УДК 517.97

И.М. ИСКАНАДЖИЕВ

ОБ АЛЬТЕРНИРОВАННОМ ИНТЕГРАЛЕ ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ключевые слова: *альтернированный интеграл, дифференциальное включение, преследование, многозначное отбражение, частичные суммы.*

Для решения задачи преследования в линейных дифференциальных играх Л.С. Понтрягин предложил два прямых метода [1, 2]. Они были обобщены в ряде работ [3–8, 10–20]. В частности, в [3] описан подход, который сочетает в себе элементы двух методов Понтрягина.

В настоящей статье изучается взаимосвязь интеграла [3] с альтернированным интегралом для игр преследования, описываемых дифференциальными включениями вида $\dot{z}(t) \in -F(t, v)$, где F — непрерывное компактнозначное отображение [4]. Типичный источник таких систем — квазилинейная дифференциальная игра $\dot{x} = Cx - f(u, v)$, $u \in P$, $v \in Q$, которая практически равносильна дифференциальному включению $\dot{z}(t) \in -\exp(-tC) f(P, v)$ [5].

Используем следующие обозначения: $I = [\alpha, \beta]$ — фиксированный отрезок времени; Δ — подотрезок I; $|\Delta|$ — длина отрезка Δ; $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^d)$ (соответственно, $\mathrm{Ccl}(\mathbb{R}^d)$) — семейство всех непустых замкнутых (выпуклых замкнутых) подмножеств $\mathbb{R}^d$; $\mathrm{cm}(\mathbb{R}^d)$ (соответственно, $\mathrm{Ccm}(\mathbb{R}^d)$) — семейство всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств $\mathbb{R}^d$; $H = \{z \in \mathbb{R}^d \mid |z| \le 1\}$ — единичный замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$; $h(A, B) = \min\{r \ge 0 \mid A \subset B + rH, B \subset A + rH\}$ — метрика Хаусдорфа; $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ — разбиение отрезка I ($\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = \beta$, n может зависить от ω); Ω — совокупность всех разбиений отрезка I; $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$; $\delta_i = |\Delta_i|$, $|\omega| = \max|\delta_i|$ — диаметр разбиения ω; $\int_i$ — интеграл по отрезку Δ_i. Если X — подмножество евклидова пространства, то $X[\Delta]$ обозначает совокупность всех измеримых функций $a(\cdot): \Delta \to X$. В случае $\Delta = [\alpha, \beta]$ пишем $X[\alpha, \beta]$.

В работе [6] предложена модификация первого прямого метода, основанная на формуле $\int_0^\tau a(t) M\, dt = M$, где $M \in \mathrm{Ccl}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha(\cdot): [0, \tau] \to \mathbb{R}^+$ — неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int_0^\tau a(t)\, dt = 1$.

В работах [7, 8] предложены дальнейшие усиления первого метода, основанные на рассмотрении многозначных отображений $A(t)$, удовлетворяющих условию $\int_0^\tau A(t) dt \subset M$.

Второй метод Понтрягина основывается на понятии алтернированного интеграла [1, 2]. Приведем его определение применительно к управляемым дифференциальным включениям [4, 5].

Пусть задана управляемая система

$$\dot{z} \in -F(t, v), \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^d$, $v \in Q$, $t \in I$, $Q \in \mathrm{cm}(\mathbb{R}^q)$ и $F: I \times Q \to \mathrm{Ccm}(\mathbb{R}^d)$ — непрерывное отображение. Наряду с системой (1) задается также подмножество M, $M \subset \mathbb{R}^d$, называемое терминальным множеством.

Каждому разбиению ω из Ω ставим в соответствие множество $S(\omega)$, называемое альтернированной суммой. Она является последним членом последовательности S^i, вводимой рекуррентно [4]:

$$S^0 = M,\ S^i = \bigcap_{v(\cdot) \in Q(\Delta_i)} \left[S^{i-1} + \int_i F(t, v(t)) dt \right],\ S(\omega) = S^n,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

(относительно понятия интеграла многозначного отображения см. [9]).

Множество $W_\alpha^\beta(M) = \bigcap_{\omega \in \Omega} S(\omega)$ называется альтернированным интегралом Понтрягина [10–20].

В дальнейшем по мере необходимости в обозначениях указывается зависимость альтерниованных сумм и интегралов не только от ω или α, β, но и от других исходных данных, например $S^1(M), S(\omega, P, Q)$, $W_\alpha^\beta(M, F)$. Кроме того, в случае $I = [0, \tau]$ пишем $W^\tau(M)$ или просто W^τ.

