрицей лучевых путей (raypath matrix).

Рефракционная томография времен прибытия волн является эффективной с вычислительной точки зрения, однако имеет низкую разрешающую способность восстановления образа под поверхностью планеты. Для получения более высокой разрешающей способности при восстановлении образа необходимо отказаться от бесконечно-частотной аппроксимации лучевой теории (ray theory), применимой ко времени волнового «начала», и измерять времена прибытия сейсмических волн (или амплитуды) во временном окне некоторой длины с использованием корреляции (cross-correlation). Конечно-частотная томография учитывает эффект дифракции волн, что позволяет получать изображения меньших образов или аномалий. Матрицы лучевых путей заменяются объемными ядрами чувствительности (volumetric sensitivity kernels), которые в глобальной томографии часто называются бананово-ореховыми ядрами, поскольку их форма напоминает банан, сечение которого напоминает орех. В конечно-частотной томографии времена прибытия волн и амплитуды зависят от частоты волн — увеличение волн приводит к улучшению разрешающей способности.

Для более полного использования информации в сейсмограммах применяется томография форм волн, в которой сейсмограммы являются наблюдаемыми данными. В сейсмических исследованиях наиболее часто используется модель акустического волнового уравнения, представляющая аппроксимацию эластического распространения волн (elastic wave propagation — распространение упругих волн). Для решения уравнения распространения акустических волн разработаны схемы метода конечных разностей, метода конечных элементов. Томография эластических форм волн более сложная, чем томография акустических форм волн.

Анализ публикаций, посвященных методам решения задач сейсмической томографии, позволяет сделать вывод о том, что классические методы вычислительной математики, основанные на использовании экспериментальных данных ускорения $\vec{w}_k(z, t)$, $k=\overline{1, M}$, — точек коры, связанные с сейсмическими колебаниями всех точек скважин Γ_k, $k=\overline{1, M}$, на глубине z в момент времени t, не используются при решении задач сейсмической томографии.

Иными словами, актуальной является задача построения и исследования математической модели пространственного распределения вектора-ускорения $\vec{w}(x, y, z, t)$ сейсмических колебаний между скважинами с помощью их следов $\vec{w}_k(z, t)$, $k=\overline{1, M}$, в скважинах Γ_k, $k=\overline{1, M}$, в разные моменты времени.

Замечание. Предположение о существовании вектор-функций $\vec{w}_k(z, t)$, $k=\overline{1, M}$, сложно реализовать на практике, так как современные акселерометры позволяют получать значения вектора–ускорения колебаний лишь в отдельных точках $z=z_p$, $p=\overline{1, N}$, скважин. Однако с помощью заданных $\vec{w}_k(z_p, t)$, $p=\overline{1, N}$, можно построить некоторые приближения $\vec{u}_k(z, t)$, $k=\overline{1, N}$, к реальным распределениям $\vec{u}_k(z, t) \approx \vec{w}_k(z, t)$, $k=\overline{1, N}$ (в виде полиномов, сплайнов двух переменных и т.д.) и пользоваться ими в дальнейшем.

ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ СТАТЬИ

В [12, 13] рассмотрено построение операторов интерлинации скалярных функций n $(n \geq 2)$ переменных на нерегулярно расположенных линиях. Далее исследуем операторы интерлинации вектор-функции четырех переменных: x, y, z, t. Введем нумерацию прямых $\Gamma_k, k=\overline{1, M}$, произвольным образом, поскольку аналитическая форма предлагаемых в данной работе операторов не зависит от способа нумерации. Введем систему вспомогательных (базисных) функций $h_k(x, y)$, $k=\overline{1, M}$, со свойствами $h_k(X_p, Y_p)=\delta_{k,p}$, $k, p=\overline{1, M}$, $\delta_{k,p}$ — символ Кронекера. Пусть $D \subset R^3$,

$$\Gamma_k \subset D,\ k=\overline{1, M},\ C(D \times R)=\{\vec{w}(x, y, z, t)=\vec{i}\, a_1(x, y, z, t)+$$
$$+\vec{j}\, a_2(x, y, z, t)+\vec{k}\, a_3(x, y, z, t)\colon a_q(x, y, z, t) \in C(D \times R),\ q=\overline{1, 3}\}.$$

Теорема 1. Для произвольной непрерывной вектор-функции $\vec{w}(x, y, z, t) \in C(D \times R)$, которая имеет свойства

$$\vec{w}(X_p, Y_p, z, t)=\vec{w}_p(z, t),\ p=\overline{1, M}, \tag{1}$$

оператор

$$\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)=\sum_{k-1}^{M} \vec{w}_k(z, t) \cdot h_k(x, y) \tag{2}$$

является оператором интерлинации [12, 13] со свойствами

$$\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t) \in C(D \times R), \tag{3}$$

$$\overrightarrow{Ow}(X_p, Y_p, z, t)=\vec{w}_p(z, t),\ p=\overline{1, M}. \tag{4}$$

Ниже дан обзор различных вспомогательных функций и исследуются их свойства.

Полиномиальные вспомогательные функции минимальной степени.

