УДК 519.7

У.Т. ХИМКА, Я.М. ЧАБАНЮК

РАЗНОСТНАЯ ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ключевые слова: *процедура стохастической оптимизации, марковский процесс, импульсное возмущение.*

ВВЕДЕНИЕ

Одной из проблем системного анализа сложных систем в условиях неопределенности, которые описываются марковским процессом, является установление сходимости процедур стохастической оптимизации (ПСО) [1] в случае непосредственного влияния функции регрессии от такого процесса. Многочисленные примеры применения этих процедур и их модификаций [2] в теории управления [3], теории передачи информации, при решении непараметрических задач математической статистики, в частности при поиске наилучших значений параметров асимптотически нормального распределения ПСО, обусловливают важность определения новых обобщений и свойств ПСО.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разностная процедура стохастической оптимизации в эргодическом марковском пространстве с импульсным возмущением задается эволюционным уравнением

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)[\nabla_{b(t)} C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t)], \tag{1}$$

где $\nabla_{b(t)}C(u;x)=\dfrac{(C(u+b(t);x)-C(u-b(t);x))}{2b(t)}$, $u\in R$. Марковский процесс $x(t),\ t\ge 0$, в стандартном фазовом пространстве $(X,\boldsymbol{X})$ задается генератором

$$\mathbf{Q}\varphi(x)=q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)],\ \ \varphi\in\mathbf{B}(X),$$

где $\mathbf{B}(X)$ — банахово пространство действительных ограниченных функций с супремум-нормой $\|\varphi\|=\max\limits_{x\in X}|\varphi(x)|$ [4].

Стохастическое ядро $P(x,B),\ x\in X,\ B\in\boldsymbol{X}$, определяет равномерно эргодическую вложенную цепь Маркова $x_n=x(\tau_n)$, $n\ge 0$, со стационарным рапределением $\rho(B),\ B\in\boldsymbol{X}$ [5]. Стационарное распределение $\pi(B),\ B\in\boldsymbol{X}$, марковского процесса $x(t),\ t\ge 0$, определяется соотношением

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),\ q=\int_X \pi(dx)q(x).$$

Потенциальный оператор R_0 генератора $\mathbf{Q}$ определяется соотношением $R_0=\Pi-(\Pi+\mathbf{Q})^{-1}$, где $\Pi\varphi(x)=\int_X \pi(dy)\varphi(y)$ — проектор на подпространство $N_Q=\{\varphi\colon \mathbf{Q}\varphi=0\}$ нулей оператора $\mathbf{Q}$.

Импульсный процесс возмущений $\eta^\varepsilon(t),\ t\ge 0$, задается соотношением

$$\eta^\varepsilon(t)=\int_0^t \eta^\varepsilon(ds;x(s/\varepsilon^2)),\tag{2}$$

где семейство процессов с локально независимыми приращениями $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t\ge 0$, $x\in X$, [6] задается генераторами

$$\mathbf{\Gamma}_w^\varepsilon(x)\,\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(u,w+\varepsilon v,x)-\varphi(u,w,x)]\,\Gamma(dv;x),\ x\in X.\tag{3}$$

Здесь $\Gamma(dv;x),\ x\in X$, — ядро [7]. Для первых моментов $b_1(x):=\int_R v\Gamma(dv;x)$ задано условие баланса

$$\int_X \pi(dx)b_1(x)=0.\tag{4}$$

Рассмотрим генератор $\mathbf{\Gamma}_u^\varepsilon(x)$, который действует по первой переменной функции $\varphi(u,w,x)$, т.е.

$$\mathbf{\Gamma}_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(u+\varepsilon v,w,x)-\varphi(u,w,x)]\Gamma(dv;x),\ \ x\in X.\tag{5}$$

Для процедуры (1) рассмотрим усредненную по распределению $\pi(B)$, $B\in\boldsymbol{X}$, систему

$$\frac{du}{dt}=C'(u),\ C(u)=\int_X \pi(dx)C(u;x).\tag{6}$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Пусть существует функция Ляпунова $V(u)\in C^3(R)$ такая, что обеспечивает экспоненционную устойчивость усредненной системы (6):

$$\text{C1: } C'(u)V'(u)\le -cV(u),\ \ c>0,$$

а также дополнительные условия

$$\text{C2: } |(\nabla_{b(t)} C(u) - C'(u))V'(u)| \le c_1 b^2(t)(1+V(u)), \ c_1 > 0,$$

$$\text{C3: } |\mathbf{\Gamma}_1(x) R_0 \widetilde{\mathbf{L}}_t(x) V(u)| \le c_2 (1+V(u)), \ c_2 > 0,$$

$$\text{C4: } |\mathbf{C}_t^{\nabla}(x) R_0 \widetilde{\mathbf{L}}_t(x) V(u)| \le c_3 (1+V(u)), \ c_3 > 0,$$

где $\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) = \mathbf{C}_t^{\nabla}(x) + \mathbf{\Gamma}_1(x) - \mathbf{L}_t$.

