



Ключевые слова: *Алгоритм Очевидности, автоматизация доказательств теорем, поиск логического вывода, система автоматизации доказательств, язык TL, язык ForTheL.*

ВВЕДЕНИЕ

Среди основополагающих идей В.М. Глушкова, определивших главные направления развития кибернетики в отечественной науке и оставивших значительный след в мировой науке, особое место занимают идеи, связанные с развитием «внутреннего интеллекта компьютеров» от интерпретации языков высокого уровня до создания «мозгоподобных архитектур». Свой интерес к познанию тайн человеческого мышления В.М. Глушков выразил в попытке анализа деятельности математика при доказательстве теорем. Программа работ по Алгоритму Очевидности (АО) выполнялась его учениками в течение многих лет и продолжается в настоящее время.

Данная статья посвящена обзору результатов работ в рамках этой программы на фоне общих подходов к проблеме искусственного интеллекта по В.М. Глушкову.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ ПО ГЛУШКОВУ

Свою деятельность в компьютерной науке В.М. Глушков начал в 1956 г. Тогда же сформировалась Дортмундская группа (МакКарти, Минский, Ньюел и Саймон), ставшая «законодателем мод» в искусственном интеллекте на Западе. Путь, который выбрал Виктор Михайлович, отличался от западного. Свои взгляды на новую для Советского Союза науку, имевшую в то время название «Вычислительная математика и техника», В.М. Глушков изложил в статье [1], где были определены ближайшие и дальние цели в компьютерной науке и заложена основа будущих исследований в Украине. В ней впервые появилась идея сопоставления компьютера и человеческого мозга, впоследствии воплотившаяся в идею «мозгоподобных архитектур». По этому поводу В.М. Глушков писал: «Не подлежит сомнению, например, что в мозгу нет ничего похожего на арифметическое устройство последовательного, а тем более параллельного действия. Говоря не вполне точно, машина сводит логические операции к арифметическим, тогда как в мозгу это происходит как раз наоборот. Поэтому, намного превосходя человека в скорости выполнения арифметических операций, машина не имеет столь же значительного превосходства над ним в скорости выполнения операций логического характера. В свете всего сказанного становится ясным огромное практическое значение глубокого проникновения в закономерности работы мозга».

С тех пор идеи совершенствования структур вычислительных машин, повышения их «внутреннего интеллекта» и разработки алгоритмов решения интеллектуальных задач стали основой практически всех исследований, проводившихся под руководством В.М. Глушкова в созданном им институте. Сначала была организована небольшая лаборатория вычислительной техники, где в 1951 г.

С.А. Лебедев построил первую в СССР и континентальной Европе электронную вычислительную машину МЭСМ. Вскоре эту лабораторию преобразовали в Вычислительный Центр АН УССР, а затем и в Институт кибернетики, который за короткое время превратился в один из крупнейших центров компьютерной науки и ее приложений в СССР. Институт кибернетики всегда лидировал в этой области, играл заметную роль и в западной науке.

Являясь оппонентом докторской диссертации известного алгебраиста А.И. Ширшова, В.М. Глушков в 1958 г. впервые использовал ЭВМ, очень маломощные в то время, для проверки доказанных в работе тождеств. Это был первый шаг в компьютерной алгебре, впоследствии получивший свое развитие, в том числе, в компьютерах серии МИР. Другой пионерской работой в области искусственного интеллекта был опыт создания программ распознавания осмысленных предложений русского языка [2].

Как математика и алгебраиста В.М. Глушкова с самого начала интересовала проблема автоматизации труда математика по доказательству теорем и построению математических теорий. Исследования в этой области начались в 1962 г. и привели к работе над Алгоритмом Очевидности, которая имела насыщенный событиями историю.

Первым практическим шагом в развитии внутреннего интеллекта компьютеров было создание в 60-х годах вычислительных машин серии МИР [3]. К тому времени уже завершился первый этап развития теории автоматов как основы разработки электронных устройств [4], и работа над этим проектом должна была проверить возможности новой технологии. Интеллект компьютера определялся возможностью аппаратной интерпретации языка высокого уровня, который существенно отличался от имеющихся в то время языков программирования высокого уровня таких, как Алгол или ФОРТРАН. В арифметических выражениях можно было записывать интегральные и дифференциальные операторы в виде, принятом в математических текстах. Широко использовались рекурсивные функциональные определения. Целые числа могли иметь неограниченную разрядность, а вещественные — произвольные разрядности, определяемые текстом программы.

Следующим шагом в развитии внутреннего интеллекта компьютеров стали машины МИР-2 и МИР-3. Здесь в аппаратно-интерпретируемый входной язык были введены средства манипуляции с алгебраическими выражениями. Входной язык этих машин АНАЛИТИК [5] — один из первых языков компьютерной алгебры, хорошо известен на Западе и оказал заметное влияние на развитие символьных и алгебраических вычислений.

Машины МИР принадлежали классу малых вычислительных машин. Реализованные в них алгоритмы интерпретации были достаточно сложными, что обусловило необходимость решения ряда технических проблем для эффективной реализации этих алгоритмов. Одним из таких важных решений явилось изобретение многоступенчатой микропрограммной памяти, использование которой, а также экономного кодирования сложных операций позволило при решении задач из области символьных вычислений значительно превысить производительность больших компьютеров того времени.

Следующий шаг развития архитектур вычислительных машин В.М. Глушков видел в повышении производительности за счет массового параллелизма и отхода от лежащих в основе существующих компьютеров принципов фон Неймана. Их критическую оценку, а также новые принципы построения рекурсивных вычислительных машин В.М. Глушков с соавторами представили в докладе на конгрессе IFIP (International Federation for Information Processing) в 1974 г. [6]. Имея в виду в качестве дальнейшей цели создание мозгоподобных архитектур, в которых память сливается с обработкой данных, В.М. Глушков рассматривал и другие архитектуры [7] высокопроизводительных ЭВМ (см. также Глушков В.М. Кибернетика. Вычислительная техника. Информатика: изб. тр. — К.: Наук. думка, 1990. — Т. 2. — С. 59–70). Одна из таких архитектур — макроконвейерная ЭВМ, была реализована уже после его ухода из жизни в 80-х годах. Эта архитектура обеспечивает линейный рост производительности многопроцессорной системы с увеличением числа процессоров при решении сложных задач и лежит в основе большинства современных кластерных систем и технологий, в том числе, развивающихся в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова (ИКГ) в настоящее время.

