УДК 681.514

А.Г. ГУРКО, В.М. КОЛОДЯЖНЫЙ

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ключевые слова: *система управления, ограниченные возмущения, информационное множество, R-функции.*

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование систем управления многими техническими объектами осуществляется в условиях отсутствия полной информации (неопределенности) о текущем состоянии системы и/или значениях параметров ее математической модели. Эта неопределенность связана с допускаемыми упрощениями при построении моделей исследуемых объектов, а также неполнотой информации о таких факторах, как возможные возмущения и помехи (шумы) измерений выходных координат системы. В этих условиях возникает задача идентификации упомянутых выше факторов и оценивания вектора состояния и/или параметров математической модели объекта.

Если какой-либо неопределенный фактор (шумы измерений, возмущения и т.д.) $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m)^{\mathrm{T}}$ имеет случайный характер, то его исчерпывающей характеристикой будет плотность $\omega(\chi)$ распределения вероятности. Наиболее исследованным примером такого представления является случай нормального (гауссова) распределения [1–3].

Поскольку в прикладных задачах не всегда имеется возможность многократного проведения эксперимента на исследуемом объекте для сбора статистической информации при неизменном действии неопределенных и неуправляемых факторов, наиболее общей и естественной моделью описания указанных факторов может быть их представление в виде множества Ω^{χ} их возможных значений χ_i. Это множество можно определить, например, в интервальной форме $\chi_i^- \le \chi_i \le \chi_i^+$, где χ_i^- и χ_i^+ — нижняя и верхняя границы значений параметра i-го неопределенного фактора. Каждая реализация χ_i с равной вероятностью может принимать любое значение из соответствующего доверительного множества Ω^{χ}. Таким образом, результатом идентификации является не конкретное (точечное) значение искомого фактора, а множество его возможных значений [4–14].

Поскольку значения указанных факторов неизвестны и могут с равной вероятностью принимать любую величину из заданного множества Ω^{χ}, возникает проблема поиска соответствующих точечных значений состояния, на которые проектировщик будет ориентироваться при расчете управления. При этом приходится рассматривать значения факторов, которые максимизируют критерий качества работы системы, в то время как разработчик системы управления стремится этот критерий минимизировать. Таким образом, задача синтеза системы управления сводится к известной из теории дифференциальных игр минимаксной задаче [5, 6]. Недостатком такого подхода, помимо алгоритмической сложности и вычислительной трудоемкости, является то, что действующие на систему факторы не всегда будут стремиться обеспечить максимальное значение критерия качества, поэтому возможно получение лишь субоптимальных законов управления. Часто в качестве оценки состояния принимается чебышевский центр информационного множества Ω^{χ} [14], который также находится путем решения задачи на минимакс.

В рамках множественного подхода ведутся исследования по оцениванию параметров систем со случайными возмущениями, статистические характеристики которых не известны, а заданы лишь пределы, в которых эти характеристики могут изменяться [15–19]. Данное направление развивается с помощью теории статистически неопределенных систем [19].

В настоящей статье рассмотрена процедура оценивания параметров вектора состояния дискретной динамической системы, в которой для построения эволюционирующих во времени множеств возможных состояний использованы математические средства теории R-функций [20].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретную систему управления, динамика которой описывается следующими разностными уравнениями:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k),\ \ k = 0, 1, \ldots, N-1; \tag{1}$$

$$y_k = g_k(x_k, v_k),\ \ k = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{2}$$

где x_k, u_k, y_k — соответственно векторы состояния, управления и измерения, $x_k \in \Re^n$, $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^q$; w_k, v_k — векторы возмущений и помех (шумов) измерений, ограниченные известными множествами Ω_k^w и Ω_k^v; f_k и g_k — функции, определяемые для каждого k-го момента квантования, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Для описания множества возможных состояний системы управления динамическим объектом воспользуемся следующим алгоритмом [11].

