УДК 518.9

Б.Т. САМАТОВ

О ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ. I

Ключевые слова: *задача группового преследования, интегральное ограничение, разрешающая функция, стратегия, гарантированное время преследования.*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дифференциальная игра в конечномерном евклидовом пространстве, описываемая системой уравнений

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \;\; z_i(0) = z_i^0, \tag{1}$$

где $z_i \in R^{n_i}, u_i \in R^{p_i}, v \in R^q$; $n_i \geq 1$, $p_i \geq 1$, $q \geq 1$, $i = \overline{1, m}$, — множество целых чисел от 1 до m; A_i, B_i, C_i — постоянные прямоугольные матрицы размерности $n_i \times n_i$, $n_i \times p_i$ и $n_i \times q$ соответственно; z_i^0 — начальное состояние i-го объекта; u_i — управляющий параметр i-го преследователя; v — управляющий параметр убегающего. Реализации параметров u_i, $i = \overline{1, m}$, и v по окончании игры должны быть измеримыми функциями из класса $L_p[0, T]$, $p > 1$, и удовлетворять соответственно ограничениям

$$\int_0^T |u_i(\tau)|^p \, d\tau \leq \rho_i, \;\; \rho_i > 0, \;\; i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$\int_0^T |v(\tau)|^p \, d\tau \leq \sigma, \;\; \sigma \geq 0, \tag{3}$$

где $T > 0$ (случай $T = +\infty$ не исключается). Такие управления в дальнейшем будем называть допустимыми, а их совокупности обозначать U_T^i, $i = \overline{1, m}$, и V_T соответственно.

Терминальное множество состоит из объединения множеств $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_m$, каждое из которых имеет вид $M_i = M_i^0 + M_i^0$, где M_i^0 — линейное подпространство из R^{n_i}, а M_i^1 — выпуклое компактное подмножество ортогонального дополнения L_i к подпространству M_i^0 в R^{n_i}.

Определение 1. В игре (1)–(3) набор отображений u_i: $[0, T] \times V_T \Rightarrow U_T^i$, $i = \overline{1, m}$, называется стратегией группы преследователей, если выполнены следующие условия:

1) допустимость: для каждого $v(\cdot) \in V_T$ выполнено включение $u_i(\cdot) = u_i(\cdot, v(\cdot)) \in U_T^i$; $i = \overline{1, m}$;

2) вольтерровость: если для любых $t \in [0, T]$, $v^1(\cdot), v^2(\cdot) \in V_T$ выполнено равенство $v^1(\tau) = v^2(\tau)$ почти для всех $\tau \in [0, t]$, то $u_i^1(\tau) = u_i^2(\tau)$ п.в. на $[0, t]$, где $u_i^1(\cdot) = u_i(\cdot, v^1(\cdot))$, $u_i^2(\cdot) = u_i(\cdot, v^2(\cdot))$.

Определение 2. В игре (1)–(3) из начального положения $z^0 = \{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0\}$ возможно завершение преследования за время $T = T(z^0)$, если хотя бы для одного значения i, $i = \overline{1, m}$, абсолютное непрерывное решение $z_i(t)$ задачи Коши

$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i(t, v(t)) - C_i v(t)$, $z_i(0) = z_i^0$, попадает на терминальное множество M_i за время, не превосходящее числа $T = T(z^0)$, т.е. $z_i(t^*) \in M_i$ при некотором $t^* \in [0, T]$. Число $T(z^0)$ называется гарантированным временем преследования.

Нахождение начальных положений, из которых возможно завершение преследования за конечное время, составляет одну из задач преследования. В настоящее время задача преследования достаточно изучена. В первую очередь следует указать работы [1–11], методы и результаты которых обобщены и углублены в [12–19] и др.

В последние годы стали интенсивно исследоваться дифференциальные игры при наличии интегральных и разнотипных ограничений на управления игроков [20–36] и др.

В настоящей работе изучается задача группового преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями и при этом, опираясь на формализацию Л.С. Понтрягина [1, 2], используется метод разрешающих функций А.А. Чикрия [8]. Отметим, что введенный выше класс стратегий для группы преследователей максимально широкий с точки зрения информированности. На самом деле в работе строится конкретная стратегия, использующая гораздо меньший объем текущей информации. А именно, отрезок времени $[0, T]$ состоит из активных и пассивных частей для преследователей. На каждом активном участке соответствующий преследователь применяет фактически стробоскопическую стратегию $u_i(t, v)$, в построении которой основную роль играет так называемая разрешающая функция, которая в пассивной части приравнивается к нулю. Для определения момента перехода от активного участка к пассивному преследователю необходима информация об управлении убегающего на промежутке времени $[0, t]$, т.е. о функции $v_t(\cdot) = \{ v(\tau) : 0 \le \tau \le t \}$ для каждого текущего значения времени t.

Настоящая часть работы состоит из пяти разделов. В разд. 2 предлагается общая схема преследования, где в зависимости от параметров системы (1) и от параметров ограничений (2), (3) задача разбивается на два существенно различных случая. В разд. 3 для каждого случая определяется разрешающая функция и исследуются ее свойства. С помощью этих функций в разд. 4 и 5 доказываются теоремы 1 и 2 о возможности завершения преследования. Отметим, что при доказательстве этих теорем используются идеи работ [8, 22–24, 34]. Во второй части работы предлагаемый способ решения задачи применяется к контрольному примеру Л.С. Понтрягина [1, 2] и задаче группового преследования при простом движении игроков для случая l-поимки.

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В дальнейшем по умолчанию индекс i пробегает значения от 1 до m. Кроме того, в формулировке задач участвует фиксированный параметр p, $p > 1$, который в обозначениях опускается.

Пусть π_i — оператор ортогонального проектирования из R^{n_i} на подпространство L_i. Рассмотрим линейные отображения $\pi_i e^{A_i t} B_i R^{p_i} \to L_i$, $\pi_i e^{A_i t} C_i R^q \to L_i$ при $t \ge 0$.

Предположение 1. Уравнение $\pi_i e^{A_i t} B_i F = \pi_i e^{A_i t} C_i$ имеет решение $F = F_i(t)$, являющееся непрерывной и неособой матрицей при всех t, $t \ge 0$.

С помощью матрицы $F_i(\cdot)$ построим функцию

$$\chi_i(t, s) = \sup_{v(\cdot) \in V_1[s, t]} \int_s^t |F_i(t-\tau) v(\tau)|^p \, d\tau, \quad 0 \le s \le t,$$

где $V_1[s, t] = \left\{ v(\cdot) : \int_s^t |v(\tau)|^p \, d\tau \le 1 \right\}$. Величину $\mu_i = \sup_{0 \le s \le t < \infty} \chi_i(t, s)$ назовем коэффициентом Никольского [23]. Легко убедиться, что $\mu_i > 0$, но случай $\mu_i = +\infty$ не исключается.

