УДК 519.872

Н.Ю. КУЗНЕЦОВ, А.А. ШУМСКАЯ

ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ $GI/G/m/r$ ОТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ $M/M/m/r$ АНАЛИТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Ключевые слова: *система массового обслуживания, стационарные вероятности состояний, аналитико-статистический метод, распределение Вейбулла, дисперсия оценок.*

При решении многих практических задач возникает потребность в построении количественных оценок близости показателей эффективности функционирования систем с незначительно отличающимися характеристиками (такие оценки еще называют оценками непрерывности или устойчивости). Если при этом искомые показатели одной из систем вычисляются аналитически, то, рассчитывая «поправки», можно достичь высокой точности и для показателей другой системы. Большое внимание уделялось развитию аналитических методов [1–7]. Среди последних работ, направленных на развитие количественных методов оценки непрерывности и устойчивости характеристик систем и сетей массового обслуживания, отметим [8–12]. В то же время их практическое применение ограничено как сложностью реальных систем, так и недостаточно высокой точностью получаемых оценок.

В инженерной практике наиболее широкое распространение получил метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), основанный на имитационном моделировании поведения системы и вычислении требуемых показателей путем усреднения функционалов от траекторий системы. Однако данный подход непригоден для исследования систем с незначительно отличающимися характеристиками.

Весьма плодотворной оказалась идея совместного использования аналитического и статистического подходов: вначале для разности искомых характеристик находят аналитическую формулу, в которую входят некоторые параметры, не вычисляющиеся в явном виде; затем методом статистического моделирования строят несмещенные оценки для этих параметров и подставляют их в аналитическую формулу. Подобные методы называются аналитико-статистическими. Данная идея была реализована для построения количественных оценок непрерывности цепей Маркова общего вида [13, 14] (см. также [15]). Применение аналитико-статистического метода [9] к вычислению стационарных вероятностей состояний системы $GI/G/n/0$, у которой входящий поток требований в определенном смысле близок к пуассоновскому, рассмотрено в [16].

В теории надежности и теории массового обслуживания экспоненциальное распределение играет особую роль. Именно экспоненциальность распределения тех или иных случайных величин часто является решающим фактором для получения явных аналитических формул. Поэтому представляет интерес введение и исследование понятия близости случайных величин, имеющих экспоненциальное и неэкспоненциальное распределения. В настоящей статье данному вопросу уделяется большое внимание. Вначале подробно рассмотрен пример, когда случайная величина, имеющая распределение Вейбулла, может с положительной вероятностью равняться экспоненциально распределенной случайной величине (если параметр формы распределения Вейбулла стремится к единице, то указанная вероятность также стремится к единице). Затем для достаточно общей модели приведен алгоритм моделирования «поправок», если экспоненциальные распределения заменить неэкспоненциальными. Этот алгоритм используется для оценки отклонения стационарных характеристик системы $GI/G/m/r$ от характеристик системы $M/M/m/r$, которые вычисляются в явном виде. Преимущества предлагаемого подхода иллюстрируются численным примером.

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

На примере распределения Вейбулла уточним, о какой аппроксимации идет речь. Предположим, что случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)=1-e^{-x^{\beta}}$, $x\ge 0$, $\beta>0$ (определяющий масштаб множитель предполагаем равным единице). Покажем, что имеет место соотношение

$$\xi = h(\xi_0;\eta_1,\dots,\eta_s), \tag{1}$$

где $\xi_0,\eta_1,\dots,\eta_s$ — независимые случайные величины, $\mathbf{P}\{\xi_0<x\}=1-e^{-\alpha x}$, $x\ge 0$, $\alpha>0$. При этом

$$\mathbf{P}\{\xi\ne\xi_0\}\underset{\beta\to 1}{\to} 0. \tag{2}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\beta>1$. Это случай так называемого стареющего распределения, когда опасность отказа $\lambda(x)=\dfrac{f(x)}{1-F(x)}=\beta x^{\beta-1}$, $x>0$, является монотонно возрастающей функцией (здесь $f(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ). Обозначим x_0 решение уравнения $\lambda(x)=\alpha$, т.е. $x_0=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Кроме того, обозначим

$$\mu_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0\le x\le x_0,\\ \beta x^{\beta-1}-\alpha, & \text{если} \quad x>x_0,\end{cases}$$

$$\lambda_1(x)=\mu_1(x)+\alpha,\ x\ge 0,$$

а η_1 и ξ_1 — случайные величины, определяемые опасностями отказа $\mu_1(x)$ и $\lambda_1(x)$. При этом $\xi_1=\min\{\xi_0,\eta_1\}$. Случайная величина η_1 имеет функцию распределения

$$G_1(x)=1-\exp\left\{-\int_0^x \mu_1(u)\,du\right\}=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0\le x\le x_0,\\ 1-e^{-[x^{\beta}-x_0^{\beta}-\alpha(x-x_0)]}, & \text{если} \quad x>x_0.\end{cases}$$

