

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГИХ ТЕЛАХ С ПУСТОТНОЙ ФРАКЦИЕЙ И В ФЕРРОЖИДКОСТЯХ

**Ключевые слова:** магнитное поле, упругое тело, пустотная фракция, ферро-жидкость, распространение волн, конечная скорость.

### ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматриваются две обобщенные волновые модели: модель влияния магнитного поля на упругое тело с пустотной фракцией и новая обобщенная модель феррогидродинамики. Модель деформируемого упругого тела с пустотами [1, 2] обобщается таким образом, чтобы учитывать магнитоупругие эффекты. Предполагается, что среда является электропроводящей и подвержена действию внешнего магнитного поля. При этом пустотная фракция мала по сравнению с упругой матрицей. Отметим, что внутри пустот среда непроводящая [3]. Показано сильное влияние магнитного числа Рейнольдса и пористости пустотной фракции  $\beta$  на распространение плоских волн в теле. До настоящего времени рассматривались некоторые динамические задачи без магнитоупругих взаимодействий [4, 5].

В новой обобщенной модели феррогидродинамики учитываются эффекты сжимаемости и тепловой релаксации. Система нелинейных уравнений линеаризуется относительно невозмущенного поля давления, плотности, температуры, скорости, напряженности магнитного поля и намагниченности. В результате исходные уравнения сводятся к системе трех разрешающих скалярных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболо-эллиптического типа. Это предсказывает распространение волн с конечной скоростью, что отличает систему от традиционной модели. (Вопрос о конечности скорости распространения возмущений в жидких средах рассматривался в [6–8].) Исследуется разрешимость соответствующих задач о распространении плоских волн. Показано, что решения задачи о распространении стационарных волн не существует. Получены условия разрешимости в случае распространения монохроматических волн.

### МОДЕЛИ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА УПРУГОЕ ТЕЛО С ПУСТОТНОЙ ФРАКЦИЕЙ

**Уравнения движения упругой среды с пустотной фракцией в магнитном поле.** Уравнения записаны в рационализированной системе МКС [9]:

уравнение движения упругой матрицы

$$G\nabla^2 \vec{u} + (\lambda + G)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = -\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{J} \times \vec{B} - \beta \vec{\nabla} \eta, \quad (1)$$

уравнение движения пустотной фракции

$$\alpha \nabla^2 \eta - \rho_1 k \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \omega \frac{\partial \eta}{\partial t} - \xi \eta = \beta \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad (2)$$

уравнение индукции

$$\frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{H} - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \times \vec{H}, \quad (3)$$

уравнения Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_c, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

конститутивные уравнения

$$\sigma_{ii} = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_0) + \beta\eta, \quad (5)$$

$$\sigma_{ik} = G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{ik}, \quad i \neq k, \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{m,i}U_{m,j}), \quad (6)$$

$$B = \mu(\vec{H})H_i, \quad D_i = \varepsilon_0 E_i, \quad J_i = \sigma(E_i + \varepsilon_{ijk} \dot{U}_j B_k), \quad (7)$$

$$h_i = \alpha\eta_{,i}, \quad g = -\omega\eta - \xi\eta - \beta\varepsilon_{kk}, \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (8)$$

тензор Максвелла

$$T_{ij} = H_i B_j + E_i D_j - \delta_{ij} (H_k B_k + E_k D_k) / 2. \quad (9)$$

В случае линеаризованных уравнений теории упругости уравнения (5) и (6) приводятся к виду

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} + \beta\eta\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (10)$$

а уравнения (7) — к виду

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B} \right). \quad (11)$$

В отличие от обычной модели магнитоупругости система уравнений (1)–(4), (9)–(11) включает уравнения (2) и (8), описывающие пустотную фракцию  $\eta$ , при этом (2) имеет член  $\beta\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ , соответствующий дилатационному векторному полю, а уравнение эластодинамики (1) имеет член  $\beta\vec{\nabla}\eta$ , соответствующий пустотной фракции. Без учета магнитоупругих взаимодействий система уравнений (1), (2) — гиперболического типа, общая система разрешающих уравнений (1)–(4) оказывается связанной гиперголо-параболической системой ввиду диссипации, обусловленной конечной электропроводностью. В системе (1)–(11) подчеркнуты члены нелинейного взаимодействия, при повторяющихся индексах предполагается суммирование, запятая обозначает дифференцирование по соответствующему индексу.

