УДК 519.872

И.Н. КОВАЛЕНКО, Е.В. КОБА, О.Н. ДЫШЛЮК

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ $GI/G/1$ ПРИ ДИСЦИПЛИНЕ FCFS

Ключевые слова: *системы массового обслуживания, повторные вызовы, устойчивость систем массового обслуживания.*

Авторы этой статьи рады возможности опубликовать ее в юбилейном номере журнала «Кибернетика и системный анализ», посвященном 90-летию со дня рождения академика В.М. Глушкова.

Виктор Михайлович уделял большое внимание теории вероятностей и, в частности, теории массового обслуживания. Он рассматривал эти науки как аппарат для решения задач кибернетики. В его знаменитой книге «Синтез цифровых автоматов» [1] говорится о роли теории массового обслуживания и приводится ссылка на одну из книг об этой теории. Академик В.М. Глушков был соавтором работ о программных методах теории массового обслуживания.

Начиная с 80-х годов XX столетия, активно развивается теория систем с повторными вызовами. В классической теории массового обслуживания рассматриваются системы без блокировки заявок: при наличии свободного канала поступившая в систему заявка немедленно отправляется на обслуживание. Очевидно, такие модели представляют собой идеализированную картину реальных процессов. Во многих реальных системах заявку блокируют до момента, пока не будут созданы условия для ее обслуживания, даже если канал свободен.

Одним из важных типов систем с блокировкой являются системы с возвращением (повторением) заявок. Так, при обычной телефонной связи, услышав частые гудки, абонент повторяет вызов через некоторое постоянное или случайное время; в процессе посадки воздушного судна на взлетно-посадочную полосу в случае ее занятости воздушное судно отправляется в зону ожидания, чтобы возвратиться через постоянное (в достаточном приближении) время; подобная ситуация имеет место и в информационно-телекоммуникационных системах и сетях.

Наиболее общая модель системы массового обслуживания (СМО) с возвращением заявок представлена в обзорной статье T. Yang и J.G.C. Templeton [2]; отметим также обзор Г.И. Фалина [3] и его монографию с J.G.C. Templeton [4]. Большой вклад в развитие теории систем обслуживания с повторением внесли J.R. Artalejo и A. Gomez-Corral. Их многочисленные статьи, в которых отражается специфика повторения и обслуживания таких систем, обобщены в [5]. Кроме того, J.R. Artalejo сделал обзор и опубликовал библиографию, в которой отражается процесс развития теории систем с повторением заявок [6–8].

Возросшие в последние годы производительность и сложность информационно-телекоммуникационных систем и сетей предъявляют повышенные требования к качеству решений, принимаемых в процессе их проектирования, что, в свою очередь, влечет за собой интенсивное развитие теоретических методов их исследования. Важную роль при этом играет развитие теории систем обслуживания и, в частности, систем обслуживания с повторением вызовов (возвращением заявок). Существенный вклад в развитие теории систем обслуживания с повторением и ее применение внесли А.Н. Дудин, В.И. Клименок [9], Д.Ю. Кузнецов, А.А. Назаров [10], В.В. Анисимов и Е.А. Лебедев [11] и др.

Среди систем обслуживания с повторением можно выделить класс систем с дисциплиной обслуживания в порядке очереди (FCFS). Этот класс систем естественно назвать системами типа Лакатоша в честь венгерского ученого Ласло Лакатоша, который впервые его рассмотрел [12]. Л. Лакатош решал задачи моделирования посадки воздушных суден на взлетно-посадочную полосу. Если полоса не свободна или по какой-либо другой причине (например, плохие метеоусловия) воздушное судно не может совершить посадку, оно направляется в зону ожидания или на второй круг. Нормы эшелонирования не допускают обгона на круге или в зоне ожидания, выдерживаются также нормы произвольного, вертикального или горизонтального эшелонирования. Таким образом, соблюдается дисциплина принятия на обслуживание в порядке очереди.

Системы типа Лакатоша являются моделями многих реальных систем: оптического буфера, call-центра с ожиданием и автоответчиками и т.д., поэтому их исследование является важным и актуальным.

При исследовании систем обслуживания с повторениями возникает много проблем, и в первую очередь — проблема их эргодичности.