Обозначим η_2 случайную величину с функцией распределения

$$G_2(x)=\frac{1-\exp\left\{-\int_0^x \lambda(u)\,du\right\}}{1-\exp\left\{-\int_0^x \lambda_1(u)\,du\right\}},\quad x\ge 0, \tag{3}$$

которую можно переписать в виде

$$G_2(x) = \frac{1 - e^{-x^{\beta}}}{1 - \exp\{-\alpha \min\{x, x_0\} - \max\{0, x^{\beta} - x_0^{\beta}\}\}}, \quad x \ge 0 .$$

Тогда

$$\xi = \max\{\eta_2, \min\{\xi_0, \eta_1\}\}. \tag{4}$$

Параметр α экспоненциального распределения выбирается из условия

$$\mathbf{P}\{\xi \ne \xi_0\} = \mathbf{P}\{\{\eta_1 < \xi_0\} \cup \{\eta_2 > \xi_0\}\} = \int_0^{\infty} \{G_1(x) + [1 - G_1(x)][1 - G_2(x)]\} \alpha e^{-\alpha x} dx =$$

$$= \mathbf{M}\{G_1(\xi_0) + [1 - G_1(\xi_0)][1 - G_2(\xi_0)]\} \Rightarrow \min_{\alpha}.$$

Численные расчеты показывают, что оптимальное значение α^* лежит в окрестности единицы, причем $\alpha^* \to 1$, если $\beta \to 1$. Действительно, положим $\beta = 1 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Значения $\mathbf{P}\{\xi \ne \xi_0\}$ при $\alpha = \alpha^*$ и $\alpha = 1$ при различных n приведены в табл. 1.

Таблица 1

n	α^*	Значение $\mathbf{P}\{\xi \ne \xi_0\}$	
		при $\alpha = \alpha^*$	при $\alpha = 1$
1	1,13	0,6326	0,6339
5	1,07	0,2356	0,2405
10	1,04	0,1316	0,1353

Численные данные показывают, что значения $\mathbf{P}\{\xi \ne \xi_0\}$ при $\alpha = \alpha^*$ и $\alpha = 1$ отличаются незначительно, причем вероятность $\mathbf{P}\{\xi \ne \xi_0\}$ убывает с убыванием β. Нетрудно доказать: если положить $\alpha^* = 1$, то $\mathbf{P}\{\xi \ne \xi_0\} \to 0$ при $\beta \to 1$, $\beta > 1$.

Замечание 1. Функция $G_2(x)$, определяемая согласно (3), действительно является функцией распределения. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Если $\gamma_1(x)$, $x \ge 0$, и $\gamma_2(x)$, $x \ge 0$, — неотрицательные интегрируемые функции такие, что $\gamma_1(x) \le \gamma_2(x)$, $x \ge 0$, и функция

$$V(x) = \frac{\int_0^x \gamma_1(u)\, du}{\int_0^x \gamma_2(u)\, du}, \; x \ge 0,$$

является монотонно неубывающей, то

$$W(x) = \frac{1 - \exp\left\{-\int_0^x \gamma_1(u)\, du\right\}}{1 - \exp\left\{-\int_0^x \gamma_2(u)\, du\right\}}, \quad x \ge 0,$$

является функцией распределения (возможно, несобственной).

Поскольку доказательство леммы носит технический характер, приводить его не будем.

Нетрудно видеть, что $G_2(0)=0$, $G_2(\infty)=1$. Очевидно, что $\lambda(x)\le\lambda_1(x)$, $x\ge 0$. Кроме того, при $\beta>1$ функция

$$\frac{\int\limits_0^x \lambda(u)\,du}{\int\limits_0^x \lambda_1(u)\,du}=\frac{x^\beta}{\alpha\min\{x,x_0\}+\max\{0,x^\beta-x_0^\beta\}}$$

монотонно возрастающая. В силу утверждения леммы $G_2(x)$ является функцией распределения.