Рассмотрим среду в прямоугольной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  и подверженную действию сильного постоянного однородного магнитного поля  $H_{20}$ ,  $\vec{H} = (0, H_{02}, 0)$ . Тогда система уравнений (1)–(11) линеаризуется относительно невозмущенного состояния аналогично случаю реализации МГД-среды и магнитоупругой среды [10].

Преобразуем уравнения (1)–(3) к виду

$$\nabla^2 \vec{u} + \left( 1 + \frac{\lambda}{G} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \frac{\rho_1}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) \times \vec{H} - \frac{\beta}{G} \vec{\nabla} \eta, \quad (12)$$

$$\nabla^2 \eta - \frac{\rho_1 k}{\alpha} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\omega}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\xi}{\alpha} \eta = \frac{\beta}{\alpha} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{H} - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right). \quad (14)$$

Введем безразмерные величины по формулам (звездочки в дальнейшем опускаются)

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\bar{x}}{l}, \quad t^* = \frac{c_e}{l} t, \quad \bar{u}^* = \frac{u}{l}, \quad \eta^* = \eta, \quad \beta^* = \frac{\beta}{G}, \\ \bar{H}^* &= \frac{\bar{H}}{H_0}, \quad (\sigma_{ik}^*, T_{ik}) = \frac{1}{\rho_1 c_e^2} (\sigma_{ik}, T_{ik}), \quad c_s^* = 1, \\ c_s^* &= c_s, \quad c_e^s = \frac{c_e}{c_s}, \quad c_v^* = \frac{c_v}{c_s} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_1 k}}, \quad P_H^s = \frac{\mu H_0^2}{\rho_1 c_s^2}, \quad R_m^s = c_s l \mu \sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $c_s$  и  $c_e$  — скорости распространения сдвиговых и дилатационных волн в упругом теле,  $c_v$  — скорость распространения волн, соответствующая скорости упругого тела с пустотной фракцией.

### Распространение плоских волн.

Рассмотрим распространение плоских волн, характеризуемых компонентой перемещения  $u_1 = u$ , при действии магнитного поля  $H_{02} = H_0$  (рис. 1). В этом случае линеаризованная система уравнений (12)–(14) с учетом (15) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = P_H^s \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - v_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_2 \eta = v_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{R_m^s} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} H_{20} \right). \quad (18)$$

При идеальной электропроводности (магнитное число Рейнольдса  $R_m \rightarrow \infty$ ) гиперголо-параболическая система уравнений вырождается в гиперболическую и в отличие от обычной модели магнитоупругости описывает распространение еще одного типа волн, обусловленного наличием пустотной фракции  $\eta$ . При этом магнитоупругие волны и волны, соответствующие пустотной фракции, оказываются взаимосвязанными, и даже при  $R_m \rightarrow \infty$  система не сводится к уравнениям иерархической структуры, как это имеет место в классической магнитоупругости.

В случае распространения плоских монохроматических волн  $u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$  в терминах «фазовая скорость  $c_p$  — длина волны  $\lambda$ » ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c_p$ ) из системы (8)–(11) получаем дисперсионное уравнение

$$D(c_p(\lambda), \lambda) = 0, \quad (19)$$

которое после разделения действительной и мнимой частей сводится к двум взаимосвязанным уравнениям:

$$\operatorname{Re} D = c_p^4 \left\{ \frac{4\pi^2}{c_v^2 R_m c_e^2} \lambda^{-2} - \frac{v_1}{c_e^2} \right\} + c_p^2 \left\{ -\frac{4\pi^2}{R_m} \left( \frac{1}{c_p^2} + \frac{1}{c_v^2} \right) \lambda^{-2} + \right.$$