За 30 лет, которые прошли после ухода В.М. Глушкова из жизни, в вычислительной технике сделаны гигантские шаги вперед. Сегодня персональные компьютеры с многоядерными процессорами превосходят в производительности суперкомпьютеры 80–90-х годов. Достигнуты существенные успехи в молекулярной биологии и нейронауке, в частности, в познании строения и функционирования мозга человека, ведутся исследования по реинжинирингу мозга, т.е. созданию его информационного эквивалента. Существенно продвинулись и разработки эффективных методов автоматизации доказательств теорем. Исследования в этой области стимулировались, в том числе, потребностями применения формальных методов в разработке промышленных систем.

СТАНОВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ РАБОТ ПО АЛГОРИТМУ ОЧЕВИДНОСТИ

Создание машинных средств поддержки интеллектуальной деятельности человека в математике В.М. Глушков инициировал еще в начале 60-х годов. В Институте кибернетики АН УССР в 1962 г. была сформирована первая группа исследователей, занимающихся автоматизацией доказательств теорем (АДТ)¹. И с этого момента можно говорить о появлении киевской школы автоматизации поиска доказательств. Далее перечислены основные этапы и дана краткая характеристика завершенных исследований киевской школы с 1962 г. и до настоящего времени. Отметим, что фактически все они относятся к программе работ по АО, которая была инициирована академиком В.М. Глушковым в статье «Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта» [13]. В ней затрагивались проблемы машинного языкового общения и логического мышления. Относительно моделирования логического мышления отмечалось, что «хорошей (если не лучшей) модельной задачей здесь может служить задача автоматизации доказательств теорем в математике».

К тому времени уже был накоплен большой опыт применения ЭВМ для решения различных интеллектуальных задач. Однако сопутствовавшие исследования велись, в основном, в направлении построения эффективных универсальных процедур, к чему ни существующие технические средства, ни имеющиеся математические методы еще не были готовы. Учитывая, что в ходе поиска доказательства человек активно использует свой опыт и интуицию, В.М. Глушков в [13] писал относительно проблемы автоматизации доказательств теорем: «Центр тяжести работы в этой области должен быть смещен от построения «универсальных» доказывающих программ в сторону создания систем программирования и операционных систем, позволяющих, в случае необходимости, быстро программировать поиск доказательства даже одной единственной трудной теоремы, и способных, если потребуется, работать в реальном масштабе времени с математиком, доказывающим эту теорему».

Поэтому в соответствии с [13] первым шагом должна была стать разработка практичного формального языка (как проблемно-ориентированного, так и машинно-ориентированного с соответствующим транслятором) для записи математических предложений и утверждений, а также их доказательств. Здесь под практичностью языка понимается то, что он «должен относиться к существующим формальным языкам математической логики, как, скажем, язык АЛГОЛ-60 относится к языку рекурсивных функций или нормальных алгоритмов». В связи с этим В.М. Глушков предложил наряду с предикатами, высказываниями и обычными кванторами использовать также ограниченные кванторы для того, чтобы в формальном языке можно было записывать эквиваленты выражений типа «для всех множеств», «существует элемент множества M такой, что...» и т.д. Предлагалось также определять так называемые конструкции, которые давали возмож-

¹ Первые серьезные публикации, в которых обсуждались возможности применения ЭВМ для автоматизации поиска доказательств теорем, относятся к рубежу 1950–1960 годов (см. например [8, 9]), когда появились ЭВМ такой производительности, объема памяти и информационной гибкости, что стало возможным программирование сложных интеллектуальных процессов. История развития этой области информатики на Западе и исследования, относящиеся к тому периоду, описаны в [10]. Отметим, что в 60-х годах в СССР и странах Восточной Европы появилось лишь две школы автоматизации поиска доказательств в широком смысле: киевская и ленинградская. Достижения последней описаны в [11, 12].

ность строить выражения вида «подмножество множества M », «группа» и присваивать им значения, получая выражения вида «пусть N — подмножество множества M », «пусть G — группа» и т.п.

Вторым шагом выполнения намеченной программы должно было стать построение так называемого алгоритма очевидности, причем, как писал В.М. Глушков, «в своем первоначальном виде алгоритм очевидности может быть ограничен простейшими функциями вывода (не обязательно естественного) в исчислении высказываний, дополненного перебором на небольшое число шагов дерева конструкций». Неотъемлемой составляющей алгоритма «должна быть чисто информационная часть, позволяющая осуществить поиск и вызов на специальное рабочее поле тех предложений из числа записанных предварительно в память машины, которые используются на данной попытке вывода». В дальнейшем алгоритм очевидности должен был поступательно развиваться и совершенствоваться.

После этого согласно планам В.М. Глушкова можно было приступить к непосредственному использованию алгоритма очевидности на практике: «На этом этапе в память машины записывается какой-либо фрагмент математики, например, основы теории групп с полным определением всех понятий и с полными доказательствами всех предложений. Доказательство при этом считается полным, если каждый его шаг может быть проверен по имеющейся машинной записи доказательства машинным алгоритмом очевидности за время, не превышающее (для каждого отдельного шага) некоторого фиксированного заранее порога». Для работы с накопленным материалом и его пополнения предлагалось разработать операционную систему, которая бы обеспечивала [13]:

- ввод в машину (различными пользователями) предложений рассматриваемой теории, записанных на построенном языке;

- проверку новизны введенного предложения (относительно накопленного в машине материала);

- анализ того, является ли это предложение очевидным (в смысле машинного алгоритма очевидности) следствием известных машине предложений;

- при необходимости принятие от пользователя (математика) последовательных шагов доказательства предложения и проверку очевидности каждого высказывания в доказательстве.

Развитие такой системы автоматизации доказательства математических теорем предполагало:

- пополнение библиотеки стандартных процедур логического вывода;

- разработку специальных языковых средств, а также системы трансляции или интерпретации, «которые давали бы возможность программировать поиск доказательства отдельных трудных теорем» с использованием для ограничения перебора указаний типа «применить прием, аналогичный приему в доказательстве теоремы такой-то», «упорядочить множество и использовать индукцию», «рассмотреть отдельно случаи...» и т.п.;

- разработку языка, на котором машина сообщает математику о трудностях, мешающих найти доказательство;

- разработку средств, позволяющих машине выдавать текст доказательства, пригодный для публикации;

- развитие информационной части системы, включая перестройку ее структуры («наличие нового результата может сделать очевидными (с точки зрения машины) некоторые теоремы или некоторые разделы доказательств других теорем, которые раньше требовали подробной расшифровки»).

Более далекие перспективы развития намеченной программы В.М. Глушков видел в следующем: «Непрерывное совершенствование алгоритма очевидности приведет рано или поздно к тому, что все теоремы, которые нам известны сегодня, станут очевидными с точки зрения машины. В этот период роль математика будет состоять преимущественно в определении новых понятий и в формулировке принципиально новых предложений, а искусство доказать новую машинно-неочевидную теорему будет состоять прежде всего в умении сформулировать ряд промежуточных теорем и лемм, каждая из которых будет очевидна для машины. Что же касается результатов чисто обобщающего характера, то, имея

объективный критерий для их отбора, можно задачу поиска их формулировок и доказательств поручить самой системе».