Теорема 2. Оператор $\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)$, в котором

$$h_k(x, y) = h_{M,k}(x, y) = \frac{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{M} ((x - X_i)(X_k - X_i) + (y - Y_i)(Y_k - Y_i))}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{M} ((X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2)}, \qquad (5)$$

$$k = \overline{1, M}, \quad M \geq 2,$$

для произвольной сетки узлов $(X_p, Y_p) \neq (X_q, Y_q)$, $p \neq q$, $p, q = \overline{1, M}$, является оператором интерлинации вектор-функции $\vec{w}$ со свойствами (3)–(4), вспомогательные функции которого представимы полиномами наименьшей степени $M - 1$.

Формула (2) для вычисления $\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)$ при таком полиномиальном выборе вспомогательных функций h_k, $k = \overline{1, M}$, является глобальной формулой интерлинации, так как для вычисления вектора $\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)$ в каждой точке (x, y, z, t) необходимо учитывать его следы $\vec{w}_k(z, t)$ во всех M прямых. Иными словами, такие формулы для $\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)$ могут использоваться не только в некоторых случаях для прогноза распределения $\vec{w}(x, y, z, t)$ между прямыми Γ_k, $k = \overline{1, M}$, но и в окрестности области D — выпуклой оболочки прямых Γ_k, $k = \overline{1, M}$. Однако следует учитывать, что даже для полиномов одной переменной доказаны теоремы о существовании непрерывных функций (например, $|x|$), для которых последовательность $P_M(x)$ интерполяционных полиномов с равномерно распределенными узлами интерполяции на $[-1, 1]$ не сходится к функции при $M \to \infty$. Поэтому использование в операторах интерлинации вспомогательных функций $h_k(x, y)$, $k = \overline{1, M}$, в виде алгебраических полиномов от двух переменных минимальной степени при произвольном размещении узлов (X_p, Y_p), $p = \overline{1, M}$, и больших значений M требует дополнительных исследований (см. ниже теорему).

Глобальные вспомогательные функции неполиномиального типа. Можно использовать в качестве $h_k(x, y)$, $k = \overline{1, M}$, такие вспомогательные функции

$$H_{k,\lambda}(x, y) = H_{M,k,\lambda}(x, y) = |h_{M,k}(x, y)|^{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{M} |h_{M,p}(x, y)|^{\lambda} \right)^{-1}, \quad k = \overline{1, M}, \qquad (6)$$

где $\lambda > 0$ — некоторое положительное число и $h_{M,k}(x, y)$ задаются в виде (5) или в виде $h_{M,k}(x, y) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{M} d_j(x, y)$, $d_j(x, y) = \sqrt{(x - X_j)^2 + (y - Y_j)^2}$. Их важное преимущество перед полиномиальными состоит в том, что функции $H_{k,\lambda}(x, y)$, $k = \overline{1, M}$, обладают свойством $0 \leq H_{k,\lambda}(x, y) \leq 1$, $k = \overline{1, M}$, т.е. оператор интерлинации $\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)$ является положительным. Эти операторы сохраняют при некоторых значениях параметра $\lambda > 0$ глобальные свойства приближаемой функции (выпуклость, вогнутость и т.д.), что позволяет их рекомендовать для прогнозирования. Однако они имеют малый порядок скорости сходимости, как все положительные операторы [13, 17].

Локальные вспомогательные функции-сплайны 1-й степени. В качестве функций $h_k(x, y), k = \overline{1, M}$, можно использовать также локальные сплайны 1-й степени. Например, выполнив триангуляцию системы точек $P_k(X_k, Y_k)$, $k = \overline{1, M}$, в каждом треугольнике $T_\mu, \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, с вершинами P_k, $k = \mu_1, \mu_2, \mu_3$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, \ldots, M\}$, построим вспомогательные функции

$$\varphi_{p,q}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_p & Y_p & 1 \\ X_q & Y_q & 1 \end{vmatrix}; \ \Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} = \begin{vmatrix} X_{\mu_1} & Y_{\mu_1} & 1 \\ X_{\mu_2} & Y_{\mu_2} & 1 \\ X_{\mu_3} & Y_{\mu_3} & 1 \end{vmatrix} = \varphi_{\mu_2,\mu_3}(X_{\mu_1}, Y_{\mu_1});$$

$$h_{\mu_1}(x, y) = \frac{\varphi_{\mu_2,\mu_3}(x, y)}{\Delta_{\mu_2,\mu_1,\mu_3}}; \ h_{\mu_2}(x, y) = \frac{\varphi_{\mu_1,\mu_3}(x, y)}{\Delta_{\mu_2,\mu_1,\mu_3}}; \ h_{\mu_3}(x, y) = \frac{\varphi_{\mu_1,\mu_2}(x, y)}{\Delta_{\mu_3,\mu_1,\mu_2}}.$$

Построим для каждого треугольника T_μ операторы интерлинации $\overrightarrow{O_\mu w}$:

$$\overrightarrow{O_\mu w}(x, y, z, t) = \vec{w}_{\mu_1}(z, t) h_{\mu_1}(x, y) + \vec{w}_{\mu_2}(z, t) h_{\mu_2}(x, y) + \vec{w}_{\mu_3}(z, t) h_{\mu_3}(x, y);$$

$$\overrightarrow{O_\mu w}(P_{\mu_1}, z, t) = \vec{w}_{\mu_1}(z, t); \ \overrightarrow{O_\mu w}(P_{\mu_2}, z, t) = \vec{w}_{\mu_2}(z, t);$$

$$\overrightarrow{O_\mu w}(P_{\mu_3}, z, t) = \vec{w}_{\mu_3}(z, t);$$

$$\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t) = \overrightarrow{O_\mu w}(x, y, z, t), \ (x, y, z) \in T_\mu \times [-H, 0], \ T_\mu \subset D, \ t \geq 0.$$