2. Пусть $0<\beta\le 1$. Это случай так называемого молодеющего распределения, когда опасность отказа монотонно убывает. Тогда формула типа (4) неприменима. Воспользуемся другим подходом. Случайную величину ξ представим в виде

$$\xi=\begin{cases}\xi_0 & \text{с вероятностью } p,\\ \eta & \text{с вероятностью } q=1-p,\end{cases}$$

где η — некоторая случайная величина, а $p\in[0,1]$ — специальным образом подобранное число. В этом случае

$$1-e^{-x^\beta}=p\,(1-e^{-\alpha x})+q\,H(x)\,,$$

т.е.

$$H(x)=1-\frac{1}{q}\,(e^{-x^\beta}-pe^{-\alpha x})\,.$$

Очевидно, что $H(0)=0$, $H(\infty)=1$. Параметр p следует выбирать таким образом, чтобы $\inf\limits_{x\ge 0}H'(x)\ge 0$. Обозначим:

$$x^*(\alpha,p)=\arg\inf_{x\ge 0}H'(x),\quad p(\alpha)=\sup\{p:H'(x^*(\alpha,p))\ge 0\},\quad p^*=\sup_{\alpha>0}p(\alpha)\,.$$

Лемма 2. Оптимальное значение $p^*=\beta$ достигается при $\alpha=1$.

Доказательство. Имеем

$$H'(x)=\frac{1}{q}\left(\beta x^{\beta-1}\,e^{-x^\beta}-p\,\alpha\,e^{-\alpha x}\right).$$

Из условия $\inf\limits_{x\ge 0}H'(x)\ge 0$ находим

$$p(\alpha)=\frac{\beta}{\alpha}\inf_{x>0}(x^{\beta-1}\,e^{-x^\beta+\alpha x})\,. \tag{5}$$

Имеем

$$(x^{\beta-1}\,e^{-x^\beta+\alpha x})'=(\beta-1)\,x^{\beta-2}\,e^{-x^\beta+\alpha x}+x^{\beta-1}\,[-\beta\,x^{\beta-1}+\alpha]\,e^{-x^\beta+\alpha x}=0\,.$$

Значение $x^*(\alpha)$, на котором достигается infinum, является решением уравнения

$$\beta\,(x^\beta-1)=\alpha x-1\,. \tag{6}$$

При $0<\beta\le 1$ данное уравнение имеет единственное решение. Найдем $p^* = \sup\limits_{\alpha>0} p(\alpha)$. Докажем вначале, что $p(\alpha)\le\beta$ для любого $\alpha>0$. Затем покажем, что $p(\alpha)=\beta$ при $\alpha=1$. Это и будет означать, что $p^*=\beta$ при $\alpha=1$. Из соотношения (5) (если x заменить $x^*(\alpha)$) вытекает, что неравенство $p(\alpha)\le\beta$ эквивалентно неравенству

$$[x^*(\alpha)]^\beta\, e^{-[x^*(\alpha)]^\beta} \le \alpha x^*(\alpha)\, e^{-\alpha x^*(\alpha)}. \tag{7}$$

Известно, что максимум выражения xe^{-x} достигается при $x=1$. Выясним, какая из двух точек, $\alpha x^*(\alpha)$ или $[x^*(\alpha)]^\beta$, расположена ближе к единице. Если $\alpha>1$, то из уравнения (6) следует

$$[x^*(\alpha)]^\beta = \frac{\alpha x^*(\alpha)-1}{\beta}+1<\alpha x^*(\alpha)<1,$$

если $\alpha<1$, то

$$[x^*(\alpha)]^\beta = \frac{\alpha x^*(\alpha)-1}{\beta}+1>\alpha x^*(\alpha)>1.$$

Следовательно, в обоих случаях имеет место соотношение (7). Если $\alpha=1$, то $x^*(\alpha)=1$. Поэтому $p(\alpha)=\beta$. Таким образом, значение $p^*=\beta$ достигается при $\alpha=1$. Лемма доказана.

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ «ПОПРАВОК»

В работе [14] (см. также [15]) сформулирован алгоритм моделирования «поправок» к характеристикам цепи Маркова специального вида, если экспоненциально распределенные случайные величины заменить случайными величинами, удовлетворяющими соотношениям (1), (2). Переформулируем данный алгоритм в более простом виде.