Исходя из этого видения В.М. Глушковым проблемы автоматизации поиска доказательств теорем, в настоящей статье приведены основные результаты, полученные всеми исследователями, принимавшими участие в осуществлении программы АО на всех описанных далее этапах ее реализации. Особое внимание уделено следующим основным положениям АО:

- 1) создание формального естественного языка, максимально приближенного к языку естественных математических публикаций;
- 2) разработка «очевидностных», эволюционно развивающихся машинных шагов и методов доказательства;
- 3) построение информационной среды, предназначенной для хранения, накопления и извлечения необходимых/полученных фактов².

При этом особое внимание уделено рассмотрению прикладных аспектов реализации АО.

Этап с 1962 по 1970 гг. Академик В.М. Глушков в 1962 г. инициировал в Институте кибернетики АН УССР (ИК) проведение исследований по автоматизации поиска доказательств теорем в математике [15], а именно в теории групп, концентрируя внимание на основных положениях АО, описанных в пп. 1 и 2³. К исследованиям в 1962 г. были привлечены А.А. Летичевский, один из его первых учеников, и Ф.В. Ануфриев, а также в 1963 г. В.В. Федюрко (последние поступили на работу в ИК после окончания аспирантуры в Институте математики под руководством профессора Л.А. Калужнина). В 1963 г. на стажировку по кибернетике и математике в ИК были направлены аспиранты Львовского государственного университета имени Ивана Франко З.М. Асельдеров и И.И. Дидух, которые также подключились к проведению исследований по АДТ.

Прежде всего работа велась согласно п. 2 основных положений АО следующим образом. Тщательно анализировались тексты по теории групп, в результате чего была построена (неполная) машинная процедура поиска доказательств в теории групп, основанная на некоторых эвристических соображениях [18]. Соответствующий доклад «Машинные методы поиска доказательства теорем в теории групп» З.М. Асельдера и А.А. Летичевского представлялся на Первом всесоюзном симпозиуме по проблеме машинного поиска логического вывода (Тракай, Литва) в 1964 г. [11, 19].

Позднее эта процедура была обобщена Ф.В. Ануфриевым [20, 21] для случая узкого исчисления предикатов первого порядка без равенства. Она допускала трактовку в виде специального, корректного и полного, секвенциального исчисления, впоследствии названного А.И. Малашонком (присоединившимся к первой группе исследователей в 1969 г.) исчислением ПВЦ (поиск вспомогательной цели) [22]. Отличительными особенностями первоначального ПВЦ были:

- целеориентированность (т.е. в каждый момент времени сукцедент любой рассматриваемой секвенции содержал в точности одну формулу-цель);
- специальная обработка кванторов, которая являлась, в сущности, независимым повторением идеи Кангера [23] об использовании в кванторных правилах так называемых «фиктивных переменных» (dummies) и «параметров» (parameters) в качестве специальных переменных с последующим замещением в определенный момент «фиктивных переменных» «допустимыми терминами».

Поскольку работа с равенством является неотъемлемой частью автоматизации обработки реальных математических текстов, а первоначальный вариант ПВЦ был построен исходя из анализа доказательств в теории групп, З.М. Асельдеров исследовал машинно-ориентированные приемы решения определенных классов уравнений в свободных группах [24].

² Хронология всех исследований по АО приведена в [14]. В настоящей статье основное внимание уделено развитию и реализации программы АО в период с 1962 по 1992 гг., являющийся наиболее важным для становления и развития исследований в рамках АО, но недостаточно описанным в литературе.

³ Здесь следует отметить работу Л.А. Калужнина [16], в которой также затронут вопрос построения формального естественного языка, и [17], где рассмотрено создание математических вычислительных машин.

Начальный этап теоретических исследований киевской школы завершился попыткой В.Ф. Костырко создать язык с более богатой сигнатурой, чем классический язык первого порядка, что фактически привело к добавлению в сигнатуру нового символа ε для обозначения предиката «есть» и возможности записи таких теоретико-множественных предложений, как « x есть элемент M », « N есть подмножество M » и т.д. [25]. Этот подход в принципе позволяет задать аксиоматическую теорию множеств, например, теорию Цермело–Френкеля, и на этом базисе попытаться дать формальное описание самых различных разделов математики, являющееся как источником необходимых данных при доказательстве новых утверждений, так и базой для корректной формулировки тех утверждений, в автоматизации поиска доказательства которых заинтересован человек. К сожалению, предложенная модификация языка первого порядка требовала большой рутинной работы по формализации естественных математических текстов и занимала бы столько внимания и времени, что ею трудно было бы воспользоваться не только человеку, сведущему в математике, но и специалисту в логике. Это обусловило начало нового этапа исследований в ИК по естественному формальному языку.

Этап с 1971 по 1976 гг. Как уже упоминалось, в 1970 г. была опубликована программа АО [13] и исследования по автоматизации поиска доказательств вышли на новый уровень.

Для реализации АО в начале 1971 г. В.М. Глушков предложил своему ученику В.Г. Боднарчуку возглавить исследования по АДТ и создать новую (вторую) группу исследователей. В нее вошли К.П. Вершинин и А.И. Дегтярев (выпускники 1970 г. кафедры математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова), а также Н.П. Малеваный и А.В. Лялецкий (выпускники 1970 г. первой группы теоретической кибернетики факультета кибернетики Киевского государственного университета им. Т.Г. Шевченко (КГУ)). Сначала их усилия сконцентрировались на теоретических исследованиях, относящихся главным образом к пп. 1 и 2 основных положений АО.

Основные принципы практического языка для записи математических теорий были представлены в [26]. В дальнейшем для реализации п. 1 К.П. Вершинин разработал русскоязычную версию естественного формального языка TL (Theory Language) [27], который давал возможность пользователю записывать на русском языке математические тексты в привычном для человека виде и в логически корректной форме. Более того, TL имел теоретико-множественную семантику и допускал преобразование TL-текстов в формулы языка первого порядка, что было его важным свойством, поскольку появлялась возможность применения систем автоматического поиска доказательств (пруверов) для установления выводимости в логиках первого порядка [28].

В становлении и развитии идей языка TL большую роль сыграли эксперименты по записи реальных математических текстов, которые проводились профессиональными математиками в Ужгородском университете под руководством профессора П.М. Гудивока. В языке TL записывались тексты по теории представлений групп.

Что касается реализации п. 2, то были проведены исследования как по развитию резолюционного подхода, так и специального машинно-ориентированного секвенциального формализма.