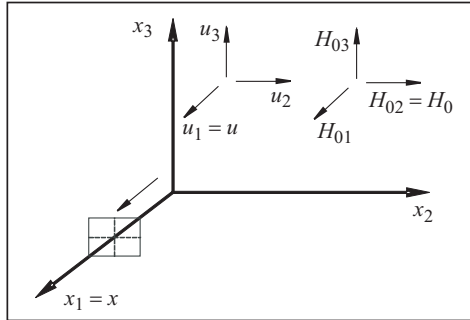


Рис. 1

$$+ v_1 \left( 1 + P_H^e H_{02}^2 V_1 \right) - \frac{v_2}{R_m c_e^2} \left. \right\} + c_p \frac{v_0 v_3}{R_m} + \left\{ \frac{4\pi^2}{R_m} \lambda^{-2} + \frac{v_2}{R_m} \right\} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } D = & c_p^4 \frac{1}{c_e^2 c_v^2} + c_p^2 \left\{ \frac{v_1}{c_e^2 R_m} - \frac{1}{c_e^2} - \frac{v_2}{c_e^2 4\pi^2} \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2\pi c_v^2} \lambda - P_H^e H_{02}^2 \frac{1}{c_v^2} \right\} + \\ & + c_p \frac{v_0 v_3}{4\pi^2} \lambda^2 + \left\{ -\frac{v_1}{R_m} + 1 + P_H^e H_{02}^2 + \left( \frac{v_2}{4\pi^2} + P_H^e H_{02}^2 \frac{v_2}{4\pi^2} \right) \lambda^2 \right\} = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Из уравнений (13), (14) видно сильное влияние электропроводности  $R_m \sim \sigma$  и магнитного поля  $P_H \sim H_0^2$  и связанности полей упругости (матрица) и пористой фракции,  $v_0 \sim \beta, v_1 \sim \beta$ .

**О дифракции магнитоакустических волн на упругом цилиндрическом препятствии.** Рассмотрим в цилиндрической системе координат уравнения, описывающие задачу дифракции. Ранее была рассмотрена задача для случая абсолютно жесткого цилиндра [10]. В данном случае цилиндрические волны распространяются от излучателя в магнитоакустической среде и дифрагируют на упругом цилиндре с пустотной фракцией (рис. 2). Рассмотрим уравнения в цилиндрической системе координат, связанной с рассеивателем:

— для внешней магнитоакустической среды [11] в области  $\Omega e$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - P_H R_m v_1, \quad \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = -c_0^2 \frac{1}{x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} - P_H R_m v_2, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{1}{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1 x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \right] = 0, \quad (23)$$

$$\frac{1}{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_1 x_1) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \right] = 0, \quad \frac{1}{x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} = v_2, \quad \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = v_1, \quad (24)$$

$$\frac{1}{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (e_1 x_1) + \frac{\partial e_2}{\partial x_2} \right] = 0; \quad (25)$$

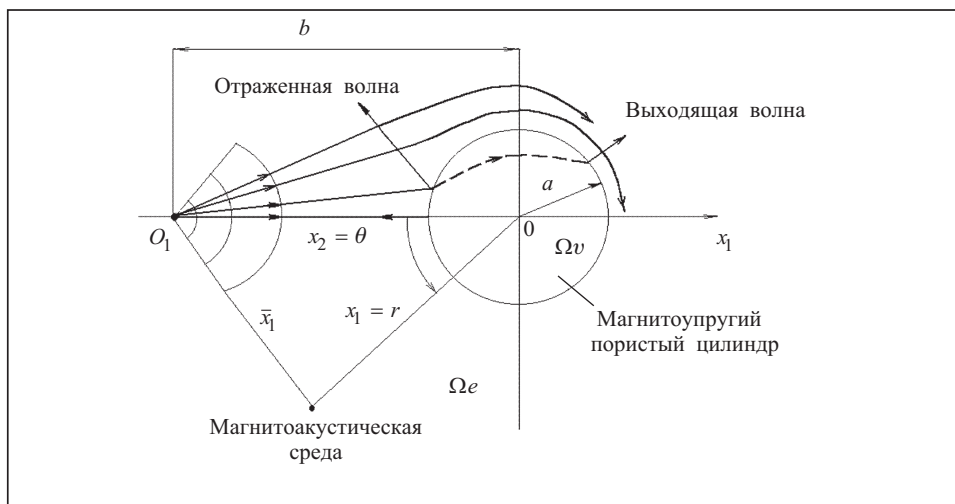


Рис. 2

— для магнитоупругого пористого цилиндра из уравнений (12) получаем в области  $\Omega v$

$$G \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial r} - \rho_1 \ddot{u}_r + X_r = 0, \quad (26)$$

$$G \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (\lambda + G) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} - \rho_1 \ddot{u}_\theta + X_\theta = 0, \quad (27)$$

$$e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad (28)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (29)$$

Система дополняется уравнениями (13) и (14).