1. Пусть состояние системы в произвольный момент квантования k задается вектором $x_k = \{x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}\}$. Управляющее устройство получает информацию о состоянии x_k системы в виде результата измерения данного состояния, т.е. вектора y_k. Каждая координата $x_{i,k}$ состояния измеряется с индивидуальной погрешностью $v_{i,k} \in \Omega_{i,k}^v$, $i = \overline{1, n}$, где $\Omega_{i,k}^v$ — информационное множество возможных значений i-й координаты состояния системы. Пересечение множеств $\Omega_{i,k}^v$:

$$\Omega_k^v = \bigcap_i \Omega_{i,k}^v, \tag{3}$$

приводит к множеству Ω_k^v возможных состояний системы с учетом действия неопределенных помех измерений.

2. Определяется уточненное множество Ω_k^r возможных состояний системы в момент квантования k путем пересечения

$$\Omega_k^r = \Omega_k^u \bigcap \Omega_k^v, \tag{4}$$

где Ω_k^u — множество прогнозируемых состояний системы после применения рассчитанного в предыдущий $[k-1]$-й момент квантования управляющего воздействия u_{k-1}.

Если $k = 0$ (т.е. управляющее воздействие u_{k-1} не рассчитывалось и, значит, построение множества Ω_k^u не выполнялось), то $\Omega_k^r \equiv \Omega_k^v$.

3. Строится множество $\Omega^{f}_{k,k+1}$, представляющее собой прогноз возможных состояний $x^{f}_{k+1} \in \Omega^{f}_{k,k+1}$ системы в $[k+1]$-й момент, в которые она должна перейти в свободном движении во временном интервале $[k, k+1]$ из состояния $x_k \in \Omega^{r}_{k}$. Для определения этого множества $\Omega^{f}_{k,k+1}$ состояний необходимо реализовать отображение множества Ω^{r}_{k} на пространство состояний x_{k+1} с помощью следующего преобразования:

$$x^{f}_{k+1} = f_k(x_k). \tag{5}$$

4. Строится новое множество возможных состояний системы с учетом влияния внешних возмущений $w_{k,k+1}$ на значения параметров вектора x^{f}_{k+1}. Поскольку о координатах x^{f}_{k+1} известен лишь факт их принадлежности множеству $\Omega^{f}_{k,k+1}$, учет возмущений приводит к трансформации (размыванию) множества состояний $\Omega^{f}_{k,k+1}$ [11]. Если направления действий возмущений $w_{k,k+1}$ известны, то трансформация осуществляется лишь в данных направлениях. В общем случае, когда направления действий возмущений заранее неизвестны, трансформация проводится по всем возможным направлениям. Трансформация множества значений компонентов вектора ${}_j x^{f}_{k+1}$ приводит к соответствующим множествам описаний возможных состояний системы ${}_j\Omega^{w}_{k,k+1}$ в момент квантования $[k+1]$, которые формируются соответствующими векторами

$${}_j x^{f}_{k+1} = \{ {}_j x^{f}_{1,k+1}(w_{k,k+1}),\ {}_j x^{f}_{2,k+1}(w_{k,k+1}), \ldots,\ {}_j x^{f}_{n,k+1}(w_{k,k+1}) \} \in {}_j\,\Omega^{w}_{k,k+1},$$

где $j = 1, 2, \ldots$ — количество «точечных» значений возможных состояний системы.

Объединение полученных множеств ${}_j\Omega^{w}_{k,k+1}$ приводит к результирующему множеству $\Omega^{w}_{k,k+1}$ возможных состояний системы в $[k+1]$-й момент при действии помех измерений v_k и внешних возмущений $w_{k,k+1}$:

$$\Omega^{w}_{k,k+1} = \bigcup_{j} {}_j\Omega^{w}_{k,k+1}. \tag{6}$$

5. Находится значение $x^{u}_{k+1} \in \Omega^{w}_{k,k+1}$ состояния системы, которое используется для расчета управляющего воздействия u_k, минимизирующего заданный функционал качества.

6. Проводится перемещение множества $\Omega^{w}_{k,k+1}$ найденным управлением u_k. При этом формируется новое информационное множество Ω^{u}_{k+1}, представляющее собой множество возможных состояний системы, в которые она перейдет к моменту $[k+1]$ после применения управления u_k и с учетом действия возмущений $w_{k,k+1}$.