В области резолюционных методов А.И. Дегтярев тщательно изучил алгоритм унификации и разработал новые стратегии для системы поиска вывода «резолюция + парамодуляция», позднее была сформулирована теорема о полноте этой системы [29].

Для секвенциальных методов А.В. Лялецкий предложил подход к построению эффективных методов поиска логического вывода в теориях первого порядка (т.е. без предварительной сколемизации), что обусловило возможность организации гибкого управления человеком процесса машинного поиска доказательства и лучшего его понимания. Он ввел оригинальное понятие допустимой подстановки, отличающееся от генценовского и кангеровского аналогов и позволяющее определять, можно ли выбрать приводящий к успеху порядок применения кванторных правил, опираясь лишь на кванторную структуру секвенций из рассматриваемого дерева вывода и на выбранную подстановку термов вместо определенных переменных из дерева [30].

На ЕС ЭВМ проводились эксперименты для выявления базовых программных единиц языка программирования PL/1, которые можно применять для создания эффективного инструментария систем автоматизации поиска доказательств, использованного для реализации на следующем этапе. Эту работу начал Н.П. Малеваный и продолжил А.П. Жежерун, появившийся в группе исследователей во второй половине 1973 г. после окончания факультета кибернетики КГУ. Последний, кроме этого, занялся вопросами унификации в логиках высших порядков.

Отметим, что в этот период произошла реорганизация групп, вызванная тем, что во второй половине 1972 г. В.Г. Боднарчук серьезно заболел и больше не мог вернуться к научной деятельности. Две существующие группы исследователей объединились. Руководила новой группой Ю.В. Капитонова. К 1975 г. представители первой группы киевской школы автоматизации поиска доказательств Ф.В. Ануфриев, З.М. Асельдеров, В.Ф. Костырко и А.И. Малашонок по разным причинам отошли от проведения исследований по АО. Поэтому основные результаты киевской школы автоматизации доказательств после 1971 г., как в теории, так и на практике получили представители второй группы, к которым присоединились в 1977 г. В.В. Атаян, окончившая механико-математический факультет КГУ, и в 1978 г. аспирантка ИК М.К. Мороховец (руководитель Ю.В. Капитонова).

Этап с 1977 по 1982 гг. Практические работы по созданию на базе полученных теоретических результатов системы автоматизации поиска доказательств, предназначенной для обработки математических текстов, записанных на языке TL (TL-текстов), начались в 1977 г. Основной задачей этой системы был поиск доказательства утверждения, выделенного в целостном математическом TL-тексте (содержащем, кроме доказываемого утверждения, определения и утверждения, которые могут понадобиться при поиске доказательства). Система включала средства предварительной обработки TL-текстов, построения среды доказательства, поиска доказательств теорем и общения с пользователем. Для программирования этих основных функциональных составляющих системы использовался базовый программный инструментарий, реализованный А.П. Жежеруном [31]. (Далее после описания работ в скобках даны фамилии разработчиков программ.)

Средства предварительной обработки TL-текстов обеспечивали:

— анализ структуры входного текста и выделение его существенных частей (разделов), определение зависимостей между ними и построение частично упорядоченного множества разделов (В.В. Атаян, К.П. Вершинин и А.П. Жежерун) [32];

— синтаксический анализ предложений входного TL-текста и преобразование его предложений в древовидные выражения специального вида, т.е. в так называемое внутреннее представление (К.П. Вершинин, А.П. Жежерун);

— преобразование этих древовидных выражений в разновидности формул первого порядка (К.П. Вершинин).

Средства построения среды доказательства выбирали фрагменты в тексте, структурированном и преобразованном во внутреннее представление, которые были необходимы для поиска доказательства заданного утверждения и построения среды для секвенциальной процедуры поиска вывода позже описаны в [33]. Фактически по доказываемому утверждению строилась одноцелевая секвенция, выводимость которой требовалось установить в динамически меняющейся среде и которая в своем антецеденте должна была содержать необходимые предположения, определения и вспомогательные утверждения (А.И. Дегтярев, А.В. Лялецкий).

Средства поиска доказательств теорем включали:

— процедуру поиска логического вывода секвенциального типа без (обязательной) сколемизации (А.И. Дегтярев, А.В. Лялецкий);

— специальную технику применения определений и средства обращения с равенством (А.И. Дегтярев);

— правила построения вспомогательных целей и утверждений, а также модуль проверки подстановок на допустимость (А.В. Лялецкий).

Простой дружественный интерфейс давал возможность управлять обходом пространства поиска вывода (А.В. Лялецкий).

Систему впервые представили в ноябре 1978 г. в Киеве на Всесоюзном симпозиуме «Искусственный интеллект и автоматизация исследований в математике».

Для расширения дедуктивных возможностей системы было решено пополнить ее процедурами поиска вывода резолюционного типа. В 1979 г. М.К. Мороховец завершила начатую ею в 1977 г. реализацию комплекса программ автоматизированного поиска доказательств теорем с использованием резолюционных процедур [34]. Комплекс включал библиотеку базовых программ, подпрограмму поглощения, два основных модуля и программы, реализующие известные резолюционные стратегии: бинарной, входной, единичной резолюции, положительной и отрицательной гиперрезолюций (каждая строилась путем настройки одного из основных модулей).

В 1980 г. созданная система получила название «Система автоматизации доказательств» (САД), которое впервые появилось в работе В.М. Глушкова [35].

В 1981 г. языковые средства САД дополнились программой редактирования резолюционных выводов [36], которая по дереву вывода, полученному процедурой отрицательной гиперрезолюции, строила доказательство утверждения в виде ТЛ-текста (М.К. Мороховец). Теоретические основы преобразования дерева вывода в текст доказательства на языке ТЛ разработал К.П. Вершинин [37].

Развивались и другие составляющие САД. Так, для порождения утверждений, достаточных для доказательства рассматриваемого утверждения, и получения следствий из данного множества посылок А.В. Лялецкий разработал модификацию секвенциальных логических средств системы [38]. А.И. Дегтярев изучил и реализовал средства особого обращения с равенством и в результате разработал класс модификаций парамодуляции, среди которых наиболее интересной является стратегия монотонной парамодуляции [39]. (Отметим, что стратегия такого типа была независимо разработана на Западе в более общем виде в 1992 г. и названа базовой стратегией.)

В.В. Атаян реализовала процедуру поиска доказательств теорем с помощью применения вспомогательных утверждений (лемм) [40]. В процедуре воплотились естественные дедуктивные приемы обработки утверждений целостного математического текста, основанные на использовании «ситуации» — специальной графоподобной структуры, введенной К.П. Вершининым в [41], и позволяющие вывести следствия утверждений из заданного математического ТЛ-текста и проверять выводимость данного утверждения, являющегося частью некоторого целостного математического текста, из других утверждений этого текста [42].