Предположение 2. Справедливо неравенство

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} + \frac{\rho_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{\rho_m}{\mu_m} > \sigma. \tag{4}$$

Если выполнено неравенство (4), то ясно, что все коэффициенты μ_i одновременно не могут равняться $+\infty$.

Возможны два случая:

а) $\rho_i / \mu_i \le \sigma$ для любого i;

б) $\rho_i / \mu_i > \sigma$ для некоторых i.

Для этих случаев задача преследования изучается по-разному. В случае а) величина σ разбивается следующим образом:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m, \tag{5}$$

где $\sigma_i = \frac{\sigma\rho_i}{\mu_i}\left(\frac{\rho_1}{\mu_1} + \frac{\rho_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{\rho_m}{\mu_m}\right)^{-1}$. Легко заметить, что $\rho_i > \sigma_i \mu_i$ для всех i.

В этом случае построение стратегии преследования приводится в разд. 4 (теорема 1). В случае б) для завершения преследования достаточно активного участия только тех преследователей, для которых $\rho_i \ge \sigma\mu_i$ (разд. 5, теорема 2).

3. ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

3.1. Разрешающая функция для случая а). Введем в рассмотрение многозначное отображение

$$U_i(t-\tau, v, \lambda) = (|F_i(t-\tau)v|^p + \lambda\delta_i)^{1/p} \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i S^{p_i} - \pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v, \tag{6}$$

где $0 \le \tau \le t$, $v \in R^q$, $\lambda \ge 0$, $\delta_i = \rho_i - \sigma_i \mu_i$, S^{p_i} — шар радиуса 1 с центром в нуле пространства R^{p_i}.

Лемма 1. Включение $0 \in U_i(t-\tau, v, \lambda)$ выполняется при всех i, t, τ, v, λ таких, что $0 \le \tau \le t, v \in R^q$ и $\lambda \ge 0$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение (6) при $\lambda = 0$. Тогда имеем

$$U_i(t-\tau, v, 0) = |F_i(t-\tau)v| \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i S^{p_i} - \pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v.$$

В силу предположения 1 получаем $\pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v = \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i F_i(t-\tau)v$. Отсюда находим, что

$$U_i(t-\tau, v, 0) = |F_i(t-\tau)v| \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i S^{p_i} - \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i F_i(t-\tau)v =$$

$$= \begin{cases} |F_i(t-\tau)v| \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i \left(S^{p_i} - \dfrac{F_i(t-\tau)v}{|F_i(t-\tau)v|} \right), & \text{если } F_i(t-\tau)v \ne 0, \\ \{0\}, & \text{если } F_i(t-\tau)v = 0. \end{cases}$$

Из $F_i(t-\tau)v \in R^{p_i}$ и $\dfrac{F_i(t-\tau)v}{|F_i(t-\tau)v|} \in S^{p_i}$ видно, что $0 \in U_i(t-\tau, v, 0)$ при всех $0 \le \tau \le t$ и $v \in R^q$.

Нетрудно проверить, что при $\delta_i > 0$ многозначное отображение (6) монотонно возрастает по параметру $\lambda \ge 0$, т.е. из $\lambda_1 > \lambda_2$ следует включение $U_i(t-\tau, v, \lambda_2) \subset$ $\subset U_i(t-\tau, v, \lambda_1)$. В результате получаем, что $0 \in U_i(t-\tau, v, 0) \subset U_i(t-\tau, v, \lambda)$ для всех $\lambda \ge 0$, $0 \le \tau \le t$ и $v \in R^q$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i \notin M_i^1$, где $z_i \in R^{n_i}$, $0 \le t_i \le t$, то функция

$$\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i) = \max\{\lambda \ge 0 : \lambda(M_i^1 - \pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i) \cap U_i(t-\tau, v, \lambda) \ne \varnothing\}, \quad (7)$$

определяемая как разрешающая для *i*-го преследователя, полунепрерывна сверху по переменным τ и v, где $t_i \le \tau \le t$ и $v \in R^q$.

Доказательство. Покажем корректность определения функции (7). Для этого многозначные отображения $\lambda(M_i^1 - \pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i)$ и $U_i(t-\tau, v, \lambda)$ будем рассматривать как отображения, зависящие лишь от λ, фиксируя остальные переменные. Для краткости введем обозначения $K_i(\lambda) = \lambda(M_i^1 - \pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i)$, $U_i(\lambda) = U_i(t-\tau, v, \lambda)$ и $Q_i(\lambda) = K_i(\lambda) \cap U_i(\lambda)$. Покажем, что область определения многозначного отображения $Q_i(\lambda)$, т.е. $\operatorname{dom} Q_i = \{\lambda : Q_i(\lambda) \ne \varnothing\}$, является непустым компактным множеством.

Вначале покажем ограниченность $\operatorname{dom} Q_i$. Для этого предположим противное, т.е. пусть существует такая последовательность $\lambda_n \in \operatorname{dom} Q_i$, что $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. В силу теоремы 1.1 из [7] получаем, что $Q_i(\lambda) \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\min_{|\psi|=1} (W_{U_i(\lambda)}(\psi) + W_{K_i(\lambda)}(-\psi)) \ge 0,$$

где $\psi \in L_i$. Следовательно, из свойств опорных функций [37] и конкретного вида многозначных отображений $K_i(\lambda)$ и $U_i(\lambda)$ имеем

$$(|F_i(t-\tau)v|^p + \lambda\delta_i)^{1/p} W_{\pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i S^{p_i}}(\psi) -$$
$$-(\pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v, \psi) + \lambda W_{-\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i + M_i^1}(-\psi) \ge 0 \quad (8)$$

для всех $\psi, |\psi| = 1$. Согласно лемме 1 при всех ψ, $|\psi| = 1$, выполняется неравенство

$$(|F_i(t-\tau)v|^p + \lambda\delta_i)^{1/p} W_{\pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i S^{p_i}}(\psi) - (\pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v, \psi) \ge 0.$$

Поэтому если $W_{-\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i + M_i^1}(-\psi) \ge 0$, то неравенство (8) выполняется для всех $\lambda \ge 0$. Остается рассмотреть случай, когда $W_{-\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i + M_i^1}(-\psi) < 0$. Из того, что $\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i \notin M_i^1$ и M_i^1 — выпуклое компактное множество, получаем, что множество

$$\Gamma_i = \{\psi \in L_i : |\psi| = 1,\ W_{-\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i + M_i^1}(-\psi) < 0\}$$

непустое. Тогда существует такое ψ из Γ_i, для которого неравенство (8), начиная с некоторого $\lambda > 0$, не выполняется, что и противоречит предположению. Следовательно, множество $\operatorname{dom} Q_i$ ограниченное.