Следующее утверждение позволяет случай некомпактного M свести к случаю компактного терминального множества, рассмотрение которого намного проще.

Лемма 1 [10]. Пусть $A \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^d), B \subset \beta H$. Тогда имеют место включения

$$(A + B) \cap \alpha H \subset A \cap (\alpha + \beta) H + B, \tag{3}$$

$$(A \overset{*}{-} B) \cap \alpha H \subset (A \cap (\alpha + \beta) H) \overset{*}{-} B \tag{4}$$

($\overset{*}{-}$ — операция геометрической разности [1]).

Доказательство. Пусть $x \in (A + B) \cap \alpha H$. Тогда $x = a + b$, где $a \in A, b \in B$ и $x \in \alpha H$, так что $a = x - b \in (\alpha + \beta) H$. Следовательно, $x \in A \cap (\alpha + \beta) H + B$. Аналогично доказывается и включение (4).

Семейство всех измеримых замкнутозначных отображений $A(\cdot): \Delta \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих условию $\int_\Delta A(t) dt \subset D$, обозначим $\Phi(\Delta, D)$ (измеримость многозначных отображений понимается в смысле [21]). Следующая схема сочетает в себе элементы двух методов Понтрягина для задачи преследования [3].

Пусть $I = [0, \tau]$, $\omega \in \Omega$ и

$$B^0 = M, B^i = \bigcup_{A(\cdot)} \int_i \bigcap_{v \in Q} [A(t) + F(t, v)] dt,$$

где объединение проводится по всем многозначным отображениям $A(\cdot) \in \Phi(\Delta_i, B^{i-1})$, и $B(M, \omega) = B^n$, $B^\tau(M) = \bigcup_\omega B(M, \omega)$.

Лемма 2. Если $M \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^r)$, то $B^\tau(M) \subset W^\tau(M)$.

Доказательство. Пусть X — произвольное подмножество $\mathbb{R}^d$, $[\gamma, \theta] \subset I$ и $A(\cdot) \in \Phi([\gamma, \theta], X)$. Для удобства положим

$$B_\gamma^\theta = \int_\gamma^\theta \bigcap_{v \in Q} [A(t) + F(t, v)]\, dt$$

и покажем, что

$$\bigcup_{A(\cdot) \in \Phi([\gamma, \theta], X)} B_\gamma^\theta \subset W_\gamma^\theta(X), \tag{5}$$

где $W_\gamma^\theta(X)$ — альтернированный интеграл Понтрягина.

Зафиксируем разбиение $\omega = \{\gamma = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = \theta\}$ — отрезка $[\gamma, \theta]$. Легко увидеть, что

$$B_{t_{j-1}}^{t_j} = \int_j \bigcap_{v \in Q} [A(t) + F(t, v)]\, dt \subset \bigcap_{v_j(\cdot)} \left[\int_j A(t)\, dt + \int_j F(t, v_j(t))\, dt \right],$$

где $v_j(\cdot) \in Q(\Delta_j)$. Из соотношения $\left(\bigcap_\alpha X_\alpha \right) + Y \subset \bigcap_\alpha (X_\alpha + Y)$ имеем

$$B_\gamma^{t_2} = B_\gamma^{t_1} + B_{t_1}^{t_2} \subset$$

$$\subset \bigcap_{v_1(\cdot)} \left[\int_\gamma^{t_1} A(t)\, dt + \int_1 F(t, v_1(t)) dt \right] + \bigcap_{v_2(\cdot)} \left[\int_{t_1}^{t_2} A(t) dt + \int_2 F(t, v_2(t)) dt \right] \subset$$

$$\subset \bigcap_{v_2(\cdot)} \left[\bigcap_{v_1(\cdot)} \left[\int_\gamma^{t_2} A(t)\, dt + \int_1 F(t, v_1(t))\, dt \right] + \int_2 F(t, v_2(t)) dt \right] = S^2 \left(\int_\gamma^{t_2} A(t)\, dt \right).$$

В ходе дальнейших рассуждений получим включение

$$B_\gamma^{t_m} \subset S^m \left(\int_\gamma^{t_m} A(t)\, dt \right).$$

Из соотношений $t_m = \theta$ и $\int_\gamma^\theta A(t)\, dt \subset X$ следует $B_\gamma^\theta \subset S(X, \omega)$. В силу произвольности ω и $A(\cdot) \in \Phi([\alpha, \beta], X)$ имеем

$$\bigcup_{A(\cdot) \in \Phi([\gamma, \theta], X)} B_\gamma^\theta \subset W_\gamma^\theta(X).$$

Пусть теперь $\omega = \{0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = \tau\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, \tau]$. Покажем, что $B(M, \omega) \subset W^\tau(M)$.