Изучая системы обслуживания с циклическим временем ожидания, Л. Лакатош вывел условие эргодичности системы $M / M / 1$ с постоянным временем T цикла орбиты [12]. В работах [13, 14] Е.В. Коба обобщила результаты Л. Лакатоша. В [13] модель Лакатоша обобщается на системы с рекуррентным входящим потоком, произвольными распределениями как времени обслуживания, так и времени пребывания заявки на орбите. В таком обобщении в работе [14] Е.В. Коба изучила систему $GI / G / 1$, указав достаточные условия эргодичности случайной последовательности, описывающей систему. В настоящей статье указанная система обобщается на случай периодической системы обслуживания. Вначале опишем алгоритм обслуживания заявок, затем приведем вероятностные предпосылки. Обозначим входящий поток заявок $(t_n, n \geq 0)$, где $t_0 = 0$, разности $X_n = t_n - t_{n-1}$ — положительные величины, понимая под t_n момент поступления в систему n-й заявки, $Y_n > 0$ — время ее обслуживания. Поступив в систему в момент t_n, n-я заявка направляется на обслуживание немедленно, если канал и орбита свободны. В противном случае все зависит от величины V_n, где $V_n > 0$ — время от t_n до момента, когда будет обслужена $(n-1)$-я заявка. На орбиту направляется n-я заявка и возвращается через интервалы времени $D_{n1}, D_{n2}, \ldots, D_{nN}$, где $D_{nj} > 0$, число N определяется условием, что в N-й момент возвращения с орбиты n-я заявка впервые застает канал свободным.

Введем следующие обозначения:

- W_n — время ожидания n-й заявки, т.е. время от момента t_n до принятия ее на обслуживание;
- $U_n = W_n + Y_n$ — время пребывания n-й заявки в системе;
- $V_n = (U_{n-1} - X_n)_+$, где используется обычное обозначение $a_+ = a$ при $a > 0$, $a_+ = 0$ при $a \leq 0$.

Таким образом, V_n — остаток времени пребывания в системе $(n-1)$-й заявки к моменту t_n поступления n-й заявки. В частности, если $(n-1)$-я заявка обслужена в момент t_n или ранее, то полагаем $V_n = 0$.

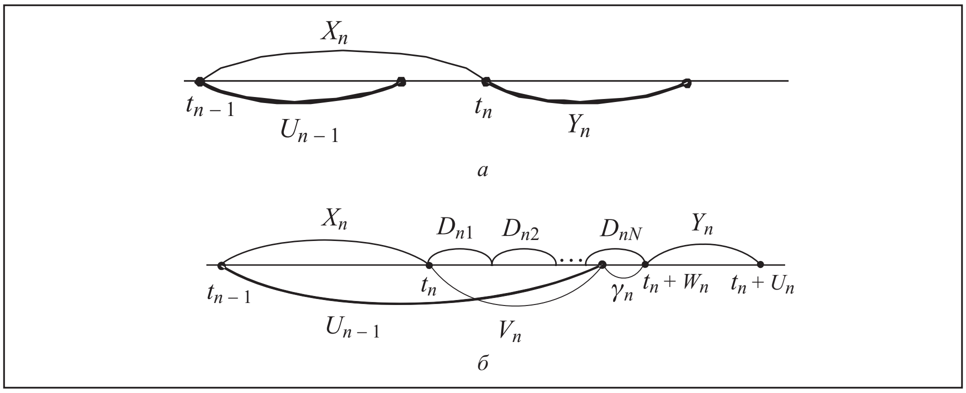

Рис. 1

На рис. 1 изображены два возможных случая. На рис. 1, *а* показан случай, когда n-я заявка прибывает в систему, когда $(n-1)$-я заявка уже покинула систему или одновременно с этим моментом, тогда $W_n = 0, V_n = 0$. На рис. 1, *б* показан случай, когда $W_n = D_{n1} + D_{n2} + \ldots + D_{nN}$, где N определяется условием $D_{n1} + D_{n2} + \ldots + D_{n,N-1} < V_n \le D_{n1} + D_{n2} + \ldots + D_{nN}$, $W_n = V_n + \gamma_n$, где γ_n — величина перескока через уровень V_n случайного блуждания $(D_{n1}, D_{n1} + D_{n2}, \ldots)$. Для общности в случае *а* положим $\gamma_n = 0$. Так как величина перескока определяется величиной V_n и циклами на орбите D_{nj}, кратко можно обозначить $\gamma_n = \gamma(v, \overline{d})$ при условии, что $V_n = v$, $(D_{nj}) = \overline{D}_n = \overline{d}$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА

Представим себе, что имеется датчик, вырабатывающий последовательности (X_n), (Y_n), (D_{nk}). Тогда по следующим рекуррентным формулам вычисляются все введенные выше характеристики процесса обслуживания.