Предположим, что последовательность $\bar\chi=(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\dots,\xi^{(\nu)})$ независимых случайных величин однозначно определяет поведение системы в заданном промежутке времени (или на интервале занятости). Здесь ν — момент остановки, $\mathbf{P}\{\nu<\infty\}=1$. Искомую характеристику системы можно представить в виде $A=\mathbf{M}\varphi(\bar\chi)$. Предположим, что случайные величины $\{\xi^{(i)}\}$ зависят от малого параметра $\varepsilon>0$ таким образом, что их распределения в определенном смысле близки к экспоненциальному, т.е.

$$\xi^{(i)}=h(\xi_0^{(i)};\eta_1^{(i)},\dots,\eta_{s_i}^{(i)}),\ i\ge 1, \tag{8}$$

$$\mathbf{P}\{h(\xi_0^{(i)};\eta_1^{(i)},\dots,\eta_{s_i}^{(i)})\ne\xi_0^{(i)}\}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,\ i\ge 1, \tag{9}$$

где $\xi_0^{(i)},\eta_1^{(i)},\dots,\eta_{s_i}^{(i)}$ — независимые случайные величины, $\mathbf{P}\{\xi_0^{(i)}<x\}=$ $=1-e^{-\alpha_i x},\ x\ge 0,\ \alpha_i>0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполнено соотношение (8), то для любого $\varepsilon > 0$

$$A = A_0 + B - C,$$

где $A_0 = \mathbf{M}\varphi(\bar{\chi}_0)$, $\bar{\chi}_0 = (\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \dots, \xi_0^{(\nu_0)})$, $B = \mathbf{M}\left\{\varphi(\bar{\chi}) I\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} \{\xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}\right)\right\}$,

$C = \mathbf{M}\left\{\varphi(\bar{\chi}_0) I\left(\bigcup_{i=1}^{\nu_0} \{\xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}\right)\right\}$, $I(\cdot)$ — индикатор соответствующего события.

Доказательство. Имеем

$$A = \mathbf{M}\left\{\varphi(\bar{\chi})\left[I\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} \{\xi^{(i)} = \xi_0^{(i)}\}\right) + I\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} \{\xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}\right)\right]\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\left\{\varphi(\bar{\chi}_0) I\left(\bigcap_{i=1}^{\nu_0} \{\xi^{(i)} = \xi_0^{(i)}\}\right)\right\} + B =$$

$$= \mathbf{M}\{\varphi(\bar{\chi}_0)\} - \mathbf{M}\left\{\varphi(\bar{\chi}_0) I\left(\bigcup_{i=1}^{\nu_0} \{\xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}\right)\right\} + B = A_0 + B - C.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если дополнительно выполнено соотношение (9), то A_0 является главной частью (предполагается, что A_0 вычисляется аналитически), а поправки B и C вычисляются моделированием, причем $B \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ и $C \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$.

Алгоритм построения несмещенных оценок $\hat{B}_1$ и $\hat{C}_1$ в одной реализации для B и C формулируется следующим образом.

1. Методом Монте-Карло моделируют последовательность $\bar{\chi}_0 = (\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \dots$ $\dots, \xi_0^{(\nu_0)})$.

2. Вычисляют вероятности $q_i = \mathbf{P}\{\xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, \nu_0$, и

$$Q = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{\nu_0} \{\xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}\right\} = 1 - \prod_{i=1}^{\nu_0} (1 - q_i) = \sum_{i=1}^{\nu_0} q_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - q_j).$$

3. В качестве оценки $\hat{C}_1$ выбирают: $\hat{C}_1 = Q\,\varphi(\bar{\chi}_0)$.

4. Для построения оценки $\hat{B}_1$ реализуют случайную величину σ, которая принимает значение i с вероятностью $q_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - q_j) / Q$. Пусть $\sigma = i$.

5. Моделируют случайную величину $\xi^{(i)*}$ с функцией распределения $H_i(x) = \mathbf{P}\{\xi^{(i)*} < x\} = \mathbf{P}\{\xi^{(i)} < x \mid \xi^{(i)} \neq \xi_0^{(i)}\}$, $x > 0$.

6. Методом Монте-Карло моделируют случайные величины $\xi^{(i+1)}, \dots, \xi^{(\nu)}$, составляющие «хвост» последовательности $\bar{\chi}^* = (\xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(i-1)}, \xi^{(i)*}, \xi^{(i+1)}, \dots$ $\dots, \xi^{(\nu)})$.