Работая в направлении сочетания преимуществ резолюционных процедур с естественными приемами рассуждений, используемыми математиками, К.П. Вершинин предложил стратегию отрицательной гиперрезолюции с применением определений, а М.К. Мороховец реализовала ее [43].

Важное значение для развития и усовершенствования дедуктивных средств САД имели эксперименты с системой. Так, анализ результатов поиска доказательств различных теорем с использованием процедур резолюционного типа показал, что различные посылки по-разному влияют на рост пространства поиска вывода, в частности, на количество избыточных порожденных резольвент. Были выявлены некоторые причины порождения избыточных резольвент, что позволило предложить новые резолюционные стратегии. К.П. Вершинин и М.К. Мороховец разработали и исследовали ряд стратегий поиска вывода утверждений с ограниченными кванторами [44], одну из которых реализовала М.К. Мороховец. Она также предложила и реализовала стратегии отрицательной гиперрезолюции: основанную на «семантической» унификации, учитывающей связи между математическими понятиями, и со встроенной аксиомой транзитивности отношения [45, 46]. Обе эти процедуры использовали преимущества поиска доказательств теорем в среде целостного ТЛ-текста.

Одно из направлений развития САД — совместное использование дедуктивных средств системы, которые первоначально разрабатывались отдельно одно от другого. На этом пути М.К. Мороховец реализовала процедуру порождения следствий — модификацию положительной гиперрезолюции, использующей для работы с равенством правило парамодуляции, реализованное А.И. Дегтяревым.

Резолюционные процедуры, упомянутые выше, успешно применялись для доказательства следующих теорем: «если M есть подмножество всякого множества, то M пусто»; «подмножество A метрического пространства E открыто в E тогда и только тогда, когда A является окрестностью каждой точки A »; о средней линии треугольника; о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

Подготовка экспериментов в системе САД включала следующие шаги. Прежде всего формировался математический текст, который должен был содержать доказываемую теорему, определения понятий, использующиеся в ней, а также утверждения и леммы, которые могли бы пригодиться при поиске ее доказательства (т.е. текст должен был быть целостным). Далее текст записывался на языке TL и преобразовался во внутреннее представление с помощью языковых средств САД. Если исходный TL-текст содержал новые понятия, не определенные грамматикой языка TL, то для выполнения такого преобразования требовалось расширить грамматику, для чего в САД имелись соответствующие средства.

Этап с 1983 по 1992 гг. Работы в рамках АО после 1982 г. велись в нескольких направлениях. А.И. Дегтярев продолжил исследование процедур обработки равенств [47]. С ним работали молодые исследователи Т.А. Шевелюк, которая занималась системами переписывания термов применительно к автоматическому доказательству теорем [48], и А.А. Васильченко, предложивший конструктивную версию АО для автоматизированного проектирования программ [49].

М.К. Мороховец продолжила изучение возможности «встраивания» в резолюционные процедуры естественных приемов доказательств теорем, применяемых математиками. Она предложила модификацию стратегии поиска вывода утверждений с ограниченными кванторами, предназначенную для доказательства теорем в много-сортных теориях [50], и обобщенную унификацию [51], являющуюся результатом развития предложенной в [45] идеи использования информации о связи между математическими понятиями при поиске вывода с помощью резолюционной процедуры. В.В. Атаян развивала алгебраический подход к формализации дедуктивных техник.

М.К. Мороховец и В.В. Атаян продолжали работы по развитию САД в соответствии с пп. 2 и 3 основных положений АО до конца 1992 г. К этому времени на основании опыта, полученного в процессе экспериментальной эксплуатации САД, была разработана и реализована в рамках САД новая подсистема поиска доказательства теорем [52]. Она строилась путем комбинирования ранее разработанных гиперрезолюционной процедуры поиска вывода с применением определенных [43, 53] и процедуры поиска доказательств теорем с помощью применения лемм [54] и опиралась на языковые средства САД. С помощью первой процедуры осуществлялся поиск опровержения заданного утверждения, а с помощью второй — поиск лемм, применимых в имеющейся среде доказательства (т.е. теорем, заключения которых следовали из посылок, содержащихся в текущей среде доказательства). С помощью найденной применимой леммы можно было пополнять среду доказательства, включая в нее заключение этой леммы. Такое динамическое изменение среды доказательства позволяло существенно уменьшить количество избыточных резольвент, порождаемых гиперрезолюционной процедурой.

Наиболее интересный эксперимент, проведенный с новой подсистемой, состоял в поиске доказательства теоремы «замкнутое подмножество компактного множества компактно». Статистика, собранная в ходе обработки этого утверждения, показала, что количество порожденных избыточных резольвент мало, память ЭВМ использовалась эффективно, пространство поиска доказательства обозримо, процессом поиска вывода можно управлять.

Развитие системы САД и эксперименты с ней были остановлены в 1992 г., когда ЭВМ серии ЕС вывели из эксплуатации.

Отметим, что опыт, накопленный в процессе разработки и реализации САД, использовался при проектировании и на предварительном этапе реализации системы синтеза конечных автоматов по их логическим спецификациям, названной ProCoD (Provably Correct Design). Эта система была реализована на языке Паскаль и функционировала на машинах серии IBM PC. В 1993 г. она демонстрировалась на IV Международной конференции по логическому программированию и автоматизации рассуждений (LPAR'93) [55]. Первые эксперименты по проверке непротиворечивости спецификаций автоматов проводились на основе системы САД: логическая спецификация автомата записывалась в виде TL-текста, выполнялось преобразование этого текста в множество дизъюнктов, а затем осуществлялась проверка непротиворечивости этого множества с помощью резолюционной процедуры.

Этап с 1998 г. по настоящее время. Исследования по программе АО возобновились в 1998 г., когда разработчики русскоязычной системы САД А.И. Дегтярев,

А.В. Лялецкий, М.К. Мороховец и К.П. Вершинин, а также А.Ю. Паскевич, студент факультета кибернетики КНУ, подключились к выполнению INTAS-проекта «Rewriting techniques and efficient theorem proving» (1998–2000 гг.).⁴ Отметим, что к этому времени значительная часть всех исследований по автоматизации поиска доказательств в стиле АО переместились из ИКТ на факультет кибернетики КНУ. Было решено разработать и реализовать на персональных компьютерах англоязычную модификацию системы САД на новом уровне понимания проблем автоматизации рассуждений с учетом современных достижений в области информационных технологий.