В результате последовательного применения включения (5) и полугруппового свойства альтернированного интеграла [11–13] образуется цепочка соотношений

$$B^1 \subset W_0^{\tau_1}(M), B^2 \subset W_{\tau_1}^{\tau_2}(B^1) \subset W_{\tau_1}^{\tau_2}(W_0^{\tau_1}(M)) \subset W_0^{\tau_2}(M), \ldots$$

$$\ldots, \; B^n \subset W_0^{\tau_n}(M) = W^\tau(M).$$

Последнее соотношение влечет $B^\tau(M) \subset W^\tau(M)$.

Лемма доказана.

Пусть $\alpha(\delta) = \max \{h(F(t_1, v_1), F(t_1, v_1)) \,|\, |t_1 - t_2| \le \delta, |v_1 - v_2| \le \delta\}$ — модуль непрерывности отображения $F(t, v)$. Если $\xi \in \Delta \subset I, v \in Q$, то нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$h\left[\int_{\Delta} F(t,v)\,dt, \delta F(\xi, v)\right] < \delta\alpha(\delta), \tag{6}$$

где δ — длина отрезка Δ.

Лемма 3. Если A — произвольное подмножество $\mathbb{R}^d$, то

$$\bigcap_{v(\cdot)\in Q(\Delta_i)} \left[A \overset{*}{-} 2\delta_i \alpha(\delta_i) H + \int_i F(t,v)\,dt \right] \subset$$

$$\subset \int_i \bigcap_{v\in Q} \left[\frac{1}{\delta_i} A + F(t,v) \right] dt\,. \tag{7}$$

В силу (6)

$$\bigcap_{v(\cdot)\in Q(\Delta_i)} \left[A \overset{*}{-} 2\delta_i \alpha(\delta_i) H + \int_i F(t,v)\,dt \right] \subset \bigcap_{v\in Q} \left[A \overset{*}{-} 2\delta_i \alpha(\delta_i) H + \int_i F(t,v)\,dt \right] \subset$$

$$\subset \bigcap_{v\in Q} [A \overset{*}{-} \delta_i \alpha(\delta_i) H + \delta_i F(\xi, v)]. \tag{8}$$

По определению модуля непрерывности имеем

$$\bigcap_{v\in Q} \left[\frac{1}{\delta_i} A \overset{*}{-} \alpha(\delta_i) H + F(\xi, v) \right] \subset \bigcap_{v\in Q} \left[\frac{1}{\delta_i} A + F(t, v) \right].$$

Интегрируя обе части этого включения по отрезку Δ_i, получаем

$$\bigcap_{v\in Q} [A \overset{*}{-} 2\delta_i \alpha(\delta_i) H + \delta_i F(\xi_i, v)] \subset \int_i \bigcap_{v\in Q} [(1/\delta_i) A + F(t,v)\,dt]. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) вытекает справедливость включения (7).

Лемма доказана.

Пусть $\omega \in \Omega$. Положим

$$C^0 = M,\ C^i = \int_i \bigcap_{v\in Q} \left[\frac{1}{\delta_i} C^{i-1} + F(t,v) \right] dt,\ C(M, \omega) = C^n.$$

Теорема 1. Если $M \in \mathrm{Ccl}\,(\mathbb{R}^d)$, то справедливо равенство

$$\bigcup_{\varepsilon>0} W^{\tau}(M \overset{*}{-} \varepsilon H) = \bigcup_{\varepsilon>0} C^{\tau}(M \overset{*}{-} \varepsilon H). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть ω — произвольное разбиение отрезка I, удовлетворяющее условию $\alpha(|\omega|) < \varepsilon/(2\tau)$. Положим $S^0 = C^0 = M \overset{*}{-} \varepsilon H$. В соотношении (7) в качестве A примем S^0. Тогда

$$\bigcap_{v(\cdot)\in Q(\Delta_i)} \left[S^0 \overset{*}{-} 2\delta_i \alpha(\delta_i) H + \int_1 F(t,v)\,dt \right] \subset$$

$$\subset \int_1 \bigcap_{v\in Q} \left[\frac{1}{\delta_i} C^0 + F(t,v) \right] dt = C^1(M \overset{*}{-} \varepsilon H).$$

С помощью соотношения $A \underset{-}{*} B \underset{-}{*} C = A \underset{-}{*} (B + C)$ получим

$$S^1(M \underset{-}{*} (\varepsilon + 2\delta_1 \alpha(\delta_1) H)) \subset C^1(M \underset{-}{*} \varepsilon H).$$