Условия сопряжения, отнесенные к невозмущенной поверхности раздела двух сред  $\Omega e_1, \Omega v_2$ , определяются уравнениями

$$\vec{n} \cdot (\vec{V}^1 - \vec{V}^2) = 0, [(\sigma_{ik}^1 + T_{ik}^1) - (\sigma_{ik}^2 + T_{ik}^2)] n_i = 0, i, k = 1, 2, 3, \quad (30)$$

$$\vec{n} \cdot \left( \frac{\mu^1}{\mu^2} \vec{H}^1 - \vec{H}^2 \right) = 0, \vec{n} \times (\vec{H}^1 - \vec{H}^2) = 0, \quad (31)$$

$$\vec{n} \cdot \left( \frac{\mu^1}{\mu^2} \vec{E}^1 - \vec{E}^2 \right) = 0, \vec{n} \times (\vec{E}^1 - \vec{E}^2) = 0. \quad (32)$$

Для определения вида излучаемой волны сначала решается задача излучения волны в системе координат  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , связанной с излучателем. Искомые функции представляются в виде  $f(x_1, x_2, t) = f^*(x_1, x_2) e^{-i\omega t}$ .

В предельном случае жесткого цилиндра получаем приближенные выражения для плотности  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \rho = & -2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{P_H R_m}{\rho_0 c_0} (b + x_1) \right] \left[ 1 + \frac{1}{16} \left( \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \right) \right]^{-2} \times \\ & \times \left( \cos kb - \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \sin kb \right) (1 + 2 \cos x_2), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \rho = & -2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{P_H R_m}{g_0 c_0} (b + x_1) \right] \left[ 1 + \frac{1}{16} \left( \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \right) \right]^{-2} \times \\ & \times \left( \sin kb - \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \cos kb \right) (1 + 2 \cos x_2). \end{aligned} \quad (34)$$

Из выражений (33) и (34) можно установить сильное влияние на дифрагированное поле эффектов диссипации, расстояния от излучателя  $b$ , волнового числа  $kb$  и  $P_H R_m$ , а в рассматриваемом случае имеет место существенное влияние на волновое поле упругих свойств рассеивателя с учетом пустотной фракции.

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ФЕРРОЖИДКОСТИ

Магнитные жидкости (феррожидкости) были впервые получены в США в середине 60-х годов прошлого века. Они обладают рядом существенных преимуществ: малые потери на трение, полная герметичность, безызносность, эффект

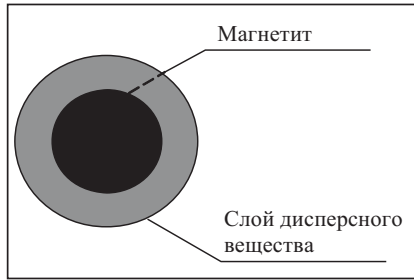


Рис. 3

самовосстановления в случае аварийного прорыва уплотняемой среды, высокие надежность и долговечность, простота в изготовлении и обслуживании [11]. Однако теоретический анализ поведения феррожидкостей связан с большими трудностями ввиду сложности уравнений, описывающих поведение магнитных жидкостей.

Феррогидродинамика изучает поведение суспензии, которая состоит из жидкости и намагничиваемых частиц — феррочастиц (рис. 3).

Феррожидкость (магнитная жидкость) представляет собой коллоидный раствор, в котором содержатся частицы размером  $10^{-6}$  мм, расположенные в вакуумном масле. Плотность частиц равна  $10^{23}$  на  $\text{м}^3$  среды, в которой имеются взвешенные малые феррочастицы.

На основе традиционной модели проводились исследования различных задач, включая динамику взвешенных ферромагнитных частиц в суспензии при действии магнитного поля [12–15].