Теорема 3. Оператор $\overrightarrow{Ow}(x, y, z, t)$ имеет следующие свойства:

а) он является оператором сплайн-интерлинации вектор-функций четырех переменных $\vec{w}(x, y, z, t)$ на системе прямых $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$:

$$\overrightarrow{Ow}(X_k, Y_k, z, t) = \vec{w}_k(z, t), \ -H \leq z \leq 0, \ t \geq 0, \ k = \overline{1, M};$$

б) каждой непрерывной вектор-функции $\vec{w}(x, y, z, t) \in C(\Omega)$,

$$\Omega = \left\{(x, y, z, t): (x, y, z) \in D \times [-H, 0], \ t \geq 0\right\},$$

этот оператор ставит в соответствие непрерывную вектор-функцию

$$\vec{w}(x, y, z, t) \in C(\Omega) \Rightarrow \overrightarrow{Ow}(x, y, z, t) \in C(\Omega).$$

Замечание. Для вычисления $\overrightarrow{O_\mu w}(x, y, z, t)$ используются следы вектора $\vec{w}$ лишь на трех вертикальных прямых, проходящих через вершины треугольника $(x, y) \in T_\mu$ $\forall z \in [-H, 0]$, $t \geq 0$.

Следует отметить, что точность приближения существенно зависит от длин сторон треугольников T_μ, а также и величин их углов. При этом отметим, что использование локальных приближений не позволяет с их помощью прогнозировать значения $\vec{w}$ за пределами области Ω.

Интерполяционные сплайны Зламала–Женишека 3-й степени двух переменных на произвольной сетке узлов триангуляции. В работе [14] (см. также библиографию к ней) изложен метод построения явных формул для сплайнов 3-й степени Зламала–Женишека двух переменных на нерегулярной триангулированной сетке узлов. Используемые для построения таких сплайнов данные включают значения приближаемой функции и ее первых частных производных в вершинах треугольников триангуляции и значения приближаемой функции в средних точках треугольников. Поскольку в приложениях (в частности, в сейсмической томографии) значения первых частных производных неизвестны, в настоящей работе предлагается метод их приближенного вычисления. Поэтому сначала изложим основные алгоритмы построения интерполяционных сплайнов 3-й степени двух переменных на произвольной сетке узлов триангуляции, а затем изложим метод построения интерполяционно-аппроксимационных сплайнов 3-й степени двух переменных, базирующихся на этих сплайнах.

2D кубические интерполяционные сплайны на нерегулярной сетке узлов триангуляции. Пусть $A_k(X_k, Y_k) = A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, M}$, — произвольная сетка узлов, $A_k \in D = [0,1]^2$, $k = \overline{1, N}$. Разобьем область D на треугольники $T_{pqr} \subset D$ с вершинами A_p, A_q, A_r, $p \neq q \neq r$; $p, q, r \in \{1, 2, \ldots, M\}$. Введем в рассмотрение систему десяти функций двух переменных: $h_{pqr}(x, y)$, $h^{pqr}_{r,b}(x, y)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $0 \le |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \le 1$, которые считаем определенными только в треугольнике T_{pqr}:

$$h_{pqr}(x, y) = \frac{w_{p,q}(x, y)}{w_{p,q}(X_{pqr}, Y_{pqr})} \frac{w_{q,r}(x, y)}{w_{q,r}(X_{pqr}, Y_{pqr})} \frac{w_{r,p}(x, y)}{w_{r,p}(X_{pqr}, Y_{pqr})},$$

$$h^{pqr}_{r,\beta}(x, y) = \frac{(x - x_r)^{\beta_1}(y - y_r)^{\beta_2}}{\beta!} \cdot w^2_{p,q}(x, y) \cdot \left\{ \frac{1}{w^2_{p,q}(x, y)} \right\}^{1-|\beta|}_{(x_r,\, y_r)},$$

где $w_{p,q}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} = (y - y_p)(x_q - x_p) - (y_q - y_p)(x - x_p)$,

$$\left\{ \frac{1}{u_{p,q}(x, y)} \right\}^{1-|\beta|}_{(x_r,\, y_r)} = \sum_{0 \le |\gamma| \le 1-|\beta|} \left(D^\gamma \frac{1}{u_{p,q}(x, y)} \right)_{(x_r,\, y_r)} \frac{(x - x_r)^{\gamma_1}(y - y_r)^{\gamma_2}}{\gamma!},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2),\ \gamma! = \gamma_1! \cdot \gamma_2!,\ |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2,\ D^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2}},\ D^{0,0} h_{p,q,r} = h_{p,q,r},$$

$$X_{pqr} = \frac{x_p + x_q + x_r}{3},\ Y_{pqr} = \frac{y_p + y_q + y_r}{3}.$$

Лемма 1. Функция $h_{pqr}(x, y)$ является полиномом 3-й степени со свойствами

$$h_{pqr}(X_{pqr}, Y_{pqr}) = 1,$$

$$D^{\gamma} h_{pqr}(X_i, Y_i) = 0\,,\ 0 \le |\gamma| \le 1\,,\ i \in \{p, q, r\}\,.$$