При $n \ge 1$ имеем

$$W_n = V_n + \gamma(V_n, \overline{D}_n), \tag{1}$$

где

$$\overline{D}_n = (D_{n1}, D_{n2}, \ldots), \tag{2}$$

$$V_n = (U_{n-1} - X_n)_+, \tag{3}$$

$$U_n = W_n + Y_n, \tag{4}$$

$$\gamma(V_n, \overline{D}_n) = D_{n1} + D_{n2} + \ldots + D_{nN} - V_n. \tag{5}$$

Здесь

$$W_n = \gamma(V_n, \overline{D}_n) = 0 \text{ при } V_n = 0, \tag{6}$$

$$N = \min\,(k \ge 0 : D_{n1} + D_{n2} + \ldots + D_{nk} \ge V_n), \tag{7}$$

$$\gamma(V_n, \overline{D}_n) = W_n - V_n. \tag{8}$$

При моделировании можно положить

$$W_0 = 0, \tag{9}$$

$$V_0 = Y_0. \tag{10}$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Алгоритм (1)–(10) выполняется при произвольных положительных величинах X_n, Y_n, D_{nj}. Исходя из известных нам реальных примеров данной системы, наибольшее значение имеет вероятностная модель, в которой указанные величины X_n, Y_n, D_{nj} независимы в совокупности и обладают функциями распределения $X_n \sim A_n(x)$, $Y_n \sim B_n(x)$, $D_{nj} \sim D_n(x)$.

Выделим два важных случая:

1) однородная модель [14]: все введенные распределения не зависят от n;

2) периодическая модель: все введенные распределения периодически зависят от n с периодом R.

На периодической модели мы и сосредоточимся в данной статье. Помимо этого, будем считать, что конечны моменты $\alpha_{n1}(X) = EX_n$, $\alpha_{n1}(Y) = EY_n$, $\alpha_{n1}(D) = ED_{n1}$, $\alpha_{n2}(D) = ED_{n1}^2$. Также предположим, что рассматриваемые случайные величины целочисленны, и обозначим $a_{nk} = P(X_n = k)$, $b_{nk} = P(Y_n = k)$, $d_{nk} = P(D_{n1} = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $a_{n0} = b_{n0} = d_{n0} = 0$.

В научной литературе описаны многие условия эргодичности систем массового обслуживания. Как наиболее фундаментальную монографию следует отметить [15]. Нас удовлетворяет теорема в формулировке Г.П. Климова [16], воспроизведенная также в [17]: «Пусть существует неотрицательная функция $f(i)$ со следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех i из множества X состояний цепи Маркова (ν_n), за исключением, возможно, некоторого конечного множества,

$$E(f(\nu_n) \mid \nu_{n-1} = i) \le f(i) - \varepsilon; \tag{11}$$

2)

$$E(f(\nu_n) \mid \nu_{n-1} = i) < \infty, \ i \in X. \tag{12}$$

Теорема. Если цепь Маркова (ν_n) неприводимая, непериодическая и удовлетворяет условиям (11), (12), то эта цепь является эргодической».

Эргодические теоремы для вложенной цепи Маркова (W_n) как для решетчатого, так и для нерешетчатого случая, для однородной модели (см. выше) получены в [14]. Цель настоящей статьи — решение такой задачи для целочисленной периодической модели.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Предположим, что случайные величины X_n с положительной вероятностью могут принимать сколь угодно большие значения, т.е.

$$\forall_l \{A_n(l) < 1\}, \ 1 \le n \le R, \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{R} \left(\alpha_{n1}(Y) + \frac{1}{2\alpha_{n1}(D)} (\alpha_{n2}(D) - \alpha_{n1}(D)) - \alpha_{n1}(X) \right) < 0, \tag{14}$$

а также

$$\text{НОД}(k : d_{nk} > 0) = 1, \ 1 \le n \le R. \tag{15}$$

Тогда цепи Маркова $(W_{nR+\theta}, n \ge 0)$ имеют эргодические распределения, не зависящие от начальных значений W_θ, где $\theta = 0, 1, 2, \dots, R-1$.

Доказательство. Фиксируем целое число θ, $0 \le \theta \le R-1$, и рассмотрим цепь Маркова $(X_{nR+\theta}, n \ge 0)$.

При любых фиксированных значениях случайных величин W_θ, а также $Y_\theta, \dots, Y_{\theta+R-1}$ согласно (13) можно выбрать достаточно большие $X_{\theta+1}, \dots, X_{\theta+R}$, так что $W_{\theta+R} = 0$; следовательно, данная цепь Маркова неприводима. Так как, в частности, при $W_\theta = 0$ $P(W_{\theta+R} = 0 \mid W_\theta = 0) > 0$, она также непериодична.