**Уравнения феррогидродинамики.** Традиционные уравнения феррогидродинамики в случае вязкой несжимаемой среды представляются в следующем виде [13–15]:

уравнение сохранения импульса

$$\tilde{\rho}[\partial \vec{V} / \partial t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}] = -\nabla \tilde{p} + \eta_d \nabla^2 \vec{V} + \mu_0 M \nabla \vec{H}; \quad (35)$$

уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0; \quad (36)$$

уравнение сохранения энергии, в котором последний член, пропорциональный квадрату тензора сдвиговых деформаций, характеризует тепло, обусловленное вязкостью,

$$\partial T / \partial t + (\vec{V} \cdot \nabla) T = k_t \nabla^2 T + \frac{v_k}{2c_p} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)^2; \quad (37)$$

уравнение состояния

$$\tilde{\rho} = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]; \quad (38)$$

условие отсутствия внешнего заданного тока

$$\nabla \times \vec{H} = 0; \quad (39)$$

условие отсутствия магнитных зарядов

$$\nabla \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0; \quad (40)$$

уравнения, определяющие состояние магнитной жидкости

$$\vec{M} = M \vec{H} / H; \quad (41)$$

$$M = M_0 - K(T - T_0) + \chi(H - H_0). \quad (42)$$

Приведенная система уравнений (35)–(42) — параболически-эллиптического типа и описывает возмущения, распространяющиеся с бесконечной скоростью, даже если не учитывать вязкость. В дальнейшем будем рассматривать модель без учета вязкости, но с учетом сжимаемости и тепловой релаксации [7].

### Обобщенная волновая гиперболическая модель феррогидродинамики.

Предполагается, что рассмотрение проводится в евклидовом пространстве  $R^3$  и все искомые функции гладкие, т.е. принадлежат классу  $C^\infty$ . Запишем соответствующую замкнутую систему обобщенных уравнений в следующем виде:

уравнение сохранения импульса

$$\tilde{\rho} \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla \tilde{p} + \mu_0 (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{H}, \quad (43)$$

обобщенное уравнение состояния

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -K \nabla \cdot \vec{V} + \beta K \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (44)$$

обобщенное гиперболическое уравнение распространения тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_t \nabla^2 T - \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \gamma \nabla \cdot \vec{V}, \quad (45)$$

уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0, \quad (46)$$

материальные уравнения

$$\tilde{\rho} = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)], \quad \vec{M} = \frac{\vec{H}}{H} M, \quad (47)$$

$$M = M_0 - K_p(T - T_0) + \chi(H - H_0). \quad (48)$$

В (43)–(48) приняты следующие обозначения:  $x = (x_1, x_2, x_3)$  — пространственные координаты,  $t$  — время,  $\vec{V}$  — гамильтониан,  $\nabla^2$  — лапласиан, знаки  $\cdot$  и  $\times$  обозначают символы скалярного и векторного произведения соответственно,  $\tilde{p}$  — давление,  $\tilde{\rho}$  — плотность,  $T$  — температура,  $\vec{V}$  — вектор скорости,  $\vec{H}$  — вектор напряженности магнитного поля,  $\vec{M}$  — вектор намагниченности,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость,  $K$  — коэффициент объемного расширения,  $\beta$  — коэффициент объемной температурной дилатации,  $k_t$  — коэффициент теплопроводности,  $\tau$  — время тепловой релаксации,  $\gamma$  — коэффициент термоупругой диффузии,  $K_p$  — пирромагнитная постоянная,  $\chi$  — восприимчивость.

Приведенная система уравнений (43)–(48) — гиперболо-эллиптического типа и описывает распространение возмущений с конечной скоростью в отличие от традиционной системы (35)–(42).

Представим магнитное поле в виде суммы невозмущенных и возмущенных компонент в предположении, что в начальном состоянии среда покоится:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\vec{x}, t) &= p_0 + p(\vec{x}, t), \quad \tilde{\rho}(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho(\vec{x}, t), \\ \vec{V}(\vec{x}, t) &= 0 + \vec{v}(\vec{x}, t), \quad T(\vec{x}, t) = T_0(\vec{x}) + \hat{t}(\vec{x}, t), \\ \vec{H}(\vec{x}, t) &= H_0(\vec{x}) + \vec{h}(\vec{x}, t), \quad \vec{M}(\vec{x}, t) = \vec{M}_0(\vec{x}) + \vec{m}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (49)$$