Кроме того, пусть функция $C(u, x)$ имеет первые две производные по $u \in R$ и вместе с функциями $b_1(x)$ и $b_2(x)$ равномерно ограничена по $x \in X$. Также пусть выполняется условие баланса (4), а управляющие функции $a(t) > 0$ и $b(t) > 0$ выбраны так, что выполняются условия

$$\text{C5: } \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \ \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty, \int_0^\infty a(t)b^2(t)dt < \infty.$$

Тогда для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 — достаточно малое, решение эволюционного уравнения (1) при всех начальных значениях $u^\varepsilon(0) = u$ с вероятностью 1 сходится к точке минимума $u_0 = 0$ усредненной системы (6):

$$P\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Генераторы семейства процессов с независимыми приращениями $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, на тест-функциях $\varphi(w) \in C^3(R)$ допускают асимптотическое представление

$$\mathbf{\Gamma}_w^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{7}$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w);$$

$$\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2} b_2(x)\varphi''(w); \ b_2(x) = \int_R v^2 \Gamma(dv; x),$$

а остаточный член такой, что $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $\varphi(w) \in C^3(R)$.

Доказательство. Используя разложение функции $\varphi(w)$ в ряд Тейлора, проведем преобразование генератора (3):

$$\mathbf{\Gamma}_w^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w+\varepsilon v) - \varphi(w)]\Gamma(dv; x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\int_R \left[\varphi(w+\varepsilon v) - \varphi(w) - \varepsilon v\varphi'(w) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2 \varphi''(w)\right]\Gamma(dv; x) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2} b_2(x)\varphi''(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1} b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2} b_2(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w).$$

Поскольку $\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = o(\varepsilon)$, $\varphi(w) \in C^3(R)$, получаем представление (7).

Лемма 2. Генератор двухкомпонентного марковского процесса $\eta^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t \ge 0$, имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)+$$

$$+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x)+\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x) \tag{8}$$

в обозначениях леммы 1, а остаточный член такой, что $\|\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x)\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $\varphi(w,\cdot)\in C^3(R)$.

Доказательство. Представление (8) получаем из определения генератора марковского процесса $x(t/\varepsilon^2)$, $t\ge 0$, и вида генератора процессов $\eta^{\varepsilon}(t)$ (2) из [5].

Для генератора $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ рассмотрим урезанный оператор, имеющий вид

$$\mathbf{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x)\,. \tag{9}$$

Лемма 3. Решение проблемы сингулярного возмущения для урезанного оператора (9) на тест-функциях

$$\varphi^{\varepsilon}(w,x)=\varphi(w)+\varepsilon\varphi_1(w,x)+\varepsilon^2\varphi_2(w,x),\varphi(w)\in C^4(R)$$

при условии баланса (4) реализуется соотношением

$$\mathbf{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x)=\mathbf{\Gamma}\varphi(w)+\varepsilon\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)\,, \tag{10}$$

где предельный оператор $\mathbf{\Gamma}$ определяется

$$\mathbf{\Gamma}\Pi\varphi(w)=\Pi\mathbf{\Gamma}_2(x)\Pi\varphi(w)+\Pi\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\Pi\varphi(w)\,, \tag{11}$$

а остаточный член $\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)$ равномерно ограничен по x.

Доказательство. Равенство (10) выполняется при совпадении коэффициентов с одинаковыми степенями ε слева и справа. Рассмотрим левую часть (10):

$$\mathbf{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w)+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)]+$$

$$+\ [\mathbf{Q}\varphi_2(w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(w,x)+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w)]+$$

$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(w,x)+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_1(w,x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_2(w,x)]\,.$$

Поскольку $\varphi(w)$ не зависит от x, то $\mathbf{Q}\varphi(w)=0,\Leftrightarrow \varphi(w)\in N_Q$.