Итак, для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий теоремы Климова. Рассмотрим вначале процесс восстановления, т.е. множество $(S_j, j \ge 0)$ случайных точек, где $S_0 = 0$; $S_j = S_{j-1} + D_j$, $j \ge 1$; D_j — независимые положительные случайные величины с распределением

$$a_k = P(D_j = k), \ k = 0, 1, 2, \dots, \ j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $a_0 = 0$, и конечными моментами первого и второго порядка: $\alpha_1(D) = ED_1$, $\alpha_2(D) = ED_1^2$.

Пусть $z \ge 0$ — целое число, $\gamma(z)$ — величина перескока случайного блуждания (S_j) через уровень z, т.е. $\gamma(z) = S_N - z$, где N определяется из условия $S_{N-1} < z \le S_N$.

Точные и асимптотические свойства величины перескока исследованы в [18].

Обозначим $h_j = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = j)$, $j \ge 0$ (дискретная версия плотности восстановления). Тогда

$$E\gamma(z) = \sum_{j=0}^{z-1} h_j \sum_{i=0}^{\infty} i d_{z-j+i}. \tag{16}$$

Из теории восстановления известно, что если $\text{НОД}(k : h_k > 0) = 1$, то

$$\lim_{j \to \infty} h_j = \frac{1}{\alpha_1(D)}. \tag{17}$$

ISSN 0023-1274. Кибернетика и системный анализ, 2013, № 4

Поскольку последовательность (h_j) имеет конечный предел, то она ограничена:

$$h_j \le c, \ \ j \ge 0. \tag{18}$$

Из (16) и (18) находим оценку

$$E\gamma(z) \le \frac{c}{2}(\alpha_2(D) - \alpha_1(D)). \tag{19}$$

Более тонкая оценка получается, если выбрать такое s, что

$$h_j < \frac{1+\varepsilon}{\alpha_1(D)}, \ j > s. \tag{20}$$

Тогда, использовав для h_j оценку (18) при $j \le s$ и оценку (20) при $j > s$, получим неравенства

$$\sum_{j=0}^{s} h_j \sum_{i=1}^{\infty} i d_{z-j+i} \le c \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=1}^{\infty} i d_{z-j+i} \le c \sum_{k=z-s+1}^{\infty} k(k-1) d_k, \ z > s. \tag{21}$$

Аналогично

$$\sum_{j=s+1}^{z-1} h_j \sum_{i=1}^{\infty} i d_{z-j+i} \le \frac{1+\varepsilon}{\alpha_1(D)} \sum_{j=s+1}^{z-1} \sum_{i=1}^{\infty} i d_{z-j+i} \le \frac{1+\varepsilon}{2\alpha_1(D)} (\alpha_2(D) - \alpha_1(D)). \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует оценка

$$E\gamma(z) \le c \sum_{k=z-s+1}^{\infty} k(k-1) d_k + \frac{1+\varepsilon}{2\alpha_1(D)} (\alpha_2(D) - \alpha_1(D)). \tag{23}$$

Первое слагаемое правой части (23) есть остаток ряда, сходящегося к $c(\alpha_2(D) - \alpha_1(D))$, т.е. оно бесконечно мало при $(z-s) \to \infty$; второе слагаемое при $z \to \infty$ можно сделать сколь угодно близким к $\dfrac{\alpha_2(D) - \alpha_1(D)}{2\alpha_1(D)}$. Отсюда выводим следующее асимптотическое соотношение:

$$\lim_{z \to \infty} E\gamma(z) = \frac{1}{2\alpha_1(D)} (\alpha_2(D) - \alpha_1(D)). \tag{24}$$

На основании найденных оценок проверим выполнение условий теоремы Г.П. Климова. Далее полагаем, что w_θ есть фиксированное значение случайной величины W_θ. Обозначим $E_n = E(W_n - W_{n-1} \mid W_\theta = w_\theta)$. Тогда

$$E(W_{\theta+R} - W_\theta \mid W_\theta = w_\theta) = \sum_{n=1}^{R} E_n. \tag{25}$$