Остается показать замкнутость $\operatorname{dom} Q_i$. Поскольку многозначные отображения $U_i(\lambda)$ и $K_i(\lambda)$ для всех $\lambda \ge 0$ компактнозначны и непрерывны, то их опорные функции $W_{U_i(\lambda)}(\psi)$ и $W_{K_i(\lambda)}(-\psi)$ также непрерывны для всех $\lambda \ge 0$ и $\psi \in \Gamma_i$ [37]. В силу этого получаем, что и функция $\gamma_i(\lambda) = \min_{|\psi|=1} [W_{U_i(\lambda)}(\psi) + W_{K_i(\lambda)}(-\psi)]$ непрерывна по λ, $\lambda \ge 0$. Отсюда и следует замкнутость $\operatorname{dom} Q_i = \{\lambda : \gamma_i(\lambda) \ge 0\}$, что завершает доказательство компактности последнего.

Если $\operatorname{dom} Q_i$ — компактное множество из $[0, +\infty)$, то существует его наибольший элемент, который примем за функцию $\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$ и покажем полунепрерывность сверху этой функции по переменным τ и v, где $t_i \le \tau \le t, v \in R^q$.

Известно (см. [8, 17]), что если некоторая функция $g(x, y)$ непрерывна на произведении компактов X, Y — подмножеств некоторых конечномерных евклидовых пространств, то непустое многозначное отображение $N(x) = \{y \in Y : g(x, y) \ge 0\}$ для всех $x \in X$ полунепрерывно сверху на X.

Следовательно, из непрерывности функции

$$\gamma_i(\lambda, t-t_i, t-\tau, v, z_i) = \min_{|\psi|=1} [W_{U_i(t-\tau, v, \lambda)}(\psi) + W_{\lambda(M_i^1 - \pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i)}(-\psi)]$$

по переменным λ, τ и v, где $\lambda \ge 0$, $t_i \le \tau \le t$, $v \in R^q$, находим, что многозначное отображение

$$Q_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i) = \text{dom } Q_i = \{\lambda : \gamma_i(\lambda, t-t_i, t-\tau, v, z_i) \ge 0\}$$

полунепрерывно сверху по переменным τ и v. Отсюда и из того, что $Q_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$ — компактнозначное отображение, легко получить, что и функция $\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i) = \max Q_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$ полунепрерывна сверху по τ и v, где $t_i \le \tau \le t$ и $v \in R^q$.

Лемма доказана.

3.2. Разрешающая функция для случая б). Пусть $\rho_i > \mu_i \sigma$ при $i = \overline{1, k_1}$, $\rho_i = \mu_i \sigma$ при $i = \overline{1 + k_1, k_2}$ и $\rho_i < \mu_i \sigma$ при $i = \overline{k_2 + 1, m}$. В этом случае, как сказано в разд. 2, для решения задачи преследования достаточно участия в игре преследователей с индексами от 1 до k_2.

Как и в случае а), здесь вводится многозначное отображение вида (6), но с изменением в том месте, где константа $\delta_i = \rho_i - \mu_i \sigma$ при $i = \overline{1, k_1}$ и $\delta_i = 0$ при $i = \overline{k_1 + 1, k_2}$.

Легко убедиться, что лемма 1 справедлива и для этого случая. Поэтому аналогично лемме 2 можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. Если $\pi_i e^{tA_i} z_i^0 \notin M_i^1$, где $z_i^0 \in R^{n_i}, t \ge 0$, то функция

$$\lambda_i(t, t-\tau, v, z_i^0) = \max \{\lambda \ge 0 : \lambda(M_i^1 - \pi_i e^{tA_i} z_i^0) \cap U_i(t-\tau, v, \lambda) \ne \varnothing\},$$

определяемая как разрешающая для i-го преследователя, где $i = \overline{1, k_2}$, полунепрерывна сверху по переменным τ и v, когда $0 \le \tau \le t, v \in R^q$.

Для $i = \overline{1 + k_2, m}$ полагаем, что $\lambda_i(t, t-\tau, v, z_i^0) \equiv 0$.

4. ТЕОРЕМА О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ а)

Пусть выполнены предположения 1 и 2. Для случая а) величина σ представлена в виде (5) и для каждого i-го преследователя построена соответствующая разрешающая функция $\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$, полунепрерывная сверху по τ и v. Теперь с помощью этой разрешающей функции вводится функция

$$\Lambda_i(t, t_i, z_i) = 1 - \inf_{v(\cdot) \in v_{\sigma_i}[t_i, t]} \int_{t_i}^{t} \lambda_i(t-t_i, t-\tau, v(\tau), z_i) d\tau, \quad 0 \le t_i \le t,$$

где $V_{\sigma_i}[t_i, t] = \left\{ v(\cdot) : \int_{t_i}^{t} |v(\tau)|^p d\tau \le \sigma_i \right\}$, t_i — некоторый фиксированный момент времени, $z_i \in R^{n_i}$. Пусть $T_i = T_i(t_i, z_i)$ — первый положительный корень уравнения $\Lambda_i(t, t_i, z_i) = 0$ относительно t. Если такого корня не существует, то полагаем $T_i = \infty$.

Предположение 3 (относительно случая а)). Для каждого i существует такое непрерывное отображение $T_i^* : [0, +\infty) \times R^{n_i} \to R^1$, что $T_i(t_i, z_i) \le T_i^*(t_i, z_i)$ и $T_i^*(t_i, z_i) < \infty$.

Теорема 1. Если выполнены предположения 1, 2 и 3 для начального положения z^0, то в игре (1) с ограничениями (2), (3) при случае а) возможно завершение преследования за некоторое конечное время $T = T(z^0)$.

Доказательство теоремы 1 представим четырьмя шагами.