В ходе выполнения INTAS-проекта для реализации п. 1 основных положений АО разработан англоязычный вариант языка TL, названный ForTheL (Formal Theory Language) [56]. Что касается п. 2, то была существенно улучшена процедура ПВЦ в виде специального секвенциального исчисления [57] согласно следующим требованиям к дедукции в стиле АО: сохранение синтаксической формы исходной задачи; целеориентированность поиска вывода; эффективное проведение дедуктивных преобразований в сигнатуре исходной теории (т.е. предварительная сколемизация необязательна); отделение от дедуктивного процесса обработки равенств и/или решения уравнений.

Дальнейшие модификации исчисления из [57] предложены в [58], одна из которых легла в основу логического аппарата вновь проектируемой англоязычной системы SAD (System for Automated Deduction) с ForTheL в качестве входного языка.

Англоязычная версия SAD с онлайн-доступом к ней анонсировалась в 2002 г. в работе [59]. Эта версия, как и русскоязычная САД, имела в то время двухуровневую структуру и первоначально была ориентирована на установление доказуемости утверждения, погруженного в соответствующее ForTheL-«обрамление».

Отметим, что в рамках работ по англоязычной системе SAD развивалась и встраивалась в нее только секвенциальная техника поиска логического вывода, а многочисленные резолюционные методы и стратегии, существовавшие в русскоязычной системе САД, в ней вообще не реализовались. Это объясняется тем, что к тому времени уже существовало большое количество высокоэффективных, хорошо зарекомендовавших себя резолюционных пруверов таких, например, как SPASS, Vampire и Otter, которые можно было непосредственно использовать в SAD, что позже и сделали.

Другое отличие заключалось в том, что в то время, как русскоязычная система САД была полностью ориентирована на поиск доказательства теорем, ее англоязычный «аналог» SAD с самого начала проектировался с учетом возможности его применения в качестве верификатора доказательств, предоставляемых пользователем [60]. Поэтому язык ForTheL был расширен средствами для записи доказательств теорем.

Это расширение легло в основу перестройки имеющейся в то время системы SAD и математического верификатора ForTheL-текстов посредством добавления третьего уровня (уровня рассуждений), лежащего между языковым и дедуктивным. Он был введен для выполнения системой эвристических приемов доказательства, используемых человеком в повседневной практике [61].

В июле 2007 г. «обогащенную» трехуровневую версию системы SAD представили на 21-й конференции по автоматизированной дедукции CADE'21 (Бремен, Германия) [62].

В дальнейшем теоретические и практические исследования по системе SAD ориентировались, главным образом, на улучшение ее дедуктивных возможностей за счет разработки средств обращения с информационной средой, что можно рассматривать как развитие п. 3 основных положений АО. Проводились исследования по локальной истинности, результатом которых стало формальное понятие логической и онтологической корректностей ForTheL-текста [63]. Был построен и реализован алгоритм генерирования локальных атомарных лемм. Они позволяют доказать большое количество простых утверждений без применения прувера, например, во время проверки онтологической корректности.

⁴ Позже эти исследования были поддержаны еще двумя INTAS-проектами: «Weak arithmetics» (2001–2004 гг.) и «Practical formal verification using automated reasoning and model checking» (2006–2009 гг.).

Используя эту последнюю версию, удалось верифицировать доказательства ряда нетривиальных фактов из различных разделов математики: неравенство Коши–Буняковского–Шварца, лемма Ньюмана о конвергенции локально-конфлюэнтных и завершающихся систем терм-переписывающих правил, утверждение о нерациональности квадратного корня из простого числа, китайская теорема об остатках, тождество Безу для колец, теорема Тарского о неподвижной точке и т.д.

В настоящее время последняя ее версия выложена на сайте «nevidal.org» с онлайн-доступом к ней, позволяющим любому пользователю проводить один из следующих сеансов:

- установление выводимости формулы/секвенции в классической логике первого порядка;
- поиск доказательства теоремы, записанной на языке ForTheL, в окружении ForTheL-текста;
- верификация заданного ForTheL-текста.

Дальнейшие работы по реализации основных положений АО сопровождались теоретическим изучением возможностей построения секвенциальных методов поиска логического вывода в стиле АО для неклассических логик. Были получены результаты о корректности и полноте ряда классических и интуиционистских модальных секвенциальных исчислений, имеющих свойство подформульности [64]. На этой основе планируется осуществлять дальнейшее развитие системы SAD в соответствии с программой АО, ориентируясь на ее применение для решения прикладных задач, требующих проведения поиска вывода в неклассических логиках.

ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ОЧЕВИДНОСТИ

В языке АНАЛИТИК впервые был развит аппарат систем переписывающих правил как средство программирования высокого уровня. Этот аппарат реализован в компьютерах МИР-2 и МИР-3. Переписывающие правила в языке АНАЛИТИК поддерживали алгебру анализа и позволили на малой ЭВМ реализовать эффективные программы символьного интегрирования и широкого спектра преобразований символьных алгебраических выражений.

В конце 80-х начале 90-х годов в ИКГ была разработана система алгебраического программирования APS [65], которая развивала основы алгебраического программирования, заложенные в машинах серии МИР и языке АНАЛИТИК. Входной язык APLAN системы алгебраического программирования интегрирует четыре основные парадигмы программирования: императивное, функциональное, алгебраическое и логическое. Основу системы составляет алгебраическое программирование, т.е. программирование в системах переписывающих правил над произвольными алгебрами данных. Интеграция парадигм позволяет писать короткие выразительные программы для реализации сложных алгоритмов. Система алгебраического программирования используется для исследований в области компьютерной алгебры, параллельного программирования, верификации программ, на ее основе создаются прототипы прикладных систем для различных областей применения.

В середине 90-х годов была разработана модель взаимодействия агентов и сред [66], которая легла в основу новой технологии разработки программных систем — инсерционное программирование и моделирование [67, 68]. С помощью этой технологии создана промышленная система VRS верификации требований и спецификаций для фирмы Моторола. Одной из первых программ, написанных для этой системы, была версия интерактивного АО, разработанная в виде инсерционной программы. В основе этого алгоритма лежит некоторая модификация секвенциального исчисления, описанного в [33]. Для того чтобы применить метод инсерционного моделирования, исходное исчисление было сформулировано в виде двух исчислений: условных секвентов и вспомогательных целей. Эти исчисления представляются в виде двух взаимодействующих транзитивных систем, которые затем раскладываются в композицию среды и погруженных в нее агентов. В качестве агентов используются простые секвенты, а в качестве среды — структура данных, которая хранит информацию о сделанных предположениях. Функция погружения моделирует правила вывода, ее реализация выполняется в виде инсерционной машины [68].

Представление алгоритма поиска вывода в виде инсерционной машины позволяет легко ее трансформировать, настраивая на различные предметные области. Первоначально АО, дополненный специальными алгоритмами проверки выполнимости для линейной арифметики (алгоритмы Фурье–Моцкина для вещественной и Пресбургера для целочисленной арифметики), использовался для статической верификации требований. Последняя включает проверку непротиворечивости и полноты требований, а также индуктивную проверку условий целостности (безопасности).