Повторив аналогичные рассуждения $n-1$ раз, будем иметь

$$S^n\left(M \underset{-}{*} (\varepsilon + 2\sum_{i=1}^{n} \delta_i \alpha(\delta_i) H \right) \subset C^n(M \underset{-}{*} \varepsilon H).$$

Поскольку $\alpha(\delta_i) < \alpha(|\omega|)$, то

$$S(M \underset{-}{*} (\varepsilon + 2\tau\alpha(|\omega|)H, \omega) \subset C(M \underset{-}{*} \varepsilon H, \omega).$$

В силу предположения $\alpha(|\omega|) < \varepsilon / (2\tau)$ получаем включение $S(M \underset{-}{*} 2\varepsilon H, \omega) \subset$ $\subset C(M \underset{-}{*} \varepsilon H, \omega)$. Отсюда $\bigcap\limits_{\omega} S(M \underset{-}{*} 2\varepsilon H, \omega) \subset C(M \underset{-}{*} \varepsilon H, \omega)$. Следовательно, $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} W^\tau (M \underset{-}{*} 2\varepsilon H) \subset \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} C^\tau (M \underset{-}{*} \varepsilon H)$. С другой стороны, из леммы 3 имеем $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} C^\tau (M \underset{-}{*} \varepsilon H) \subset \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} W^\tau (M \underset{-}{*} \varepsilon H)$.

Заметим, что $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} W^\tau (M \underset{-}{*} 2\varepsilon H) = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} W^\tau (M \underset{-}{*} \varepsilon H)$. Отсюда вытекает равенство (10).

Следствие. Если $M \in \mathrm{Ccl}\,(\mathbb{R}^d)$, то

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} W^\tau (M \underset{-}{*} \varepsilon H) = \bigcup_{\varepsilon > 0} B^\tau (M \underset{-}{*} \varepsilon H). \tag{11}$$

Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\dot{z} = Cz - u + v, \tag{12}$$

где $z \in \mathbb{R}^d$, C — $(d \times d)$-матрица, $P \in \mathrm{Ccm}\,(\mathbb{R}^d)$, $Q \in \mathrm{Ccm}\,(\mathbb{R}^d)$, терминальное множество $M \in \mathrm{Ccl}\,(\mathbb{R}^d)$. Для линейной дифференциальной игры множества B_i определяются следующим образом [3]:

$$B_0 = M, \; B_i = \bigcup \int_i [A_{i-1}(t) + P(t)] \underset{-}{*} Q(t) dt,$$

где объединение проводится по всем многозначным отображениям $A_{i-1}(t) \in$ $\in \Phi(\Delta_i, B_{i-1})$ и $P(t) = \exp(tC)P$, $Q(t) = \exp(tC)Q$, а множества C_i имеют вид

$$C_0 = M, \; C_i = \int_i \left[\frac{1}{\delta_i} C_{i-1} + P(t) \right] \underset{-}{*} Q(t)\, dt.$$

Заметим, что схема (2) равносильна классической схеме альтернированного интеграла [1, 2]

$$S^0 = M, \; S^i = [S^{i-1} + U^i] \underset{-}{*} V^i,$$

где $U^i = \int_i \exp(tC) P\, dt$, $V^i = \int_i \exp(tC) Q\, dt$.

Пусть существует положительное число r и функция $f(\cdot): I \to \mathbb{R}^d$, имеющая ограниченную вариацию на отрезке I, такие, что для каждого разбиения $\omega \in \Omega$ частичные альтернированные суммы S^i удолетворяют условиям

$$f(\tau_i) + rH \subset S^i, \; \tau_i \in \omega, \; i = \overline{0, n}. \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть $M \in \mathrm{Ccl}(\mathbb{R}^d)$ и выполнено условие (13). Тогда справедливо равенство $\mathrm{cl}\, C^\tau(M) = W^\tau(M)$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает

$$W^\tau(M \underset{-}{*} \varepsilon H) \subset C^\tau(M) \subset W^\tau(M). \tag{14}$$

Пусть $M \in \mathrm{Ccm}(\mathbb{R}^d)$ и выполнено условие (13). Тогда из результатов работ [2, 14] следует существование положительных чисел l_1 и l_2 таких, что

$$h[W^\tau(M), W^\tau(M \underset{-}{*} \varepsilon H)] \le$$

$$\le h[W^\tau(M), S(M \underset{-}{*} \varepsilon H, \omega)] + h[S(M \underset{-}{*} \varepsilon H, \omega), W^\tau(M \underset{-}{*} \varepsilon H)] <$$

$$< l_1[|\omega| + \varepsilon]H + l_2|\omega|H.$$

Без потери общности можно считать $|\omega| < \varepsilon$, поэтому

$$h[W^\tau(M), W^\tau(M \underset{-}{*} \varepsilon H)] < L\varepsilon, \ L = 2l_1 + l_2.$$

Учитывая включение (14), получим $h[W^\tau(M), C^\tau(M)] < L\varepsilon$.