4.1. Конструкция стратегии. Для фиксированных t_i и z_i введем в рассмотрение множество

$$M_i^1(T_i-\tau,\upsilon)=\{m_i^1\in M_i^1:\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)(m_i^1-\pi_i e^{(T_i-t_i)A_i}z_i)\in$$
$$\in(|F_i(T_i-\tau)\upsilon|^p+\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)\delta_i)^{1/p}\pi_i e^{(T_i-\tau)}B_iS^{p_i}-\pi_i e^{(T_i-\tau)A_i}C_i\upsilon\},$$

где $t_i\le\tau\le T_i$, $T_i=T_i(z_i,t_i)$ и $i=\overline{1,m}$. Из того, что функция $\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)$ полунепрерывна сверху по (τ,υ), следует полунепрерывность сверху по (τ,υ) многозначных отображений

$$\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)(M_i^1-\pi_i e^{(T_i-t_i)A_i}z_i),$$
$$(|F_i(T_i-\tau)\upsilon|^p+\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)\delta_i)^{1/p}\pi_i e^{(T_i-\tau)}B_iS^{p_i}-\pi_i e^{(T_i-\tau)A_i}C_i\upsilon.$$

В силу леммы 1.7.5 из [38] пересечение этих множеств $M_i^1(T_i-\tau,\upsilon)$ измеримо по Борелю от (τ,υ). Следовательно, существует однозначная измеримая по Борелю ветвь $m_i^1(T_i-\tau,\upsilon)\in M_i^1(T_i-\tau,\upsilon)$ (лемма 1.7.7. [38]). Тогда из определения разрешающей функции (7) получаем справедливость включения

$$\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)(m_i^1(T_i-\tau,\upsilon)-\pi_i e^{(T_i-t_i)A_i}z_i)+\pi_i e^{(T_i-\tau)A_i}C_i\upsilon\in$$
$$\in(|F_i(T_i-\tau)\upsilon|^p+\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)\delta_i)^{1/p}\pi_i e^{(T_i-\tau)}B_iS^{p_i}.$$

Поскольку здесь выполнены все условия теоремы 1.7.10 Филиппова–Кастена [38, 39], то существует такая измеримая по Борелю однозначная ветвь $\hat{u}_i(T_i-\tau,\upsilon)$ из S^{p_i}, что

$$\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)(m_i^1(T_i-\tau,\upsilon)-\pi_i e^{(T_i-t_i)A_i}z_i)+\pi_i e^{(T_i-\tau)A_i}C_i\upsilon=$$
$$=(|F_i(T_i-\tau)\upsilon|^p+\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)\delta_i)^{1/p}\pi_i e^{(T_i-\tau)}B_i\hat{u}_i(T_i-\tau,\upsilon),\quad(9)$$

где $t_i\le\tau\le T_i,\upsilon\in R^q$. В силу последнего равенства (9) можно определить стратегию для *i*-го преследователя в виде

$$u_i(T_i-\tau,\upsilon)=(|F_i(T_i-\tau)\upsilon|^p+\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon,z_i)\delta_i)^{1/p}\hat{u}_i(T_i-\tau,\upsilon),\ (10)$$

которая измерима по Борелю при $t_i\le\tau\le T_i,\upsilon\in R^q$.

4.2. Вспомогательная лемма. Лемма 4. Если $\pi_i e^{(T_i-t_i)A_i}z_i^*\notin M_i^1$, $z_i^*\in R^{n_i}$, $0\le t_i\le T_i$, и для управления $\upsilon=\upsilon(\tau)$, $t_i\le\tau\le T_i$, выполнено неравенство $\int_{t_i}^{T_i}|\upsilon(\tau)|^p d\tau\le\sigma_i$, то из точки z_i^* для *i*-го преследователя возможно завершение преследования за время T_i-t_i, где $T_i=T_i(t_i,z_i^*)$ — первый положительный корень уравнения $\Lambda_i(t,t_i,z_i^*)=0$ относительно t.

Доказательство. Введем контрольную функцию

$$\Lambda_i^*(t,t_i,\upsilon(\cdot),z_i^*)=1-\int_{t_i}^{t}\lambda_i(T_i-t_i,T_i-\tau,\upsilon(\tau),z_i^*)\,d\tau,$$

где $\upsilon=\upsilon(\tau)$, $t_i\le\tau\le t$, — управление убегающего, для которого выполнено неравенство $\int_{t_i}^{t}|\upsilon(\tau)|^p d\tau\le\sigma_i$. Очевидно, что $\Lambda_i^*(t_i,t_i,\upsilon(\cdot),z_i^*)=1$ и функция $\Lambda_i^*(t,t_i,\upsilon(\cdot),z_i^*)$ по переменному t, $t_i\le t\le T_i$, равномерно непрерывна и монотонно невозрастающая. Отсюда и из предположения 3 следует существование такого момента t_i^*, $t_i<t_i^*\le T_i$, что

$$\Lambda_i^*(t_i^*, t_i, \upsilon(\cdot), z_i^*) = 0 \tag{11}$$

и $\Lambda_i^*(t, t_i, \upsilon(\cdot), z_i^*) > 0$ для всех t, когда $t_i \le t < t_i^*$.

Тогда для i-го преследователя в промежутке времени $[t_i, T_i]$ предпишем реализовать стратегию (10) в виде

$$u_i(T_i - \tau, \upsilon(\tau)) =$$
$$= (|F_i(T_i - \tau)\upsilon(\tau)|^p + \lambda_i^*(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*)\delta_i)^{1/p}\, \hat{u}_i(T_i - \tau, \upsilon(\tau)), \tag{12}$$

где

$$\lambda_i^*(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*) = \begin{cases} \lambda_i(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*) & \text{при } t_i \le t \le t_i^*, \\ 0 & \text{при } t_i^* < t \le T_i. \end{cases}$$

Известно, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу [40]. Поэтому управление i-го преследователя (12) также будет измеримым по Лебегу при произвольном допустимом управлении убегающего $\upsilon(\tau)$, $t_i \le \tau \le T_i$.