Лемма 2. Функции $h^{pqr}_{r,\beta}(x,\ y)$ являются полиномами 3-й степени со свойствами

$$h^{pqr}_{k,\beta}(X_\ell, Y_\ell) = \delta_{k,\ell}\delta_{0,|\beta|};\ k, \ell \in \{p, q, r\}\,,\ 0 \le |\beta| \le 1\,,$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2)\,,\ |\beta| = \beta_1 + \beta_2\,,$$

$$D^{\gamma} h^{pqr}_{k,\beta}(X_\ell, Y_\ell) = \delta_{k,\ell}\delta_{\gamma_1,\beta_1}\delta_{\gamma_2,\beta_2}\,,\ |\gamma| = 1\,,\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\,,\ |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2\,.$$

Теорема 4. Оператор

$$O_{pqr} f(x,\ y) = \sum_{k \in \{p, q, r\}} \sum_{0 \le |\beta| \le 1} D^{\beta} f(x,\ y)|_{(x_k,\ y_k)}\, h^{pqr}_{k,\beta}(x,\ y) +$$

$$+ (f(X_{pqr}, Y_{pqr}) - z_{pqr}) h_{pqr}(x,\ y)\,,$$

$$z_{pqr} = \sum_{k \in \{p, q, r\}} \sum_{0 \le |\beta| \le 1} D^{\beta} f(x,\ y)\Big|_{(x_k,\ y_k)} h^{pqr}_{k,\beta}(X_{pqr}, Y_{pqr})$$

ставит в соответствие каждой функции $f(x,\ y) \in C^1(T_{pqr})$ полином третьей степени двух переменных со свойствами $O_{pqr} f(X_{pqr}, Y_{pqr}) = f(X_{pqr}, Y_{pqr})$,

$$D^{\gamma} O_{pqr} f(x,\ y)\Big|_{(x_i,\ y_i)} = D^{\gamma} f(x,\ y)\Big|_{(x_i,\ y_i)},\ 0 \le |\gamma| \le 1\,,\ i \in \{p, q, r\}\,.$$

Теорема 5. Оператор

$$Of(x,\ y) = O_{pqr} f(x,\ y),\ (x,\ y) \in T_{pqr} \subset D \tag{7}$$

имеет свойства

$$Of(X_{ijk}, Y_{ijk}) = f(X_{ijk}, Y_{ijk})\,,\ T_{ijk} \subset D\,, \tag{8}$$

$$D^{\gamma} Of(X_i, Y_i) = D^{\gamma} f(X_i, Y_i)\,,\ i \in \{1, 2, \ldots, M\}\,,\ 0 \le |\gamma| \le 1.$$

Следствие. Оператор $Of(x,\ y)$ имеет свойство $Of(x,\ y) = f(x,\ y)$ для произвольной $f(x,\ y) = P_3(x,\ y) = = \sum\limits_{0 \le i+j \le 3} a_{i,j} x^i y^j$.

Явные формулы для базисных интерполяционных кубических полиномов в «единичном» треугольнике. Для «единичного» треугольника T^{u}_{kpq} с вершинами $A_k(0, 0)$, $A_p(1, 0)$, $A_q(0, 1)$ явные выражения для всех десяти базисных функций кубической интерполяции имеют вид

$$e^{kpq}_{k,0,0}(x,\ y) = (1 - x - y)^2 (1 + 2x + 2y)\,,\ e^{kpq}_{p,0,0}(x,\ y) = x^2 (3 - 2x)\,,$$

$$e^{kpq}_{q,0,0}(x,\ y) = y^2 (3 - 2y)\,,\ e^{kpq}_{k,1,0}(x,\ y) = x(1 - x - y)^2,\ e^{kpq}_{p,1,0}(x,\ y) = x^2 (x - 1)\,,$$

$$e^{kpq}_{q,1,0}(x,\ y) = xy^2,\ e^{kpq}_{k,0,1}(x,\ y) = y(1 - x - y)^2\ ,\ e^{kpq}_{p,0,1}(x,\ y) = yx^2, \tag{9}$$

$$e^{kpq}_{q,0,1}(x,\ y) = y^2 (y - 1)\,,\ e^{kpq}(x,\ y) = 27xy(1 - x - y)\,.$$

Явные формулы для базисных интерполяционных кубических полиномов

Зламала–Женишека на произвольном треугольнике с использованием формул (9). Введем замену переменных, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между точками $(x, y) \in T_{pqr}$ треугольника T_{pqr} и точками $(u, v) \in T^{u}_{kpq}$ треугольника T^{u}_{kpq}:

$$x = x_{kpq}(u, v) = x_k + u \cdot (x_p - x_k) + v \cdot (x_q - x_k)\,,$$

$$y = y_{kpq}(u, v) = y_k + u \cdot (y_p - y_k) + v \cdot (y_q - y_k)\,, (u, v) = (0, 0) \Rightarrow (x,\ y) = (X_k, Y_k)\,,$$