В силу замкнутости $W^\tau(M)$ имеем $\mathrm{cl}\, C^\tau(M) = W^\tau(M)$. Пусть теперь $M \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^d)$ и $x \in W(M, \tau)$. Тогда $x \in W^\tau(M) \cap |x| H$. Из леммы 1 следует существование положительного числа α такого, что $x \in W^\tau(M \cap \alpha H)$. Отсюда в силу доказанного $x \in \mathrm{cl}\, C^\tau(M \cap \alpha H) \subset \mathrm{cl}\, C^\tau(M)$. Поэтому $W^\tau(M) \subset \mathrm{cl} C^\tau(M)$, а также $\mathrm{cl}\, C^\tau(M) \subset W^\tau(M)$.

Следовательно, $\mathrm{cl} C^\tau(M) = W^\tau(M)$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{cl} B^\tau(M) = W^\tau(M).$$

В заключение заметим, что теорема 2 может быть интерпретирована следующим образом (сравни [3, 6–8]). Если M — выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$ и выполнены условия (13), то в игре (12) из точек z_0, $z_0 \in \mathrm{Int}\, W^\tau(M)$, возможно завершение преследования в момент времени τ с помощью кусочно-стробоскопической стратегии [7]. При этом преследователь для построения своего управления пользуется информацией о текущих значениях управления убегающего и текущих фазовых состояниях системы (12) в дискретные моменты времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. — 1967. — **175**, № 4. — С. 764–766.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. — 1980. — **112**, № 3. — С. 307–330.
3. Сатимов Н., Карабаев Э. Об одном методе решения задачи преследования // Докл. АН УзССР. — 1986. — № 3. — С. 5–6.
4. Азамов А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. — 1988. — **299**, № 2. — С. 265–268.

5. Мищенко Е. Ф., Сатимов Н. Альтернированный интеграл в линейных дифференциальных играх с нелинейными управлениями // Диф. урав. — 1974. — **10**, № 12. — С. 2173–2178.
6. Сатимов Н. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Там же. — 1973. — **9**, № 11. — С. 2000–2009.
7. Никольский М.С. Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания // Мат. заметки. —1983. — **33**, № 6. — С. 885–891.
8. Азамов А., Саматов Б. О модифцированном третьем методе в задаче преследования // Неклассические задачи математической физики. — Ташкент: Фан, 1984. — С. 174–183.
9. Половинкин Е.С. Об интегрировании многозначных отображений // Докл. АН СССР. — 1988. — **271**, №5. — С. 1059–1074.
10. Азамов А. Качестенная структура фазового пространства дифференциальных игр преследования-убегания: Дис. ... докт. физ.-мат. наук, Таш.ГУ. — Ташкент, 1986. — 267 с.
11. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
12. Гусятников Б.П. К вопросу информированности игроков в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. — 1972. — **36**, № 5. — С. 917–924.
13. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 264 с.
14. Пономарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестн. Москов. ун-та. Сер. вычисл. математика и кибернетика. — 1978. — № 1. — С. 82–90.
15. Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. — 1981. — **116**, № 4. — С. 136–144.
16. Азамов А. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх // Там же. — 1982. — **118** (160), № 3 — С. 422–430.
17. Куржанский А.Б., Мельников Н.Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Там же. — 2000. — **191**, № 6. — С. 69–100.
18. Константинов Р.В. Квазилинейные дифференциальне игры преследования с простыми движениями и фазовыми ограничениями // Мат. заметки. — 2001. — **69**, № 4. — С. 581–590.
19. Мухамедиев Б.М., Мансурова М.Е. Альтернированные интегралы Понтрягина со смешанными ограничениями // Вычисл. технологии. — 2007. — **12**, № 2. — С. 104–114.
20. Silin D. A generalization of Pontryagin's alternating integral and generalized solutions to Hamilton–Jakobi equations // Междунар. конф. «Дифферециальные уравнения и топология», посвящ. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина: Тез. докл., Москва, 17–22 июня 2008 г. — 2008. — С. 291.
21. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

Поступила 28.06.2010