В дальнейшем были построены программы проверки достижимости свойств с использованием символьного моделирования для языка базовых протоколов — основного средства описания требований в системе VRS. Для этих программ нужны были дедуктивные системы более высокой производительности, поэтому разрабатывалась специализация АО для ограниченного логического языка, которая удовлетворяет требованиям системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной замысел В.М. Глушкова в работах по АО состоял в том, чтобы создать электронного помощника математику в его работе по разработке и развитию абстрактных математических теорий. Идея не имела достаточного отклика в среде математиков. Большое распространение получили системы компьютерной алгебры — область, в которой В.М. Глушков также оставил заметный след. В последнее время появился новый интерес к автоматизации поиска доказательств теорем со стороны софтверной инженерии, обусловленный широким распространением формальных методов разработки программного обеспечения компьютеров. И здесь реально ожидать, что интеллектуальный электронный помощник, использующий идеи АО, будет создан в ближайшие годы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В.М. О некоторых задачах вычислительной техники и связанных с ними задачах математики // Укр. мат. журн. — 1957. — № 4. — С. 369–376.
2. Глушков В.М., Грищенко Н.М., Стогний А.А. Алгоритм распознавания осмысленных предложений // Принципы построения самообучающихся систем. — Киев, 1962. — С. 19–26.
3. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. — М.: Физматгиз, 1962. — 476 с.
4. <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%98%D0%A0>.
5. АНАЛИТИК (алгебраический язык для описания вычислительных процессов с использованием аналитических преобразований) / В.М. Глушков, В.Г. Боднарчук, Т.А. Гринченко и др. // Кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 102–134.
6. Глушков В.М., Игнатъев М.Б., Мясников В.А., Торгашев В.А. Рекурсивные машины и вычислительная техника. — Киев, 1974. — 26 с. (Препр. / АН УССР; 74-57).
7. Глушков В.М. Основные архитектурные принципы повышения производительности ЭВМ // Проблемы вычислительной техники — М.: МЦНТИ, 1981 — С. 6–21.
8. Gilmore P. C. A program for the production of proofs for theorems derivable within the first-order predicate calculus from axioms // Proc. Intern. Conf. Inform. Proces. — Paris: UNESCO House, 1959. — P. 265–273.
9. Hao Wang. Towards mechanical mathematics // IBM J. Res. and Develop. — 1960. — 4. — P. 2–22.
10. Handbook of automated reasoning: in 2 vol. / J.A. Robinson and A. Voronkov (Eds). — Cambridge: Elsevier and MIT Press, 2001. — 2122 p.
11. Lifschitz V. Mechanical theorem proving in the USSR: The Leningrad school. — Falls Church: Delphic Assoc., 1986. — 206 p.
12. Mints G. Proof theory in the USSR (1925-1970) // J. Symbolic Logic. — 1991. — 56, N 2. — P. 385–422.
13. Глушков В.М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 3–13.
14. Lyaletski A., Morokhovets M., Paskevich A. Kyiv school of automated theorem proving: a historical chronicle // Logic in Central and Eastern Europe: History, Science and Discourse. — Lanham (Md): Univ. Press of America, 2012. — P. 431–469.
15. Глушков В.М. «Разумные» машины и умственная деятельность человека // Радянська школа. — 1962. — № 2. — С. 87–91.
16. Калужнин Л.А. Об информационном языке для математики // Прикладная лингвистика и машинный перевод. — К.: КГУ им. Т.Г. Шевченко, 1962. — С. 21–29.

17. Калужнін Л. А., Короліук В. С. Алгоритми і математичні машини. — К.: Рад. школа, 1964. — 283 с.
18. Об одном алгоритме поиска доказательств теорем в теории групп / Ф.В. Ануфриев, В.В. Федюрко, А.А. Летичевский и др. // Кибернетика. — 1966. — № 1. — С. 23–29.
19. Матулис В. А. Первый всесоюзный симпозиум по проблеме машинного поиска логического вывода // Успехи мат. наук. — 1964. — XIX, вып. 6(120). — С. 239–241.
20. Ануфриев Ф. В. Алгоритм поиска доказательств в теории множеств // Теория автоматов. — К.: ИК АН УССР, 1967. — Вып.4. — С. 3–24.
21. Ануфриев Ф. В. Алгоритм поиска доказательств теорем в логических исчислениях // Там же. — К.: ИК АН УССР, 1969. — Вып. 5. — С. 3–26.
22. Малашонок А. И. Непротиворечивость и полнота Алгоритма Очевидности // Автоматизация поиска доказательства теорем в математике. — К.: ИК АН УССР, 1974. — С. 75–95.
23. Kan ger S. Simplified proof method for elementary logic // Comp. Program. and Form. Syst. — 1963. — P. 87–93.
24. Асельдеров З. М. Решение уравнений в свободных группах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев: ИК АН УССР, 1968. — 12 с.
25. О языке для записи формальных теорий / В.М. Глушков, В.Ф. Костырко, А.А. Летичевский и др. // Теоретическая кибернетика. — К.: ИК АН УССР, 1970. — Вып. 3. — С. 4–31.
26. Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Вершинин К. П., Малеваный Н. П. К построению практического формального языка для записи математических теорий // Кибернетика. — 1972. — № 5. — С. 19–28.
27. О формальном языке для записи математических текстов / В.М. Глушков, К.П. Вершинин, Ю.В. Капитонова и др. // Автоматизация поиска доказательств теорем в математике. — К.: ИК АН УССР, 1974. — С. 3–36.
28. Вершинин К. П. О корректности математических текстов и ее проверке с помощью ЭВМ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев: ИК АН УССР, 1982. — 20с.
29. Дегтярев А. И. Методы и средства обращения с равенством в машинном доказательстве теорем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев: ИК АН УССР, 1982. — 24 с.
30. Лялецкий А. В. Методы машинного поиска доказательств в исчислении предикатов первого порядка: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев: ИК АН УССР, 1982. — 23 с.
31. Жежерун А. П. Средства обработки математических текстов при помощи ЭВМ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев: ИК АН УССР, 1980. — 20 с.
32. Атаян В. В., Вершинин К. П., Жежерун А. П. О структурной обработке математических текстов // Распознавание образов. — К.: ИК АН УССР, 1978. — С.43–54.
33. Дегтярев А. И., Лялецкий А. В. Логический вывод в системе автоматизации доказательств // Математические основы систем искусственного интеллекта. — К.: ИК АН УССР, 1981. — С. 3–11.
34. Мороховец М. К. К реализации процедур логического вывода в рамках системы обработки математических текстов // Автоматизация обработки математических текстов и вопросы создания роботов. — К.: ИК АН УССР, 1979. — С. 36–41.
35. Глушков В. М. Система автоматизации доказательств САД (сокращенное неформальное изложение) // Автоматизация обработки математических текстов. — К.: ИК АН УССР, 1980. — С. 3–30.
36. Мороховец М. К. О редактировании выводов // Автоматизация обработки математических текстов. — К.: ИК АН УССР, 1980. — С. 53–61.
37. Вершинин К. П. Поиск опровержения и «естественные» доказательства // Автоматизация обработки математических текстов и вопросы создания роботов. — К.: ИК АН УССР, 1979. — С. 12–27.
38. Лялецкий А. В. Генерирование достаточных утверждений в системе САД // Тез. докл. и сообщений Третьей Всесоюз. конф. «Применение методов математической логики». — Таллинн, 1983. — С. 65–66.
39. Дегтярев А. И. Стратегия монотонной параметризации // Тез. докл. и сообщений Пятой Всесоюз. конф. по мат. логике. — Новосибирск, 1979. — С. 39.
40. Атаян В. В. О некоторых средствах построения информационной среды в системе автоматизации доказательств // Математические основы систем искусственного интеллекта. — К.: ИК АН УССР, 1981. — С. 11–17.
41. Вершинин К. П. Применение вспомогательных утверждений в процессе поиска вывода // Семиотика и информатика. — 1979. — № 12. — С. 3–7.
42. Атаян В. В., Вершинин К. П. К формализации некоторых приемов поиска вывода // Автоматизация обработки математических текстов. — К.: ИК АН УССР, 1980. — С. 36–52.
43. Вершинин К. П., Мороховец М. К. Применение определений в процессе машинного доказательства // Математическое обеспечение систем логического вывода и дедуктивных построений. — К.: ИК АН УССР, 1983. — С. 32–41.
44. Вершинин К. П., Мороховец М. К. Стратегии поиска вывода утверждений с ограниченными кванторами // Кибернетика. — 1983. — №3. — С. 9–15.