Условие баланса (4) есть условием разрешимости уравнения $\mathbf{Q}\varphi_1(w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)=0$. Таким образом, из последнего имеем

$$\varphi_1(w,x)=R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)\,. \tag{12}$$

Уравнение $\mathbf{Q}\varphi_2(w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(w,x)+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w)=\mathbf{\Gamma}\varphi(w)$ с представлением (12) сводится к виду

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x)+\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w)=\mathbf{\Gamma}\varphi(w)\,.$$

Условие разрешимости последнего уравнения дает предельный оператор $\mathbf{\Gamma}$ в виде (11). Таким образом, для возмущения $\varphi_2(w,x)$ имеем

$$\varphi_2(w,x)=R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)+\mathbf{\Gamma}_2(x)-\mathbf{\Gamma}]\varphi(w)\,. \tag{13}$$

Остаточный член $\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)$ вместе с (12) и (13) примет вид

$$\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)=\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)+\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w)-\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}\varphi(w)+$$

$$+\mathbf{\Gamma}_2(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)+$$

$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}_2(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)+\mathbf{\Gamma}_2(x)R_0\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w)-\mathbf{\Gamma}_2(x)R_0\mathbf{\Gamma}\varphi(w)\,.$$

Учитывая свойства генераторов $\mathbf{\Gamma}_1(x)$, $\mathbf{\Gamma}_2(x)$ и R_0, получаем ограниченность $\theta_\eta^\varepsilon \varphi(w)$.

Рассмотрим двухкомпонентный марковский процесс

$$u^\varepsilon(t),\ x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2),\ t \ge 0. \tag{14}$$

Поскольку ПСО (1) зависит от управляющей функции $a(t)$, процесс (14) неоднородный во времени.

Лемма 4. Генератор двухкомпонентного марковского процесса $u^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t \ge 0$, имеет вид

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,x) + \varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma}_u^\varepsilon(x)\varphi(u,x) + a(t)\mathbf{C}_t^\nabla(x)\varphi(u,x), \tag{15}$$

где $\mathbf{C}_t^\nabla(x)\varphi(u,x) = \nabla_{b(t)} C(u,x)\varphi'_u(u,x)$.

Доказательство. Введем обозначения: $u^\varepsilon(t) = u_t$, $x(t/\varepsilon^2) = x_t$. Тогда, следуя определению генератора марковского процесса, получаем

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^2)) -$$

$$-\varphi(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)| u^\varepsilon(t) = u, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x_{t+\Delta})] + \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,x)]. \tag{16}$$

Поскольку имеет место представление

$$u(t+\Delta) = u + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\Delta + \varepsilon a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t) + o(\Delta),$$

для первого слагаемого из (16) имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\Delta +$$

$$+\varepsilon a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t) + o(\Delta), x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x_{t+\Delta})].$$

Используя слагаемое $\pm\varphi(u + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\Delta + o(\Delta), x_{t+\Delta})$, из последнего получаем

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\Delta + \varepsilon a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t) + o(\Delta), x_{t+\Delta}) -$$

$$-\varphi(u + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\Delta + o(\Delta), x_{t+\Delta})] +$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\Delta + o(\Delta), x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x_{t+\Delta})].$$

Поскольку, следуя определению генератора $\mathbf{\Gamma}_u^\varepsilon(x)$ (5):

$$\mathbf{\Gamma}_u^\varepsilon(x)\varphi(u) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + \Delta\eta^\varepsilon(t)) - \varphi(u)],$$

и проведя замену $v = u + a(t)\nabla_{b(t)} C(u,x)\Delta + o(\Delta)$ (заметим, что $v \to u$ при $\Delta \to 0$), получаем следующий вид для первого предела:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(v + \varepsilon a(t)\Delta\eta^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}) - \varphi(v, x_{t+\Delta})] = \varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma}_u^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x).$$

После преобразований второй предел примет вид

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u + a(t)\nabla_{b(t)} C(u,x)\Delta, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi'_u(u, x_{t+\Delta})(a(t)\nabla_{b(t)} C(u,x)\Delta + o(\Delta))] =$$

$$= a(t)C(u,x)\varphi'_u(u,x).$$

Используя определение генератора марковского процесса $x(t/\varepsilon^2)$:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,x)] = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,x),$$

и сумируя полученые пределы, получаем (15).

Лемма 5. Генератор $\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(x)$ двухкомпонентного марковского процесса $u^{\varepsilon}(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t \ge 0$, допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,x) + a(t)\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u,x) +$$
$$+ a(t)\mathbf{C}^{\nabla}(x)\varphi(u,x) + \theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x), \tag{17}$$

где $\theta_t^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 a(t)\gamma^{\varepsilon}(x) + \varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(u,x)$.

Остаточный член такой, что $\|\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Используем представление оператора $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ (8) и результаты леммы 4.