В свою очередь, $E_n = E_{n1} + E_{n2}$, где

$$E_{n1} = E\left(W_n - W_{n-1}; X_i \le \frac{w_\theta}{R+1}, \text{где } \theta+1 \le i \le \theta+R \mid W_\theta = w_\theta \right),$$

$$E_{n2} = E(W_n - W_{n-1} \mid W_\theta = w_\theta) - E_{n1}.$$

Вначале оценим E_{n1}. При условии $X_i \le w_\theta/(R+1)$, $1 \le i \le R$, выполняются неравенства

$$W_n > w_\theta - \frac{R w_\theta}{R+1} = \frac{w_\theta}{R+1};$$

отсюда $E\gamma_n$ оценивается по формуле (23), где можно положить $z = w_\theta/(R+1)$. В результате получаем

$$E_{n1} \le \alpha_{n-1,1}(Y) + E\gamma_n\left(\frac{w_\theta}{R+1}\right) - \alpha_{n1}(X) + E\left(X_n; X_n > \frac{w_\theta}{R+1}\right). \tag{26}$$

Из соотношения (24), учитывая также, что

$$E\left(X_n > \frac{w_\theta}{R+1}\right) \xrightarrow[w_\theta \to \infty]{} 0$$

как остаток сходящегося ряда, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{w_\theta\to\infty} E_{n1} = \alpha_{n-1,1}(Y) + \frac{1}{2\alpha_{n1}(D)}(\alpha_{n2}(D) - \alpha_{n1}(D)) - \alpha_{n1}(X). \quad (27)$$

Оценивая E_{n2} с помощью (19), заметим, что

$$E_{n2} \le P\left(\bigcup_{n=\theta+1}^{\theta+R}\left\{X_n > \frac{w_\theta}{R+1}\right\}\left(\alpha_{n1}(Y) + \frac{c}{2}(\alpha_{n2}(D) - \alpha_{n1}(D))\right)\right). \quad (28)$$

Первый множитель правой части (28) оценивается сверху величиной $\dfrac{R(R+1)\alpha_{n1}(X)}{w_\theta}$; второй, очевидно, ограничен.

Просуммировав (27) и (28) по n, $\theta+1 \le n \le \theta+R$, получим левую часть неравенства (14), учитывая, что $\alpha_\theta(Y) = \alpha_{\theta+R}(Y)$. Таким образом, условие (11) теоремы Климова выполнено.

Условие (12) следует из того, что

$$E(W_{\theta+R} \mid W_\theta = w_\theta) \le w_\theta + E(Y_\theta + \ldots + Y_{\theta+R-1}) + E(\gamma_{\theta+1} + \ldots + \gamma_{\theta+R}) < \infty,$$

поскольку $EY_n = \alpha_{n1}(Y) < \infty$ и $E\gamma_n < \infty$ по условию (19).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. — М.: Физматгиз, 1962. — 476 с.
2. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queues // Queueing Systems. — 1987. — N 3. — P. 201–233.
3. Falin G. A survey of retrial queues // Ibid. — 1990. — N 7. — P. 127–167.
4. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. — London: Chapmen & Hall, 1997. — 328 p.
5. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial queueing systems: a computational approach. — Berlin: Springer, 2008. — 318 p.
6. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues // Math. and Comput. Model. — 1999. — **30**, N 3–4. — P. 1–6.
7. Artalejo J.R. A classified bibliography of research on retrial queues: Progress in 1990–1999 // Top. — 1999. — **7**. — P. 187–211.
8. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues: Progress in 2000-2009 // Math. and Comput. Model. — 2010. — **51**, N 9–10. — P. 1071–1081.
9. Dudin A.N., Klimenok V.I. A retrial BMAP/SM/1 system with linear repeated requests // Queueing Systems. — 2000. — **34**. — P. 47–66.
10. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Адаптивные сети случайного доступа. — Томск: Дельтаплан, 2002. — 253 с.
11. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания: марковские модели. — Киев: Либідь, 1992. — 206 с.
12. Lakatos L., Balkema A.A. A probability model connected with landing of airplanes // Safety and Reliability. — Rotterdam: Brookfield, 1999. — P. 151–154.
13. Коба Е.В. О системе обслуживания $GI/G/1$ с повторением заявок при обслуживании в порядке очереди // Доп. НАН України. — 2000. — № 6. — С. 101–103.
14. Koba E.V. On a $GI/G/1$ retrial queueing system with a FIFO queueing discipline // Theory Stochast. Proces. — 2002. — **24**, N 8. — P. 201–207.
15. Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: Эдиториал УССР, 1999. — 440 с.
16. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 243 с.
17. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. —- М.: ЛКИ, 2007. — 400 с.
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 2. — 765 с.

Поступила 04.02.2013