7. В качестве оценки $\hat{B}_1$ выбирают: $\hat{B}_1 = Q\,\varphi(\bar{\chi}^*)$.

Рассмотрим систему обслуживания $GI / G / m / r$, в которую поступает рекуррентный поток требований, определяемый функцией распределения $F(x)$. Для обслуживания поступающих требований имеется m приборов и r мест для ожидания. Обслуживание проводится в порядке поступления (дисциплина FCFS); длительность обслуживания имеет функцию распределения $G(x)$. Если в момент поступления требования в системе уже находятся $m+r$ требований, то оно теряется. Предполагается, что функции $F(x)$ и $G(x)$ абсолютно непрерывны, т.е. существуют плотности распределения $f(x)$ и $g(x)$. Данное условие является достаточным для существования эргодического распределения состояний рассматриваемой системы. Цель исследования — стационарные вероятности состояний $P(S)$, $S \subset U = \{0, 1, \ldots, m+r\}$.

Очевидно, что поставленная задача аналитическими методами не решается. Воспользуемся результатами предыдущего раздела. Обозначим $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ случайные величины соответственно с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$. Предположим, что эти функции зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$ таким образом, что выполнены соотношения (8) и (9) при $i = 1, 2$. Если распределения общего вида $F(x)$ и $G(x)$ заменить экспоненциальными соответственно с параметрами α_1 и α_2, то получим систему обслуживания $M / M / m / r$, стационарные вероятности которой находятся в явном виде [17]:

$$P_0(S) = \sum_{k \in S} P_0(k), \ \rho = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \ P_0(k) = \frac{\rho^k}{k!} P_0(0) \ (1 \le k \le m),$$

$$P_0(k) = \frac{\rho^k}{m!\, m^{k-m}} P_0(0) \ (m < k \le m+r), \ P_0(0) = \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1} (m^r - \rho^r)}{m!\, m^r (m-\rho)} \right]^{-1}.$$

Опишем процесс моделирования системы $GI / G / m / r$ в течение одного периода регенерации (момент поступления требования при отсутствии требований в системе является моментом регенерации). Пусть $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — последовательность моментов поступления требований в систему $GI / G / m / r$. В момент τ_i $(i \ge 0)$ моделируются две независимые случайные величины: $\xi^{(1,i)}$ (длительность до следующего поступления требования) и $\xi^{(2,i)}$ (продолжительность обслуживания поступившего требования) соответственно с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ (если в момент τ_i в системе уже присутствуют $m+r$ требований, то поступившее требование теряется и $\xi^{(2,i)}$ можно не моделировать). Состояние системы в момент $\tau_i - 0$ определяется вектором $\zeta_i = (\mu_i; \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu_i})$, где μ_i — количество требований в системе, γ_j — время, необходимое для завершения обслуживания требования на j-м приборе (заметим, что только первые m требований обслуживаются, а остальные — в очереди). В начальный момент $\mu_0 = 0$. При известных ζ_i, $\xi^{(1,i)}$ и $\xi^{(2,i)}$ состояние ζ_{i+1} определяется однозначно. Момент остановки ν определяется так: $\nu = \min \{i\colon \mu_i = 0\}$. Таким образом, поведение системы на периоде регенерации однозначно определяется последовательностью $\bar{\chi} = \{(\xi^{(1,0)}, \xi^{(2,0)}), \ldots \ \ldots, (\xi^{(1,\nu-1)}, \xi^{(2,\nu-1)})\}$. Обозначим $\varphi(S; \bar{\chi})$ общее время нахождения системы $GI / G / m / r$ во множестве состояний S при фиксированной последовательности $\bar{\chi}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если случайные величины $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ удовлетворяют соотношению (8), то

$$P(S)=\frac{P_0(S)+\alpha_1 P_0(0)(B(S)-C(S))}{1+\alpha_1 P_0(0)(B-C)},\ S\subset U, \tag{10}$$