Предположение малости возмущенных величин по сравнению с невозмущенными приводит к линеаризованной замкнутой системе уравнений для скалярных функций  $\varphi$ ,  $\hat{t}$  и  $\psi$  ( $\vec{v} = \nabla \varphi$ ,  $\vec{h} = \nabla \psi$ ):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi = -\beta c_0^2 \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} + \frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0} (\nabla \psi_0) \cdot \left( \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial t^2} - c_h^2 \nabla^2 \hat{t} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \nabla^2 \varphi, \quad (51)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{K_p}{\chi} \nabla \hat{t}, \quad (52)$$

где

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}, \quad c_h = \sqrt{\frac{K}{\tau}}.$$

Уравнение (50) в правой части имеет член, учитывающий влияние температурного поля и диссипации, связанной с потерями в магнитной жидкости. Уравнение (51) включает член с релаксацией времени и член, учитывающий влияние дилатационного поля. Как видно из уравнения (50), последний член не равен нулю только в том случае, когда  $\bar{\nabla} \psi_0 \neq 0$ .

**Распространение плоских волн.** Предположим, что в направлении оси  $Ox$  распространяется плоская волна. В этом случае система уравнений (50)–(52) представится в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\beta c_0^2 \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} + \frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x) \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}, \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial t^2} - c_h^2 \frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{K_p}{\chi} \frac{\partial \hat{t}}{\partial x}. \quad (55)$$

Далее рассмотрим случай постоянного невозмущенного магнитного поля  $H_0 = \text{const}$ :

$$\psi_0(x) = H_0 x \Rightarrow \frac{\partial \psi_0(x)}{\partial x} = H_0. \quad (56)$$

Уравнения (53)–(55) для случая (56) могут быть сведены к следующему уравнению:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[ \tau \frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial t^2} - \tau c_h^2 \frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \right] - \left[ -\frac{\beta c_0^2}{q_t} + \underbrace{\frac{\mu_0(1+\chi) H_0 K_p}{\rho_0 \chi}}_{q_m} \right] \frac{\partial^3 \hat{t}}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (57)$$

После некоторых преобразований уравнение (57) может быть представлено в виде

$$\tau \frac{\partial^4 \hat{t}}{\partial t^4} - \tau(c_h^2 + c_0^2) \frac{\partial^4 \hat{t}}{\partial t^2 \partial x^2} + \tau c_0^2 c_h^2 \frac{\partial^4 \hat{t}}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \hat{t}}{\partial t^3} + (q_t - q_m) \frac{\partial^3 \hat{t}}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (58)$$

**Стационарные волны.** Для исследования стационарных волн функция  $\hat{t}$  представляется как

$$\hat{t}(x, t) = f(x - ct) = f(\theta), \quad (59)$$

где  $\theta$  — фаза.

В классе решений (59) уравнение (58) может быть приведено к виду

$$f''' - \frac{a_1}{a_2} f'' - \frac{a_0}{a_2} f = 0, \quad (60)$$

где  $a_0 = \tau(c_h^2 + c_0^2)c^2$ ,  $a_1 = c(c^2 + q_t - q_m)$ ,  $a_2 = \tau(c^4 + c_0^2 c_h^2)$ . Общее решение уравнения (60) записывается в виде

$$f(\theta) = B_1 e^{\kappa_1 \theta} + B_2 e^{\kappa_2 \theta}, \quad (61)$$



где

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2}}. \quad (62)$$

Из (62) следует, что действительные корни существуют при условиях  $a_1^2 > 4a_0$ ,  $c^2 + q_t > q_m$ , в этом случае решения уравнения (58), соответствующие распространению стационарных волн (59), не существует.

**Бегущие волны.** В случае бегущих волн решение представляется в виде распространяющихся монохроматических волн

$$\hat{t}(x, t) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (63)$$

После подстановки (63) в уравнение (58) получим условие разрешимости в виде

$$\tau c_p^4 - \tau(c_h^2 + c_0^2)c_p^2 + \tau c_0^2 c_h^2 + i \frac{\lambda}{2\pi} c_p^3 + i(q_t - q_m) \frac{\lambda}{2\pi} c_p = 0, \quad (64)$$

где  $c_p = \frac{\omega}{k}$  — фазовая скорость,  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c_p$  — круговая частота,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны.