Пусть теперь убегающий выбирает управление $\upsilon(\cdot) \in V_{\sigma_i}[t_i, T_i]$, а преследователь реализует стратегию, соответствующую управлению (12). Тогда для уравнения

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i(T_i - \tau, \upsilon(\tau)) - C_i \upsilon(\tau),\ z_i^* = z_i(t_i)$$

справедлива формула Коши

$$z_i(t) = e^{(t-t_i)A_i} z_i^* + \int_{t_i}^{t} e^{(t-\tau)A_i}(B_i u_i(T_i - \tau, \upsilon(\tau)) - C_i \upsilon(\tau))d\tau.$$

Отсюда для момента времени $T_i = T_i(t_i, z_i^*)$ в силу равенства (9) и вида управления преследователя (12) находим

$$\pi_i z_i(T_i) = \pi_i e^{(T_i - t_i)A_i} z_i^* +$$
$$+ \int_{t_i}^{t_i^*} \lambda_i(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*)(m_i^1(T_i - \tau, \upsilon(\tau)) - \pi_i e^{(T_i - t_i)A_i} z_i^*)d\tau =$$
$$= \pi_i e^{(T_i - t_i)A_i} z_i^* \left(1 - \int_{t_i}^{t_i^*} \lambda_i(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*)\, d\tau\right) +$$
$$+ \int_{t_i}^{t_i^*} \lambda_i(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*) m_i^1(T_i - \tau, \upsilon(\tau))d\tau.$$

Поскольку $\Lambda_i^*(t_i^*, t_i, \upsilon(\cdot), z_i^*) = 0$, то из леммы Сатимова [15] получаем

$$\pi_i z_i(T_i) = \int_{t_i}^{t_i^*} \lambda_i(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*) m_i^1(T_i - \tau, \upsilon(\tau))d\tau \in$$
$$\in M_i^1 \int_{t_i}^{t_i^*} \lambda_i(T_i - t_i, T_i - \tau, \upsilon(\tau), z_i^*)\, d\tau = M_i^1$$

или $z_i(T_i) \in M_i$.

Теперь остается показать допустимость выбранного управления $u_i(T_i - \tau, \upsilon(\tau))$, $t_i \le \tau \le T_i$. В силу определения величины μ_i имеем

$$\int_{t_i}^{T_i} |F_i(T_i - \tau)\upsilon(\tau)|^p\, d\tau \le \sigma_i \sup_{\upsilon(\cdot) \in V_1[t_i, T_i]} \int_{t_i}^{T_i} |F_i(T_i - \tau)\upsilon(\tau)|^p\, d\tau = \sigma_i \chi_i(T_i, t_i) \le \sigma_i \mu_i.$$

Тогда из (12) способом выбора управления преследователя и из равенства (11) находим, что

$$\int_{t_i}^{T_i} | u_i (T_i - \tau, v(\tau)) |^p \, d\tau \le \int_{t_i^*}^{T_i} | F_i (T_i - \tau) v(\tau) |^p \, d\tau +$$

$$+ \delta_i \int_{t_i} \lambda_i (T_i - t_i, T_i - \tau, v(\tau), z_i^*) \, d\tau \le \sigma_i \mu_i + \delta_i = \rho_i ,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $T_i = T_i (t_i, z_i^*)$ — первый момент времени, когда $\pi_i e^{(T_i - t_i) A_i} z_i^* \in M_i^1$ и $\int_{t_i}^{T_i} | v(\tau) |^p \, d\tau \le \sigma_i$. В этом случае для i-го преследователя в промежутке времени $t_i \le \tau \le T_i$ достаточно реализовать управление (12) при предположении $\lambda_i^* (T_i - t_i, T_i - \tau, v(\tau), z_i^*) \equiv 0$ на $[t_i, T_i]$. Тогда нетрудно проверить, что игра (1) из точки z_i^* с помощью i-го преследователя завершится за время $T_i - t_i$.

Лемма доказана.

4.3. Основная часть доказательства. Рассмотрим дифференциальную игру (1) для $i = 1$:

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + B_1 u_1 - C_1 v, \ \ z_1 (0) = z_1^0 . \tag{13}$$

В силу предположения 3 существует конечное решение $T_1 = T_1 (z_1^0)$ уравнения $\Lambda_1 (t, t_1, z_1^0) = 0$, где $t_1 = 0$. Предполагается, что $\pi_1 e^{tA_1} z_1^0 \notin M_1^1$ при $t \in [0, T_1]$.

Пусть $v = v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция убегающего. Тогда для управления $v(\tau)$, $0 \le \tau \le T_1$, возможны два случая:

1) $\int_0^{T_1} | v(\tau) |^p \, d\tau \le \sigma_1$; 2) $\int_0^{T_1} | v(\tau) |^p \, d\tau > \sigma_1$.

В случае 1) в силу леммы 4 первый преследователь, из точки z_1^0, применяя управление (12) при $i = 1$, завершает преследования за время $T_1 = T_1 (z_1^0)$ в дифференциальной игре (13). Следовательно, и игра (1) из точки z^0 завершится за время $T(z^0) = T_1 (z_1^0)$.

В случае 2) существует такой момент $t_2 < T_1$, что $\int_0^{t_2} | v(\tau) |^p \, d\tau = \sigma_1$. До момента t_2 первый преследователь может действовать с помощью управления (12) для $i = 1$. Однако с этого момента t_2 из позиции

$$z_2^* = z_2 (t_2) = e^{t_2 A_2} z_2^0 - \int_0^{t_2} e^{(t_2 - \tau) A_2} C_2 v(\tau) \, d\tau$$

начинает конструировать свое управление второй преследователь, для которого до момента t_2 полагали, что $u_2 (\cdot) \equiv 0$. Затем для второго преследователя повторяется вся процедура преследования, как и для первого преследователя. Для управления $v = v(\tau)$, когда $t_2 \le \tau \le T_2$, где $T_2 = T_2 (t_2, z_2^*)$ — первый положительный корень уравнения $\Lambda_2 (t, t_2, z_2^*) = 0$, возможны следующие два случая:

1′) $\int_{t_2}^{T_2} | v(\tau) |^p \, d\tau \le \sigma_2$; 2′) $\int_{t_2}^{T_2} | v(\tau) |^p \, d\tau > \sigma_2$.

В случае 1′) в силу леммы 4 второй преследователь из точки z_2^* завершает преследование за время $T_2 - t_2$. Тогда игра (1) из точки z^0 завершается за время $T(z^0) = T_2 (t_2, z_2^*)$ со стороны второго преследователя.

В случае 2′) существует такой момент времени $t_3 < T_2$, что $\int_{t_2}^{t_3} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau = \sigma_2$. Как и выше, здесь с момента времени t_3 из положения $z_3^* = z_3(t_3) = e^{t_3 A_3} z_3^0 - \int_0^{t_3} e^{(t_3-\tau)A_3} C_3 \upsilon(\tau)\, d\tau$ аналогично первым двум преследователям начинает реализовывать свою стратегию третий преследователь, для которого до момента t_3 полагаем $u_3(\cdot) \equiv 0$ и т.д.

Таким образом, поочередно реализуя свои управления $u_1, u_2, \ldots,_1 u_{m-1}$, преследователи могут завершить игру (1) из начального положения z^0 до $m-1$-го шага за время $T(z^0) = T_i(t_i, z_i^*)$, где $1 \le i \le m-1$ и $z_1^* = z_1^0$. Доказательство последнего утверждения для $i \ge 3$ проводится так же, как и для $i = 1, 2$.