45. Мороховец М. К. Модифицированная процедура унификации // Там же. — 1984. — № 1. — С. 96–99.
46. Мороховец М. К. Процедуры поиска вывода и транзитивные отношения // Там же. — 1985. — № 5. — С. 118–122.
47. Дегтярев А. И. Методы обращения с равенством для хорновских множеств // Методы алгоритмизации и реализации процессов решения интеллектуальных задач. — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1986. — С. 19–26.
48. Шевелюк Т. А. Системы преобразования термов в автоматическом доказательстве теорем // Методы алгоритмизации и реализации процессов решения интеллектуальных задач. — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1986. — С. 26–32.
49. Васильченко А. А. Конструктивная версия алгоритма очевидности для автоматизации проектирования программ // Дедуктивные построения в системах искусственного интеллекта и моделирование автономных роботов. — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1987. — С. 76–82.
50. Мороховец М. К. Многосортные логики и процедуры поиска вывода, учитывающие ограничения на кванторы // Средства интеллектуализации кибернетических систем. — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1989. — С. 19–27.
51. Мороховец М. К. Поиск логического вывода и обобщенная унификация // Тез. докл. Всесоюз. конф. по искусств. интеллекту. — Переславль-Залесский, 1988. — 1. — С. 453–457.
52. Атаян В. В., Мороховец М. К. Сочетание формальных процедур поиска логического вывода и естественных приемов поиска доказательств теорем в системе автоматизации доказательств // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 151–182.
53. Мороховец М. К. Специальные стратегии поиска доказательств теорем в математике и инструментальные средства их реализации: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. — Киев, 1986. — 14 с.
54. Атаян В. В. Комплекс программ для использования вспомогательной информации при поиске доказательств теорем // Анализ и обработка математических текстов. — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1984. — С. 52–60.
55. Chebotarev A.N., Morokhovets M.K. Consistency checking of automata functional specifications // Lect. Notes Artific. Intel. — 1993. — **698**. — P. 76–85.
56. Vershinin K., Paskevich A. ForTheL — the language of formal theories // J. Inform. Theories and Appl. — 2000. — 7, N 3. — P. 120–126.
57. Degtyarev A., Lyaletski A., Morokhovets M. Evidence algorithm and sequent logical inference search // Lect. Notes Comput. Sci. — 1999. — **1705**. — P. 44–61.
58. Lyaletski A., Paskevich A. Goal-driven inference search in classical propositional logic // Proc. of the Intern. Workshop STRATEGIES'2001. — Siena (Italy), June 2001. — P. 65–74.
59. Lyaletski A., Verchinine K., Degtyarev A., Paskevich A. System for automated deduction (SAD): Linguistic and deductive peculiarities // Adv. Soft Comput. — Heidelberg: Physica-Verlag, 2002. — P. 413–422.
60. Lyaletski A.V., Paskevich A., Verchinine K. SAD as a mathematical assistant — how should we go from here to there? // J. Applied Logic. — 2006. — 4, N 4. — P. 560–591.
61. Паскевич А. Ю. Засоби формалізації математичних знань та міркувань: теоретичні та практичні аспекти: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Київ, 2005. Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка. — 22 с.
62. Verchinine K., Lyaletski A., Paskevich A. System for Automated Deduction (SAD): a tool for proof verification // Lect. Notes Comput. Sci. — 2007. — **4603**. — P. 398–403.
63. Verchinine K., Lyaletski A. V., Paskevich A., Anisimov A. V. On correctness of mathematical texts from a logical and practical point of view // AISC/MKM/Calculamus. — 2008. — P. 583–598.
64. Lyaletski A. On some problems of efficient inference search in first-order cut-free modal sequent calculi // Proc. of the 10th Intern. Symp. on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Comput., Sept. 2008, Timisoara (Romania). IEEE Inc. — 2008. — P. 39–46.
65. Kapitonova J. V., Letichevsky A. A., Konozenko S. V. Computations in APS // Theoret. Comput. Sci. — 1993. — **119**. — P. 145–171.
66. Letichevsky A., Gilbert D. Model for interaction of agents and environments / D. Bert, C. Choppy, P. Moses (Eds) // Recent Trends in Algebraic Development Techniques; Lect. Notes Comput. Sci. — 1999. — **1827**. — P. 311–328.
67. Insertion modeling in distributed system design / A.A. Letichevsky, J.V. Kapitonova, V.P. Kotlyarov et al. // Проблеми програмування. — 2008. — № 4. — С. 13–38, 118.
68. Letichevsky A. Algebra of behavior transformations and its applications // Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra, NATO Science Series, II Mathematics, Physics and Chemistry. — 2005. — **207**. — P. 241–272.

Поступила 23.03.2013