где $B=B(U)$, $C=C(U)$, и

$$B(S)=\mathbf{M}\left\{\varphi(S;\bar\chi)I\left(\bigcup_{i=0}^{\nu-1}\{\xi^{(1,i)}\neq\xi_0^{(1,i)}\}\cup\bigcup_{\substack{i:\,\mu_i<m+r,\\ i\in\{1,\dots,\nu-1\}}}\{\xi^{(2,i)}\neq\xi_0^{(2,i)}\}\right)\right\}, \tag{11}$$

$$C(S)=\mathbf{M}\left\{\varphi(S;\bar\chi_0)I\left(\bigcup_{i=0}^{\nu_0-1}\{\xi^{(1,i)}\neq\xi_0^{(1,i)}\}\cup\bigcup_{\substack{i:\,\mu_i<m+r,\\ i\in\{1,\dots,\nu_0-1\}}}\{\xi^{(2,i)}\neq\xi_0^{(2,i)}\}\right)\right\}, \tag{12}$$

где $\bar\chi_0=\{(\xi_0^{(1,0)},\xi_0^{(2,0)}),\dots,(\xi_0^{(1,\nu-1)},\xi_0^{(2,\nu-1)})\}$, $I(\cdot)$ — индикатор соответствующего события.

Доказательство. Стационарные вероятности $\{P(S)\}$ и $\{P_0(S)\}$ удовлетворяют соотношениям

$$P(S)=\frac{\mathbf{M}\varphi(S;\bar\chi)}{\mathbf{M}\varphi(U;\bar\chi)},\ P_0(S)=\frac{\mathbf{M}\varphi(S;\bar\chi_0)}{\mathbf{M}\varphi(U;\bar\chi_0)}.$$

Из теоремы 1 следует, что $\mathbf{M}\varphi(S;\bar\chi)=\mathbf{M}\varphi(S;\bar\chi_0)+B(S)-C(S)$, где $B(S)$ и $C(S)$ определяются согласно (11) и (12). Использовав обозначения $B=B(U)$, $C=C(U)$, имеем

$$P(S)=\frac{\mathbf{M}\varphi(S;\bar\chi_0)+B(S)-C(S)}{\mathbf{M}\varphi(U;\bar\chi_0)+B-C}=\frac{P_0(S)\,\mathbf{M}\varphi(U;\bar\chi_0)+B(S)-C(S)}{\mathbf{M}\varphi(U;\bar\chi_0)+B-C}.$$

С учетом $P_0(0)=\dfrac{1}{\alpha_1\,\mathbf{M}\varphi(U;\bar\chi_0)}$ получим формулу (10).

Теорема доказана.

Замечание 3. Моделирование величин $B(S)$ и $C(S)$ осуществляется в соответствии с алгоритмом, изложенным в предыдущем разделе.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Сравним объемы вычислений, необходимых для оценки вероятностей $\{P(S)\}$, методом непосредственного моделирования и с применением формулы (10). Рассмотрим систему, определяемую следующими параметрами: $m=2$, $r=2$, $F(x)=1-e^{-x^\beta}$, $x>0$, $\beta=1+\dfrac{1}{n}$, $G(x)=1-e^{-x^\gamma}$, $x>0$, $\gamma=1-\dfrac{1}{2n}$, где $n=1,2,\dots$ — целочисленный параметр.

Результаты вычислений при различных значениях n приведены в табл. 2–4. Все оценки построены с относительной погрешностью 0,1% и достоверностью 0,99. Количество реализаций N_i, необходимых для построения оценки для вероятности $P(\{i\})$ требуемой точности, определялось согласно формулам из [18].

Сравнение численных данных, полученных при различных значениях n, показывает, что во всех случаях применение двух разных методов дает практически одни и те же оценки, что подтверждает правильность обоих методов. При $n=1$ (табл. 2) непосредственное моделирование несколько предпочтительнее. Однако уже при $n=10$ (табл. 3) заметно преимущество метода «поправок». При дальнейшем увеличении n (табл. 4) количество требуемых реализаций при непосредственном моделировании остается практически одним и тем же. В то же время метод «поправок» позволяет существенно сократить их число (в несколько десятков раз), причем с ростом n будет наблюдаться дальнейшее уменьшение N_i. Таким образом, предложенный метод позволяет значительно повысить точность вычислений в случае, когда вероятностные характеристики исследуемой системы в определенном смысле близки к характеристикам системы, показатели которой вычисляются по явным аналитическим формулам.