Если из начального положения z^0 до $m-1$-го шага не завершится преследование, то наступит такой момент $t_m < T_{m-1}$, что $\int_{t_{m-1}}^{t_m} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau = \sigma_{m-1}$, и из точки $z_m^* = z_m(t_m) = e^{t_m A_m} z_m^0 - \int_0^{t_m} e^{(t_m-\tau)A_m} C_m \upsilon(\tau) d\tau$ m-й преследователь начинает реализовывать управление (12) при $i = m$, и управление $u_m(T_m - \tau, \upsilon(\tau)), t_m \le \tau \le T_m$, применяется до тех пор, пока $\int_{t_m}^{T_m} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau \le \sigma_m$, где $T_m = T_m(t_m, z_m^*)$ — первый положительный корень уравнения $\Lambda_m(t, t_m, z_m^*) = 0$. Из того, что $\sigma_m = \sigma - (\sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1})$, и это есть последняя остаточная часть ресурса убегающего, то для произвольного $\upsilon(\tau), t_m \le \tau \le T_m$, получаем, что

$$\int_{t_m}^{T_m} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau \le \sigma - \left(\int_0^{t_2} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau + \int_{t_2}^{t_3} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau + \ldots + \int_{t_{m-1}}^{t_m} |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau \right) = \sigma_m .$$

Значит, в силу леммы 4 из положения z_m^* m-й преследователь до момента завершения преследования затрачивает время $T_m - t_m$. Следовательно, и игра (1) с ограничениями (2), (3) из точки z^0 завершается за время $T(z^0) = T_m(t_m, z_m^*)$.

Заметим, что точка z_m^* зависит от выбора допустимого управления $\upsilon = \upsilon(\tau)$, $0 \le \tau \le t_m$, а значит, и функция $T_m = T_m(t_m, z_m^*)$ тоже зависит от этого управления.

4.4. Завершение доказательства или ограниченность функции $T_m(t_m, z_m^*)$. Из ограниченности функций $T_2(t_2, z_2^*), \ldots, T_{m-1}(t_{m-1}, z_{m-1}^*)$ следует и ограниченность $T_m(t_m, z_m^*)$. Сначала покажем ограниченность функции $T_2(t_2, z_2^*)$.

В силу неравенства Коши–Буняковского и матричного неравенства $\| e^{At} \| \le e^{\|A\|^t}$ для $z_2^* = z_2(t_2, \upsilon_{t_2}(\cdot))$, где $\upsilon_{t_2}(\cdot) = \{\upsilon(\tau) : 0 \le \tau \le t_2\}$, имеем

$$| z_2^* | \le e^{\| A_2 \| t_2} [\, | z_2^0 | + \| C_2 \| \sqrt[p]{t_2 \sigma_2}\,] < e^{\|A_2\| T_1} (| z_2^0 | + \| C_2 \| \sqrt[p]{T_1 \sigma_2}\,),$$

что указывает на ограниченность положения z_2^*. Последнее неравенство получаем из условия $t_2 < T_1$, где $T_1 = T_1(z_1^0)$. Теперь в силу предположения 3 существует непрерывная по (t_2, z_2^*) функция $T_2^*(t_2, z_2^*)$, такая что $T_2(t_2, z_2^*) \le T_2^*(t_2, z_2^*)$. Для функции $T_2^*(t_2, z_2^*)$ на $[0, T_1] \times Q_2$, где $Q_2 = \{ z_2^* : | z_2^* | \le e^{\|A_2\| T_1} (| z_2^0 | + \| C_2 \| \sqrt[p]{T_1 \sigma_2}\,)\}$, существует наибольшее значение T_2^*. Отсюда и следует ограниченность функции $T_2(t_2, z_2^*)$.

Ограниченность $T_3(t_3, z_3^*)$ следует из ограниченности T_2 и т.д. В итоге получаем ограниченность функции $T_m(t_m, z_m^*)$. Таким образом, время завершения дифференциальной игры (1) $T(z^0)$ ограничено сверху.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Для каждого i полагали, что $\pi_i e^{(t-t_i)A_i} z_i^* \notin M_i^1$ при $t \geq t_i$. Если теперь для некоторого $i, i=\overline{1,m}$, существует первый момент времени $T_i = T_i(t_i, z_i^*)$ такой, что $\pi_i e^{(T_i - t_i)A_i} z_i^* \in M_i^1$ и $\Lambda_i(t, t_i, z_i^*) \neq 0$ для всех t, $t_i \leq t < T_i$, то, как отмечено в конце доказательства леммы 4, и в этом случае из положения z^0 в игре (1) возможно завершение группового преследования за время $T(z^0) = T_i(t_i, z_i^*)$ со стороны i-го преследователя.

5. ТЕОРЕМА О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В СЛУЧАЕ б)

В п. 3.2 определена разрешающая функция $\lambda_i(t, t-\tau, \upsilon, z_i^0)$, полунепрерывная сверху по $\tau, 0 \leq \tau \leq t$, и $\upsilon \in R^q$. Теперь с ее помощью введем функцию вида

$$\Lambda(t, z^0) = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V_\sigma[0,t]} \max_{i=\overline{1,k_2}} \int_0^t \lambda_i(t, t-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0)\, d\tau,$$

где $\upsilon_\sigma[0,t] = \left\{ \upsilon(\cdot) : \int_0^t |\upsilon(\tau)|^p \, d\tau \leq \sigma \right\}$, и для $i = \overline{k_2+1, m}$ полагаем $\lambda_i \equiv 0$. Пусть $T' = T'(z^0)$ — первый положительный корень уравнения $\Lambda(t, z^0) = 0$; если такого не существует, то полагаем $T'(z^0) = +\infty$.

Предположение 4 (для случая б)). Пусть для позиции z^0 существует конечный момент времени $T' = T'(z^0)$.

Теорема 2. Если выполнены предположения 1, 2 и 4, то из позиции z^0 в игре (1) с ограничениями (2), (3) в случае б) возможно завершение преследования за время $T' = T'(z^0)$.