$$(u, v) = (1, 0) \Rightarrow (x,\ y) = (x_p,\ y_p)\,,\ (u, v) = (0, 1) \Rightarrow (x,\ y) = (x_q,\ y_q)\,, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_p - x_k & y_p - y_k \\ x_q - x_k & y_q - y_k \end{vmatrix} = \Delta_{kpq},$$

$$u = u_{kpq}(x,\ y) = \begin{vmatrix} (x - x_k) & (x_q - x_k) \\ (y - y_k) & (y_q - y_k) \end{vmatrix} \Delta^{-1}_{kpq},$$

$$v = v_{kpq}(x,\ y) = \begin{vmatrix} (x_p - x_k) & (x - x_k) \\ (y_p - y_k) & (y - y_k) \end{vmatrix} \Delta^{-1}_{kpq},$$

$$u_{kpq}(X_{kpq}, Y_{kpq}) = 1/3\,,\ v_{kpq}(X_{kpq}, Y_{kpq}) = 1/3\,.$$

В дальнейшем будем использовать формулы

$$D^{1,0}u_{kpq}(x,\ y) = \Delta^{-1}_{kpq}(y_q - y_k)\,;\ D^{0,1}u_{kpq}(x,\ y) = -\Delta^{-1}_{kpq}(x_q - x_k)\,;$$

$$D^{1,0}v_{kpq}(x,\ y) = -\Delta^{-1}_{kpq}(y_p - y_k)\,;\ D^{0,1}v_{kpq}(x,\ y) = \Delta^{-1}_{kpq}(x_p - x_k)\,;$$

$$u_{kpq}(x_k,\ y_k) = 0\,;\ u_{kpq}(x_p,\ y_p) = 1\,;\ u_{kpq}(x_q,\ y_q) = 0\,;$$

$$v_{kpq}(x_k,\ y_k) = 0\,;\ v_{kpq}(x_p,\ y_p) = 0\,;\ v_{kpq}(x_q,\ y_q) = 1.$$

Теорема 6. Для произвольного $k \in \{p, q, r\}$ функции

$$h^{kpq}_{k, \beta_1, \beta_2}(x,\ y) = e^{kpq}_{k, \beta_1, \beta_2}(u_{kpq}(x,\ y), v_{kpq}(x,\ y))\,,\ 0 \le \beta_1 + \beta_2 \le 1$$

являются базисными функциями двумерной кубической интерполяции со свойсвами

$$D^{\gamma} h^{kpq}_{\mu, \beta_1, \beta_2}(X_{\nu}, Y_{\nu}) = (D^{1,0}u)^{\gamma_1} \cdot (D^{0,1}v)^{\gamma_2} \delta_{\mu,\nu} \delta_{\gamma_1, \beta_1} \delta_{\gamma_2, \beta_2}, \quad \mu, \nu \in \{k,\ p, q\}\,,$$

$$0 \le |\gamma|, |\beta| \le 1\,,$$

Теорема 7. Для произвольного треугольника T_{pqr} функция $h_{pqr}(x,\ y) = e^{pqr}(u_{kpq}(x,\ y), v_{kpq}(x,\ y))$ удовлетворяет условиям

$$h_{pqr}(x_k,\ y_k) = 0,\ h_{pqr}(x_p,\ y_p) = 0,\ h_{pqr}(x_q,\ y_q) = 0,$$

$$D^{1,0}h_{pqr}(x,\ y)\Big|_{(x_k,\ y_k)} = 0,\ D^{0,1}h_{pqr}(x,\ y)\Big|_{(x_k,\ y_k)} = 0,\ D^{1,0}h_{pqr}(x,\ y)\Big|_{(x_p,\ y_p)} = 0,$$

$$D^{0,1}h_{pqr}(x,\ y)\Big|_{(x_p,\ y_p)} = 0,\ D^{1,0}h_{pqr}(x,\ y)\Big|_{(x_q,\ y_q)} = 0,\ D^{0,1}h_{pqr}(x,\ y)\Big|_{(x_q,\ y_q)} = 0,$$

$$h_{pqr}(x, y)\Big|_{(X_{pqr}, Y_{pqr})} = 1 .$$

Для доказательства используются следующие равенства:

$$e^{kpq}(0, 0) = e^{kpq}(1, 0) = e^{kpq}(0, 1) = 0 ;$$

$$D^{1,0} e^{kpq}(u, v)\Big|_{(0,0)} = D^{0,1} e^{kpq}(u, v)\Big|_{(0,0)} = 0 ;$$

$$D^{1,0} e^{kpq}(u, v)\Big|_{(1,0)} = D^{0,1} e^{kpq}(u, v)\Big|_{(1,0)} =$$

$$= D^{1,0} e^{kpq}(u, v)\Big|_{(0,1)} = D^{0,1} e^{kpq}(u, v)\Big|_{(0,1)} = 0 ;\ e^{kpq}(1/3, 1/3) = 1.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$B_{pqr} f(x, y) = \sum_{k \in \{p, q, r\}} f(A_k) h^{pqr}_{k,0,0}(x, y) + \sum_{k \in \{p, q, r\}} C^{pqr}_{k,1,0}(f) h^{pqr}_{k,1,0}(x, y) +$$

$$+ \sum_{k \in \{p, q, r\}} C^{pqr}_{k,0,1}(f) h^{pqr}_{k,0,1}(x, y) .$$

Теорема 8. Для того чтобы оператор $B_{pqr} f(x, y)$ удовлетворял условиям

$$B_{pqr} f(x, y)\Big|_{A_l} = f(x, y)\Big|_{A_l},\ D^{1,0} B_{pqr} f(x, y)\Big|_{A_l} = D^{1,0} f(x, y)\Big|_{A_l},$$

$$D^{0,1} B_{pqr} f(x, y)\Big|_{A_l} = D^{0,1} f(x, y)\Big|_{A_l},\ l \in \{p, q, r\},$$