Таблица 2

i	Объемы вычислений для $n=1$			
	непосредственное моделирование		метод «поправок»	
	$P(\{i\})$	N_i	$P(\{i\})$	N_i
0	0,0899	$3{,}67 \cdot 10^7$	0,0899	$4{,}49 \cdot 10^7$
1	0,2315	$9{,}15 \cdot 10^6$	0,2313	$9{,}53 \cdot 10^6$
2	0,1748	$4{,}73 \cdot 10^6$	0,1747	$5{,}49 \cdot 10^6$
3	0,1604	$5{,}00 \cdot 10^6$	0,1605	$5{,}49 \cdot 10^6$
4	0,3434	$1{,}17 \cdot 10^7$	0,3435	$1{,}14 \cdot 10^7$

Таблица 3

i	Объемы вычислений для $n=10$			
	непосредственное моделирование		метод «поправок»	
	$P(\{i\})$	N_i	$P(\{i\})$	N_i
0	0,3139	$8{,}71 \cdot 10^6$	0,3140	$4{,}11 \cdot 10^6$
1	0,3586	$3{,}35 \cdot 10^6$	0,3587	$1{,}96 \cdot 10^6$
2	0,1851	$8{,}06 \cdot 10^6$	0,1851	$4{,}15 \cdot 10^6$
3	0,0936	$2{,}76 \cdot 10^7$	0,0936	$1{,}72 \cdot 10^7$
4	0,0487	$7{,}61 \cdot 10^7$	0,0487	$5{,}46 \cdot 10^7$

Таблица 4

i	Объемы вычислений для $n=100$			
	непосредственное моделирование		метод «поправок»	
	$P(\{i\})$	N_i	$P(\{i\})$	N_i
0	0,3443	$7{,}54 \cdot 10^6$	0,3443	127060
1	0,3491	$3{,}37 \cdot 10^6$	0,3494	72745
2	0,1751	$8{,}53 \cdot 10^6$	0,1750	164926
3	0,1605	$2{,}82 \cdot 10^7$	0,0876	757886
4	0,0439	$7{,}67 \cdot 10^7$	0,0440	$2{,}58 \cdot 10^6$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В.М. О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами // Теория вероятностей и ее применения. — 1975. — **20**, вып. 4. — С. 834–847.
2. Боровков А.А. Теоремы эргодичности и устойчивости для одного класса стохастических уравнений и их применения // Там же. — 1978. — **23**, вып. 2. — С. 241–262.
3. Калашников В.В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. — М.: Наука, 1978. — 248 с.
4. Карташов Н.В. Сильно устойчивые цепи Маркова // Проблемы устойчивости стохастических моделей. — М.: ВНИИСИ, 1981. — С. 54–59.
5. Калашников В.В. Количественные оценки в теории надежности. — М.: Знание, 1989. — 48 с.
6. Zolotarev V.M., Kalashnikov V.V. Stability problems for stochastic models // Lect. Notes Math. — 1993. — N 1546. — 229 p.
7. Kalashnikov V.V. Mathematical methods in queueing theory. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. — 392 p.
8. Asmussen S. Applied probability and queues. — New York: Springer, 2003. — 438 p.
9. Berdjoudj L., Aissani D. Strong stability in retrial queues // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2003. — Вип. 68. — P. 11–17.
10. Foss S.G., Konstantopoulos T. An overview of some stochastic stability methods // J. Oper. Res. Soc. Jap. — 2004. — **47**, N 4. — P. 275–303.
11. MacPhee I.M., Muller L.J. Stability criteria for controlled two-queue systems // Queueing Systems. — 2006. — **52**. — P. 215–229.
12. Bramson M. Stability of queueing networks // Probability Surveys. — 2008. — **5**. — P. 169–345.
13. Коваленко И.Н. К расчету поправок к характеристикам СМО // Проблемы устойчивости стохастических моделей. — М.: ВНИИСИ, 1986. — С. 45–48.
14. Кузнецов Н.Ю. Аналитико-статистический метод построения количественных оценок непрерывности характеристик систем массового обслуживания и резервированных систем. — М.: ВНИИСИ, 1986. — С. 54–62.
15. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
16. Кузнецов Н.Ю. Нахождение стационарных вероятностей состояний системы $GI/G/n/0$ с входящим потоком требований, близким к пуассоновскому // Кибернетика. — 1984. — № 2. — С. 74–79.
17. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: КомКнига, 2005. — 397 с.
18. Крейн М., Лемуан О. Введение в регенеративный метод анализа моделей. — М.: Наука, 1982. — 104 с.

Поступила 12.03.2013