Доказательство. Пусть для некоторого положения z^0 выполнены предположения 1, 2 и 4. Рассмотрим контрольную функцию

$$\Lambda^*(T', t, z^0, \upsilon(\cdot)) = 1 - \max_{i=\overline{1,k_2}} \int_0^t \lambda_i(T', T'-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0)\, d\tau,$$

где $\upsilon = \upsilon(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего. Очевидно, что $\Lambda^*(T', 0, z^0, \upsilon(\cdot)) = 1$, и функция $\Lambda^*(T', t, z^0, \upsilon(\cdot))$ непрерывна по t, $0 \leq t \leq T'$. Отсюда в силу предположения 4 следует существование такого момента t^*, что $t^* \leq T'$ и $\Lambda^*(T', t^*, z^0, \upsilon(\cdot)) = 0$. При этом $\Lambda^*(T', t, z^0, \upsilon(\cdot)) > 0$ для всех t, $0 \leq t < t^*$.

Теперь для фиксированных $z_i^0, i = \overline{1, k_2}$ и $T' = T'(z^0)$ рассмотрим многозначное отображение

$$M_i^1(T'-\tau, \upsilon) = \{ m_i^1 \in M_i^1 : \lambda_i(T', T'-\tau, \upsilon, z_i^0)(m_i^1 - \pi_i e^{T'A_i} z_i^0) \in$$
$$\in (|F_i(T'-\tau)\upsilon|^p + \lambda_i(T', T'-\tau, \upsilon, z_i^0)\delta_i)^{1/p} \pi_i e^{(T'-\tau)A_i} B_i S^{p_i} - \pi_i e^{(T'-\tau)A_i} C_i \upsilon \},$$

как и при доказательстве теоремы 1, здесь многозначное отображение $M_i^1(T'-\tau, \upsilon)$ измеримо по (τ, υ), где $0 \leq \tau \leq T'$, $\upsilon \in R^q$. Следовательно, существует однозначная измеримая по Борелю ветвь $m_i^1(T'-\tau, \upsilon) \in M_i^1(T'-\tau, \upsilon)$ (лемма 1.7.7 [38]). Отсюда в силу леммы 3 выполняется включение

$$\lambda_i(T', T'-\tau, v, z_i^0)(m_i^1(T'-\tau, v)-\pi_i e^{T'A_i} z_i^0)+\pi_i e^{(T'-\tau)A_i} C_i v \in$$
$$\in (|F_i(T'-\tau)v|^p + \lambda_i(T', T'-\tau, v, z_i^0)\delta_i)^{1/p} \pi_i e^{(T'-\tau)A_i} B_i S^{p_i}.$$

Поскольку функции $\lambda_i(T', T'-\tau, v, z_i^0)$, $i=\overline{1, k_2}$, и $m_i(\tau, v)$ измеримы по Борелю по (τ, v), то по теореме 1.7.10 Филиппова–Кастена [38, 39] уравнение

$$\lambda_i(T', T'-\tau, v, z_i^0)(m_i^1(T'-\tau, v)-\pi_i e^{T'A_i} z_i^0)+\pi_i e^{(T'-\tau)A_i} C_i v =$$
$$= (|F_i(T'-\tau)v|^p + \lambda_i(T', T'-\tau, v, z_i^0)\delta_i)^{1/p} \pi_i e^{(T'-\tau)A_i} B_i \hat{u}_i \tag{14}$$

однозначно разрешимо в классе измеримых по Борелю функций, и это решение обозначим $\hat{u}_i(T'-\tau, v)$, где $\hat{u}_i(T'-\tau, v) \in S^{p_i}$ при $0 \le \tau \le T'$, $v \in R^q$.

В процессе игры для допустимого управления убегающего $v(\tau)$, $0 \le \tau \le T'$, преследователям предпишем реализовать стратегии $u_i(T'-\tau, v)$, $0 \le \tau \le T'$, $i=\overline{1, k_2}$, в виде измеримых по Лебегу управлений вида

$$u_i(T'-\tau, v(\tau)) = (|F_i(T'-\tau)v(\tau)|^p +$$
$$+\lambda_i^*(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0)\delta_i)^{1/p} \hat{u}_i(T'-\tau, v), \tag{15}$$

где
$$\lambda_i^*(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0) = \begin{cases} \lambda_i(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0) & \text{при } 0 \le t \le t^*, \\ 0 & \text{при } t^* < t \le T'. \end{cases}$$

Покажем, что предложенный способ управления $u_i(\tau, v(\tau))$, $0 \le \tau \le T'$, позволяет завершить преследование при произвольном допустимом управлении $v = v(\tau)$, $0 \le \tau \le T'$, за время $T' = T'(z^0)$. Для этого рассматривается задача Коши

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i(T'-\tau, v(\tau)) - C_i v(\tau), \quad z_i(0) = z_i^0,$$

для каждого $i=\overline{1, k_2}$. Тогда на основании формулы Коши имеем

$$z_i(T') = e^{T'A_i} z_i^0 + \int_0^{T'} e^{(T'-\tau)A_i} [B_i u_i(T'-\tau, v(\tau)) - C_i v(\tau)] d\tau.$$

Из (14), (15) находим

$$\pi_i z_i(T') = \pi_i e^{T'A_i} z_i^0 + \int_0^{T'} \pi_i e^{(T'-\tau)A_i} [B_i u_i(T'-\tau, v(\tau)) - C_i v(\tau)] d\tau =$$
$$= \pi_i e^{T'A_i} z_i^0 + \int_0^{t^*} \lambda_i(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0)(m_i^1(T'-\tau, v(\tau)) - \pi_i e^{T'A_i} z_i^0)\, d\tau =$$
$$= \pi_i e^{T'A_i} z_i^0 \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda_i(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0) d\tau\right) +$$
$$+ \int_0^{t^*} \lambda_i(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0) m_i^1(T'-\tau, v(\tau))\, d\tau.$$

Но для t^* существует такое i^0 из $\overline{1, k_2}$, что $\int_0^{t^*} \lambda_{i^0}(T', T'-\tau, v(\tau), z_{i^0}^0)\, d\tau = 1$. Действительно, если предположить обратное, то для всех $i=\overline{1, k_2}$ должно выполняться неравенство $1-\int_0^{t^*} \lambda_i(T', t'-\tau, v(\tau), z_i^0) d\tau > 0$, что влечет

$$\min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda_i(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau\right) = 1 - \max_{i=\overline{1, k_2}} \int_0^{t^*} \lambda_i(T', T'-\tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau > 0.$$

Но это противоречит тому, что $\Lambda^*(T', t^*, \upsilon(\cdot), z_i^0) = 0$, поэтому для i^0 получаем

$$\pi_{i^0} z_{i^0}(T') = \pi_{i^0} e^{TA_{i^0}} z_{i^0}^0 \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda_{i^0}(T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_{i^0}^0) d\tau \right) +$$

$$+ \int_0^{t^*} \lambda_{i^0}(T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_{i^0}^0) m_{i^0}^1 (T' - \tau, \upsilon(\tau)) d\tau =$$

$$= \int_0^{t^*} \lambda_{i^0}(T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_{i^0}^0) m_{i^0}^1 (T' - \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \in$$

$$\in \int_0^{t^*} \lambda_{i^0}(T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_{i^0}^0) M_{i^0}^1 d\tau = M_{i^0}^1 \int_0^{t^*} \lambda_{i^0}(T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_{i^0}^0)\, d\tau = M_{i^0}^1$$

или $z_{i^0}(T') \in M_{i^0}$. Таким образом, игра (1) из начального положения z^0 в случае б) завершается за время $T' = T'(z^0)$.