В общем случае уравнение (64) имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Ниже рассмотрим два вырожденных случая: длинноволновое приближение и коротковолновое приближение. В первом случае при  $\lambda \rightarrow \infty$  (или  $\tau \rightarrow 0$ ) медленное движение определяется условием существования решений

$$c_p = \sqrt{q_m - q_t}, \quad q_m > q_t. \quad (65)$$

Во втором случае при  $\lambda \rightarrow 0$  уравнение (64) вырождается и сводится к виду

$$c_p^4 - (c_h^2 + c_0^2)c_p^2 + c_0^2 c_h^2 = 0. \quad (66)$$

Уравнение (66) имеет два действительных корня, что дает условия разрешимости задачи:  $c_p = c_h$  и  $c_p = c_0$ , которые соответствуют двум характеристикам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены две обобщенные волновые модели.

— Представленная континуальная модель магнитоупругой среды описывает взаимодействие магнитоупругого поля и поля пустотной фракции. Упругая матрица определяется гиперболическим уравнением (1), и для построения обобщенной модели используется уравнение, учитывающее пустотную фракцию (2), которое несмотря на наличие диссипативного механизма также относится к гиперболическому типу. В результате получено обобщенное уравнение гиперболо-параболического типа.

— В результате проведения линеаризации система уравнений сводится к трем разрешающим уравнениям.

— Рассмотрена задача о распространении плоских волн и проведен качественный анализ дисперсионного уравнения, сведенного к взаимосвязанным действительной и мнимой частям уравнения. Показано сильное влияние магнитоупругих эффектов и пустотной фракции на распространение волн.

— Представлены соотношения для задачи дифракции магнитоакустических волн на магнитоупругом цилиндре с пустотной фракцией, рассмотренной ранее для жесткого цилиндра [10, 11].

— Обобщенная континуальная модель феррогидродинамики учитывает эффекты сжимаемости и тепловой релаксации. С помощью модели, которая отно-

сится к гипербола-эллиптическому типу, можно определить распространение возмущений с конечными скоростями в отличие от традиционной модели.

— В результате проведенной линеаризации система уравнений была сведена к трем разрешающим уравнениям.

— На основании плоских стационарных и бегущих волн исследована разрешимость задачи.

— Показано, что решения существуют не при всех физических параметрах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cowin S.C. Thermodynamic model for porous materials with vacuous pores // J. Appl. Physics. — 1972. — **43**, N 6. — P. 2495–2497.
2. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids // J. Elasticity. — 1983. — **13**. — P. 125–147.
3. Selezov I.T. Wave processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mechanics Research. — 2003. — **30**, N 2. — P. 219–249.
4. Chandrasekharalah D.S. Complete solutions in the theory of elastic materials with voids // Quart. J. Mech. and Appl. Math. — 1987. — **40**, Pt. 3. — P. 401–414.
5. Scalia A. Shock waves in viscoelastic materials with voids // Wave Motion. — 1994. — **19**. — P. 125–133.
6. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1967. — **157**. — P. 49–89.
7. Selezov I.T. On wave hyperbolic model for disturbance propagation in magnetic fluid. Ser. Operator Theory. Advances and Applications. — Basel: Birkhauser Verlag, 2009. — **191**. — P. 221–225.
8. Colosqui G., Chen H., Shan X., Staroselsky I. Propagation high-frequency shear waves in simple fluids // Physics of Fluids. — 2009. — **21**. — P. 013105-1–013105-8.
9. Jackson J.D. Classical electrodynamics. — New York; London: John Wiley & Sons, Inc., 1962. — Рус. пер.: Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965. — 703 с.
10. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. — Киев: Наук. думка, 2012. — 232 с.
11. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. — Киев: Наук. думка, 1985. — 136 с.
12. Самойленко Ю.И. Проблемы и методы физической кибернетики // Праці Ін-ту математики НАНУ. — 2006. — **56**. — 642 с.
13. Neuringer J.L., Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. — 1964. — **7**, N 12. — P. 1927–1937.
14. Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics. — Cambridge University Press, 1985. — Рус. пер.: Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. — М.: Мир, 1989. — 356 с.
15. Berkovsky B., Medvedev V., Krakov M. Magnetic fluids: engineering applications. — Oxford University Press, 1993. — Рус. пер.: Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. — М.: Химия, 1989. — 240 с.

*Поступила 23.01.2013*