Лемма 6. Решение проблемы сингулярного возмущения для урезанного оператора

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + a(t)\mathbf{\Gamma}_1(x) + a(t)\mathbf{C}_t^{\nabla}(x)$$

к оператору (17) на возмущенной функции Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u,x) = V(u) + \varepsilon^2 a(t)V_0(u,x)$$

имеет представление

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}(x)V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)\mathbf{L}_t V(u) + \varepsilon\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{18}$$

где предельный генератор $\mathbf{L}_t$ имеет вид

$$\mathbf{L}_t V(u) = \nabla_b(t)C(u)V'(u), \nabla_{b(t)}C(u) = \int_X \pi(dx)\nabla_{b(t)}C(u,x), \tag{19}$$

а остаточный член $\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u)$ имеет представление

$$\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u) = \varepsilon^2 a^2(t)[\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(x)V(u) + \mathbf{C}_t^{\nabla}(x)R_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(x)V(u)]. \tag{20}$$

Доказательство. Разложение генератора (17) на возмущенной функции Ляпунова примет вид

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(x)V_t^{\varepsilon}(u,x) = [\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + a(t)\mathbf{\Gamma}_1(x) + a(t)\mathbf{C}_t^{\nabla}(x)][V(u) + \varepsilon^2 a(t)V_0(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}V(u) + a(t)[\mathbf{Q}V_0(u,x) + \mathbf{C}_t^{\nabla}(x)V(u) + \mathbf{\Gamma}_1(x)V(u)] +$$

$$+ \varepsilon^2 a^2(t)[\mathbf{\Gamma}_1(x)V_0(u,x) + \mathbf{C}_t^{\nabla}(x)V_0(u,x)]. \quad (21)$$

Поскольку $V(u)$ не зависит от x, то $\mathbf{Q}V(u) = 0, \Leftrightarrow V(u) \in N_Q$.

Из условия разрешимости уравнения

$$\mathbf{Q}V_0(u,x) + \mathbf{C}_t^{\nabla}(x)V(u) + \mathbf{\Gamma}_1(x)V(u) = \mathbf{L}_t V(u) \quad (22)$$

получаем предельный оператор $\mathbf{L}_t = \Pi\mathbf{L}_t = \Pi[\mathbf{C}_t^{\nabla}(x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)]$. Из условия баланса (4) $\Pi\mathbf{\Gamma}_1(x) = 0$ предельный оператор примет вид $\mathbf{L}_t = \Pi\mathbf{C}_t^{\nabla}(x)$. Таким образом, для возмущения $V_0(u,x)$ из (22) имеем $\mathbf{Q}V_0(u,x) + \mathbf{L}_t(x)V(u) = \mathbf{L}_t V(u)$. Откуда получаем $V_0(u,x) = R_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(x)V(u)$.

Вместе с (22) последнее представление дает (20). Учитывая вид предельного генератора (19) и вид остаточного члена (20), полученных из разложения (21), имеем (18).

Завершение доказательства теоремы 1. Поскольку для предельного оператора $\mathbf{L}_t$ имеет место оценка

$$\mathbf{L}_t V(u) = C'(u)V'(u) + (\nabla_b(t)C(u)V'(u) - C'(u)V'(u)) \le -cV(u) + c_1 b^2(t)(1+V(u)),$$

следуя условиям C1 и C2 теоремы, а для остаточного члена из условий C3 и C4, получаем оценку $\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u) \le c^* a^2(t)(1+V(u))$ и вместе имеем

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}(x)V^{\varepsilon}(u,x) \le -ca(t)V(u) + c_1 a(t)b^2(t)(1+V(u)) + c^* a^2(t)(1+V(u)).$$

Из последней оценки, условия C5 и теоремы Невельсона–Хасьминского [1, с. 100] получаем утверждение теоремы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для разностной процедуры стохастической оптимизации с импульсным возмущением доказаны достаточные условия сходимости методами решения проблемы сингулярного возмущения и малого параметра для процедуры стохастической оптимизации. С помощью мартингальной предельной теоремы Королюка и ограниченности остаточного члена в терминах существования функции Ляпунова исследовано поведение стохастической системы на предельных промежутках времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.
2. Ljung L., Pflug G., Walk H. Stochastic approximation and optimization of random systems // Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 1992. — 113 p.
3. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970. — 251 с.
4. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
5. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — Singapore: World Sci. Publ., 2005. — 330 p.
6. Семенюк С.А., Чабанюк Я.М. Флуктуации процедуры стохастической аппроксимации с диффузионным возмущением // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 104–109.
7. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. — 185 p.
8. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 133–139.

Поступила 05.11.2012