Осталось показать допустимость управления $u_i = u_i(T' - \tau, \upsilon(\tau))$, $0 \le \tau \le T'$. Так как по построению для всех $i = \overline{1, k_2}$ выполняется соотношение

$$\int_0^{T'} | u_i(T' - \tau, \upsilon(\tau)) |^p \, d\tau = \int_0^{T'} | F_i(T' - \tau) \upsilon(\tau) |^p \, d\tau + \delta_i \int_0^{t^*} \lambda_i (T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_i^0)\, d\tau,$$

то из легко проверяемых неравенств

$$\int_0^{T'} | F_i(T' - \tau) \upsilon(\tau) |^p \, d\tau \le \sigma\mu_i, \quad \int_0^{t^*} \lambda_i (T', T' - \tau, \upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \le 1$$

получаем неравенство $\int_0^{T'} | u_i(T' - \tau, \upsilon(\tau)) |^p \, d\tau \le \sigma\mu_i + \delta_i$. Поскольку константа $\delta_i = \rho_i - \sigma\mu_i$ при $i = \overline{1, k_1}$ и $\delta_i = \rho_i - \sigma\mu_i = 0$ при $i = \overline{k_1 + 1, k_2}$, приходим к неравенству $\int_0^{T'} | u_i(\tau, \upsilon(\tau)) |^p \le \rho_i$ для всех $i = \overline{1, k_2}$.

Теорема 2 доказана полностью.

Замечание 2. Если для некоторых i^0 и $z_{i^0}^0$ существует такой момент $T'_{i^0} = T'(z_{i^0}^0)$, что $\pi_{i^0} e^{T'_{i^0} A_{i^0}} z_{i^0}^0 \in M_{i^0}^1$ и $\Lambda(t, z_{i^0}^0) \ne 0$ для всех $0 \le t \le T'_{i^0}$, то i^0-й преследователь, строя свое управление $u_{i^0} = u_{i^0}(T'_{i^0} - \tau, \upsilon(\tau))$, $0 \le \tau \le T'(z_{i^0}^0)$, так же, как в (15), полагая при этом $\lambda_{i^0}^*(T', T'_{i^0} - \tau, \upsilon, z_i^0) \equiv 0$ на $[0, T'(z_{i^0}^0)]$, завершает игру (1) из точки z^0 за время $T' = T'(z_{i^0}^0) = T'(z^0)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.А. Азамову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. — 1980. — **112**, № 3. — С. 308–330.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
4. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 480 с.

6. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
7. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 65–78.
8. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
9. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: ЛГУ, 1977. — 224 с.
10. Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. — Ташкент: Изд-во НУУз., 2003. — 296 с.
11. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978. — 270 с.
12. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх // Оптимизационные исследования и статистика. — Лейпциг, 1982. — С. 13–27.
13. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.
14. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
15. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Диф. уравнения. — 1973. — **9**, № 11. — С. 2000–2009.
16. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 198 с.
17. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
18. Азамов А. О задаче качества для игр простого преследования с ограничением // Сердика. Българско матем. спис. — 1986. — № 12. — С. 38–43.
19. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: analogies and applications // The Fourth Intern. Conf. Game Theory and Management , June 28–30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. — 2010. — P. 33–47.
20. Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. — 1968.— № 1. — С. 13–22.
21. Чикрий А.А. Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. — 1993. — № 4. — С. 26–36.
22. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.
23. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. — 1969. — Вып. 2. — С. 49–59.
24. Сатимов Н., Фазылов А.З., Хамдамов А.А. О задаче преследования и уклонения в дифференциальных и дискретных играх многих лиц с интегральными ограничениями // Диф. уравнения. — 1984. — **20**, № 8. — С. 1388–1396.
25. Азимов А.Я., Гусейнов Ф.В. О некоторых классах дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1972. — № 3. — С. 9–16.
26. Ушаков В.Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1972. — **36**, № 1. — С. 15–22.
27. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Саматов Б.Т. О связи между разрешимостью задач преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // Там же. — 2007. — **71**, № 2. — С. 259–263.
28. Азамов А.А., Саматов Б.Т. Линейная дифференциальная игра с «линией жизни» при разнотипных классах управления игроков // Узб. мат. журн. — 2011. — № 3. — С. 43–52.
29. Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Управление в условиях неопределенности при двойных ограничениях // Диф. уравнения. — 2003. — **39**, № 11. — С. 1474–1486.
30. Ибрагимов Г.И. Групповое преследование с интегральными ограничениями на управления игроков // Мат. труды. — 2003. — **6**, № 2. — С. 66–79.

31. Остапенко В.В., Рижкова И.Л. Линейные дифференциальные игры с разнотипными интегральными ограничениями // System Research Information Technologies. — 2002. — N 1. — P. 141–153.

32. Саматов Б.Т. Об игре с «линией жизни» при наличии интегральных ограничений на управления // Докл. АН УзССР. — 1985. — № 3. — С. 3–4.

33. Саматов Б.Т. Построение П-стратегии в игре простого преследования с интегральными ограничениями // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Ташкент: Фан, 1986. — С. 402–412.

34. Саматов Б.Т. О задаче преследования-убегания при линейном изменении ресурса преследователя // Мат. труды. — 2012. — **15**, № 2. — С. 159–171.

35. Azamov A.A., Samatov B.T. П-strategy. An elementary introduction to the theory of differential games. — Taskent: National Univ. of Uzb., 2000. — 32 p.

36. Samatov B.T. The Differential game with «a survival zone» with different classes of admissiable control functions // Game Theory and Appl., Nova Sci. Publ., 2008. — N 13. — P. 143–150.

37. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. шк., 2001. — 239 с.

38. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977 — 624 с.

39. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астр., физики, химии. — 1959. — № 2. — С. 25–32.

40. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 430 с.

Поступила 26.11.2012