постоянные коэффициенты $C^{pqr}_{k,1,0}(f), C^{pqr}_{k,0,1}(f),\ k \in \{p, q, r\}$, должны быть решениями следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C^{pqr}_{k,1,0}(f) D^{1,0} u_{k,1,0}(x, y, X, Y) + C^{pqr}_{k,0,1}(f) D^{1,0} v_{k,1,0}(x, y, X, Y) = \\ \quad = D^{1,0} f(x, y)\Big|_{A_l}, \\ C^{pqr}_{k,1,0}(f) D^{0,1} u_{k,1,0}(x, y, X, Y) + C^{pqr}_{k,0,1}(f) D^{0,1} v_{k,1,0}(x, y, X, Y) = \\ \quad = D^{0,1} f(x, y)\Big|_{A_l}, \end{cases} \tag{11}$$

$$l \in \{p, q, r\} .$$

Введем оператор

$$O_{pqr} f(x, y) = B_{pqr} f(x, y) + (f(X_{pqr}, Y_{pqr}) -$$

$$- B_{pqr} f(X_{pqr}, Y_{pqr}))\, h_{pqr}(x, y),\quad (x, y) \in T_{pqr}. \tag{12}$$

Теорема 9. Оператор $O_{pqr} f$ имеет свойства

$$D^{\beta} O_{pqr} f(x, y)\Big|_{(x_l, y_l)} = D^{\beta} f(x, y)|_{(x_l, y_l)},\ k \in \{p, q, r\},$$

$$0 \le \beta_1 + \beta_2 \le 1,\ O_{pqr} f(X_{pqr}, Y_{pqr}) = f(X_{pqr}, Y_{pqr})$$

$\forall f(x, y) \in C^1(R^2)$.

Теорема 10. Каждой функции $f(x, y) \in C^1(R^2)$ оператор $O_D f(x, y) = = O_{pqr} f(x, y)$, $(x, y) \in T_{pqr} \subset D$, ставит в соответствие сплайн 3-й степени со свойствами

$$D^\gamma O_D f(x, y)\Big|_{(x_l,\, y_l)} = D^\gamma f(x, y)\Big|_{(x_l,\, y_l)},\ l \in \{1, 2, \ldots, M\},\ 0 \le |\gamma| \le 1,$$

$$O_D f(X_{pqr}, Y_{pqr})\Big|_{(x_l,\, y_l)} = f(X_{pqr}, Y_{pqr})\ \forall T_{pqr} \subset D.$$

ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ КУБИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ЗЛАМАЛА–ЖЕНИШЕКА

Полученные в предыдущем разделе явные формулы для интерполяционных кубических полиномов Зламала–Женишека на произвольном треугольнике, основанные на использовании базисных кубических полиномов, используются ниже для построения интерполяционно-аппроксимационных операторов, интерлинирующих вектор-функции, заданные лишь своими следами на системе вертикальных прямых. Предлагается значения производных в узловых точках находить приближенно с помощью метода символьного представления аппроксимирующей функции [15], параметры которой находятся методом наименьших квадратов. Классические операторы полиномиальной интерполяции Лагранжа и Эрмита являются примерами операторов, входящие параметры X_k, $Y_k^{(s)}$, $k = \overline{1, M}$, $0 \le s \le r$, которых входят в символьном виде, т.е. определены в формуле места подстановки их числовых значений. Такие формулы удобны для использования в системах компьютерной математики Mathcad, Maple. При решении задачи аппроксимации в некоторых случаях такие формулы отсутствуют. В приведенной ниже теореме формулируется общий метод построения аналогичных формул для операторов эрмитовой интерполяции, производные в которых находятся методом наименьших квадратов (возможно использование также других методов нахождения производных).

Пусть в области $D \subset R^n$, $n = 1, 2, \ldots$, заданы $M \ge 2$ точек $X^{(k)} = = (X_1^{(k)}, \ldots, X_n^{(k)}) \in D$, $k = \overline{1, M}$. Для функции $f(x) \in C^N(\overline{D})$ заданы ее значения и множество Ξ значений ее частных производных $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, до порядка $N \ge 1$ включительно,

$$D^\alpha f(X^{(k)}) = f_{k,\alpha},\ k = \overline{1, M},\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ 0 \le |\alpha| \le N.$$

Построим интерполяционные базисные функции (полиномиальные, тригонометрические, сплайн-функции) $h_{l,\beta}(x)$, $l = \overline{1, M}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $0 \le |\beta| \le N$, со свойствами

$$D^\alpha h_{l,\beta}(X^{(k)}) = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{k,l},\ 0 \le |\alpha|, |\beta| \le N,\ k, l = \overline{1, M}.$$

Тогда оператор $O(x, f) = \sum\limits_{k=1}^{M} \sum\limits_{0 \le |\alpha| \le N} f_{k,\alpha} h_{k,\alpha}(x)$ является оператором интерполяции со свойствами

$$D^{\beta}O(X^{(l)}, f) = f_{l,\beta},\ l = \overline{1, M},\ 0 \le |\beta| \le N.$$

Теорема 11. Если записать оператор $O(x, f)$ в матричной форме:

$$O(x, f) = F_0^T \cdot H_0(x) + F^T \cdot H(x) = H_0(x)^T F_0 + H(x)^T F,$$

то для искомой матрицы-столбца F имеем аналитическое представление через F_0 :

$$F = -A^{-1} F_0^T \left(\int\limits_D \operatorname{grad} H_0(x)^T \cdot \operatorname{grad} H(x) dx \right),$$

$$A_{i,j} = \int\limits_D \left[\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\partial H_j(x)}{\partial x_p} \frac{\partial H_i(x)}{\partial x_p} \right) \right] dx\ ;\ i, j = 1, \ldots, (Q(n, N) - 1)M\ ,$$

$$B_{i,k} = \sum_{p=1}^{n} \int\limits_D \frac{\partial}{\partial x_p} h_{k,0}(x) \frac{\partial}{\partial x_p} H_i(x)\, dx\ ;\ i, k = 1, \ldots, (Q(n, N) - 1)M$$

или в покоординатной форме в виде

$$O(x, f) = \sum_{k=1}^{M} f_{k,0} \cdot \Phi_k(x)\ ,\ \Phi_k(x) = H_0(x)_k - (B^T A^{-1} \cdot H(x))_k,\ k = 1, \ldots, M\ .$$

Эта формула является обобщением классической интерполяционной формулы Эрмита на случай интерполяционно-аппроксимационных операторов $O(x, f)$ при условии, что известны лишь значения функции, а значения частных производных находится методом наименьших квадратов.

Рассмотри пример, когда $N = 1, n = 2,\ M = 4$. Считаем, что точками интерполяции являются точки $X^{(1)} = (0, 0)$, $X^{(2)} = (1, 0)$, $X^{(3)} = (0, 1)$, $X^{(4)} = (1, 1)$. Введем базисные полиномы $h_{k,s}(x),\ k = 1, 2\ ; s = 0, 1$, двумерной эрмитовой интерполяции:

$$h_{1,0}(x) = (x - X_2)^2 \left(\frac{1}{(X_1 - X_2)^2} - \frac{2(x - X_1)}{(X_1 - X_2)^3} \right),$$

$$h_{2,0}(x) = (x - X_1)^2 \left(\frac{1}{(X_2 - X_1)^2} - \frac{2(x - X_2)}{(X_2 - X_1)^3} \right),$$

$$h_{1,1}(x) = (x - X_1) \frac{(x - X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2}\ ,\ h_{2,1}(x) = (x - X_2) \frac{(x - X_1)^2}{(X_2 - X_1)^2}\ .$$

Представим интерполяционный оператор при $m = 2$ в виде

$$O(x, y, F0, c) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} F0_{k,l}\, h_{k,0}(x) h_{l,0}(y) + z(x, y, c)\ ,\ F0_{k,l} = f(k-1, l-1)\ ,$$

$$z(x, y, c) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} (c_{k,l} h_{k,1}(x) h_{l,0}(y) + c_{k,l+m} h_{k,0}(x) h_{l,1}(y) + c_{k,l+2m} h_{k,1}(x) h_{l,1}(y)).$$

Введем линейную нумерацию функций и неизвестных параметров

$$\Phi_{(k-1)M+l+M}(x, y) = h_{k,0}(x) h_{l,1}(y)\ ,\ C_{(k-1)M+l+M} = c_{k,l+m},$$

$$\Phi_{(k-1)M+l+2M}(x,\,y)=h_{k,1}(x)h_{l,1}(y)\,,\ C_{(k-1)M+l+2M}=c_{k,l+2m}\,,\ k,l=\overline{1,m}\,,$$

$$f0_{(k-1)M+l}=F0_{k,l};\ \Phi0_{(k-1)M+l}(x,\,y)=h_{k,0}(x)h_{l,0}(y),\ k,\,l=\overline{1,m}\,,$$

$$\Phi_{(k-1)M+l}(x,\,y)=h_{k,1}(x)h_{l,0}(y)\,,\ C_{(k-1)M+l}=c_{k,l}.$$

Тогда $O(x,\,y,F0,C)=\Phi0(x,\,y)^T f0+\Phi(x,\,y)^T C$. В случае $m=2$ после вычисления матриц A и B в этом примере получим

$$\mathrm{Z}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & -49 & -14 & -14 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 14 & 49 & 4 & 14 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 14 & 4 & 49 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & -2 & -7 & -4 & -14 & -14 & -49 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, искомый оператор можно записать в виде $O(x,\,y,\,f0)=$ $=O(x,\,y,F0,C)$, а в более детальной форме имеем

$$O(x,\,y,\,f0)=(\Phi0(x,\,y)^T-\Phi(x,\,y)^T A^{-1}B)f0\,,$$

где $f0^T=(f(X^{(1)}),f(X^{(2)}),f(X^{(3)}),f(X^{(4)}))$.

ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ИНТЕРЛИНАЦИОННО-АППРОКСИМАЦИОННОЙ МЕЖСКВАЖИННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ КОРЫ ПЛАНЕТЫ С ПОМОЩЬЮ ДАННЫХ СЕЙСМИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Применим изложенный метод построения интерлинационно-аппроксимационных операторов для приближения вектор-функции ускорения $\vec{w}(x,\,y,\,z,\,t)$ в сейсмической томографии при реализации межскважинной акселерометрической математической модели коры Земли [18–24]. Такая математическая модель коры планеты позволит вычислять ускорение в каждой точке между скважинами с помощью следов вектора ускорения — данных сейсмической томографии — во всех скважинах в зависимости от глубины z и времени t. Заметим, что формула для представления базисных вспомогательных функций $h_k(x,\,y)$, $k=\overline{1,\,M}$, должна учитывать нерегулярность размещения скважин и сохранять изогеометрические свойства экспериментальных данных $\Gamma_k,\,k=\overline{1,\,M},\ \vec{w}_k(z,\,t)$, $-H\le z\le 0$, $t\ge 0$, $k=\overline{1,\,M}$.

В дальнейших публикациях авторы планируют исследовать данную задачу для случая наклонных скважин и других типов вспомогательных функций (сплайнов 5-й степени, полиномов неминимальной степени) [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 505 с.
2. Nolet G. A breviary of seismic tomography. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008. — 344 p.
3. Shearer P.M. Introduction to seismology. — Cambridge: Cambridge University Press, USA, 2009. — 412 p.
4. Stein S. and Wysession M. An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure. Blackwell, Malden, USA, 2003. — 512 p.
5. James G. Berryman. Lectures notes on nonlinear inversion and tomography. I. Borehole seismic tomography. University of California, 1991. — 159 p.

6. Ивансcон С. Межскважинная томография на проходящих волнах // Сейсмич. томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике / Под. ред. Guust Nolet: Пер. с англ. А.Л. Левшина и Б.Г. Букчина. Гл. 7. — М.: Мир, 1990. — Р. 169–197.
7. Азаров Н.Я., Яковлев Д.В. Сейсмоакустический метод прогноза горногеологических условий эксплуатации угольных месторождений. — М.: Недра, 1988. — 199 с.
8. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки. — Донецк: ООО «Алан», 2003. — 312 с.
9. Towfighi S., Kundu T., Ehsani M. Elastic wave propagation in circumferential direction in anisotropic cylindrical curved plates // J. Appl. Mechanics. — 2002. — **69**. — P. 283–291.
10. Красножон М.Д., Козаченко В.Д. Комплексна інтерпретація матеріалів ГДС з використанням комп'ютерної технології "ГЕОПОШУК". — Київ: УкрДГРІ, 2007. — 254 с.
11. Капутин Ю.Е. Горные компьютерные технологии и геостатистика. — СПб: Недра, 2002. — 424 с.
12. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. — Харків: Основа, 2002. — 544 с.
13. Литвин О.М., Штепа Н.І., Литвин О.О. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій / За ред. І.В. Сергієнка. — К.: Наук. думка, 2011. — 228 с.
14. Литвин О.М., Литвин О.О., Денисова О.І. Побудова 2d кубічних інтерполяційних сплайнів класу *C* на триангульованій сітці вузлів та їх застосування в розвідці корисних копалин // Вісн. Запорізь. нац. ун-ту. — 2011. — № 1. — С. 66–74.
15. Литвин О.О. Одна теорема про інтерполяційно-апроксимаційні оператори в інтегральній формі методу найменших квадратів // Бионика интеллекта. — 2012. — № 2(79). — С. 17–21.
16. Веселов В.В., Гонтов Д.П., Пустыльников Л.М. Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей. — М.: Наука, 1983. — 120 с.
17. Shabados J. Direct and inverse approximaton theorems for the Shepard operator // Approx. Theory Appl. — 1991. — N 7. — P. 63–76.
18. Sheppard D. Two-dimensional interpolation function for irregulary spaced data // Proc. 23rd Nat. Conf. ACM, 1968 — P. 517–524.
19. Fehler M., Pearson V. Crosshole seismic surveys: Applications for studing subsurface fracture systemsat a hot dry rock geothermal site // Geophysics. — 1984. — **49**. — P. 37–45.
20. Fessenden R.A. Method and apparatus for locating ore-bodies, U.S. patent 1.240, 328, 1917.
21. McCann D.M., Baria R., Jackson P.D., Green A.S.P. Application of crosshole seismic measurements in site investigation surveys // Geophysics. — 1986. — **51**. — P. 914–929.
22. Nordqvist A. Application of ultrasonic crosshole seismics for hard rock conditions, Licentiate Thesis, Sweden: University of Lulea, 1986.
23. Paulsson B.N.P., Cook N.G.W., McEvilly T.V. Elastic-wave velocities and attenuation in an underground granitic repository for nuclear waste // Geophysics. — 1985. — **50**. — P. 551–570.
24. Soonawala N.M. An overview of the geophysics activity within the Canadian Nuclear Fuel Waste Management Program // Geoexploration. — 1984. — **22**. — P. 149–168.
25. Литвин О.Н., Литвин О.О., Денисова О.И. 2D кубические интерполяционные сплайны на нерегулярной сетке узлов // Компьютерная математика. — 2013. — № 1. — С. 100–109.

Поступила 23.11.2012