7. Осуществляется новое измерение выходных координат системы с целью уточнения ее состояния в момент квантования $[k+1]$, и строится новое уточненное множество возможных состояний Ω^{r}_{k+1}:

$$\Omega^{r}_{k+1} = \Omega^{u}_{k+1} \bigcap \Omega^{v}_{k+1}.$$

Проводится отображение множества Ω^{r}_{k+1} на пространство x_{k+2} состояний, тем самым формируется множество $\Omega^{f}_{k+1,\,k+2}$ возможных состояний в момент квантования $[k+2]$, в которые система может прийти в свободном движении, и приведенная выше процедура итерационно повторяется: осуществляется трансформация множества $\Omega^{f}_{k+1,\,k+2}$ возмущением $w_{k+1,\,k+2}$ и т.д.

При изменении моментов квантования k от 0 до $N-1$ совокупность множеств Ω^{r}_{k} формирует ансамбль траекторий системы

$$\Omega^{r} = \prod_{k=0}^{N-1} \Omega^{r}_{k}.$$

Структурная схема управления дискретной системой на основе описанной процедуры приведена на рис. 1, где r_x — вход системы, y_k — ее выход.

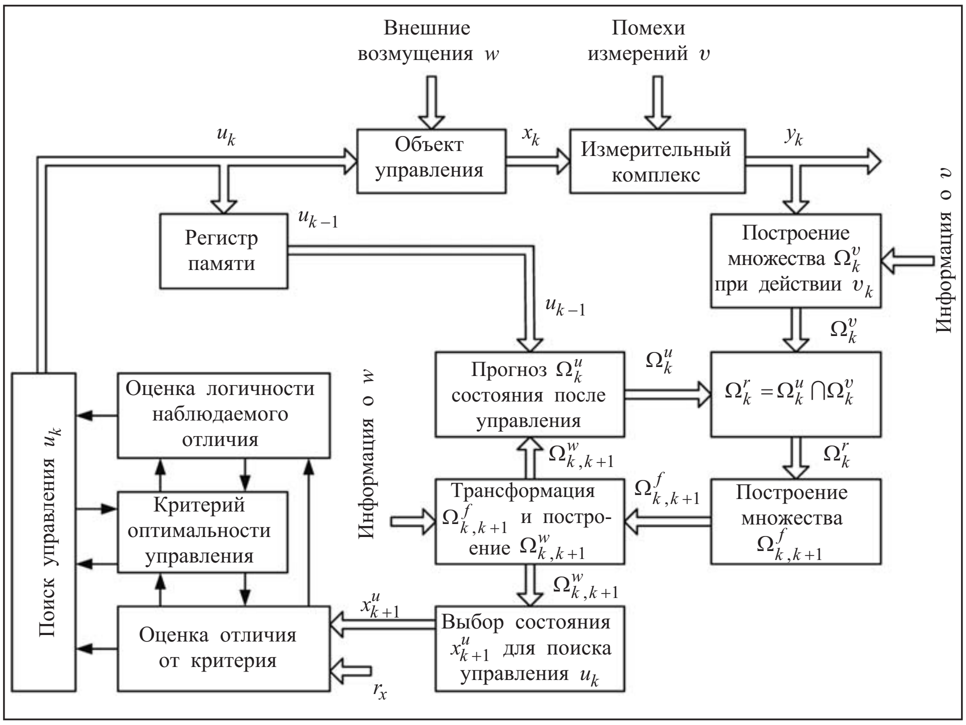

Рис. 1. Схема управления дискретной системой

Для построения системы управления согласно приведенному выше алгоритму необходимо разработать эффективную процедуру осуществления операций (3)–(6), т.е. определения эволюционирующих во времени множеств возможных состояний, а также установить наиболее вероятное фиксированное значение $x^{u}_{k+1} \in \Omega^{w}_{k,k+1}$, выбираемое для расчета управления u_k.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ

Как правило, для построения множеств возможных состояний системы управления используется аппарат линейных матричных неравенств, в то время как геометрические объекты, характеризующие состояние системы, удобнее описывать вещественными функциями. Данный подход реализуется математическими средствами теории R-функций [20]. Описание множества возможных состояний системы управления с помощью R-функций позволяет существенно уменьшить количество данных, необходимых для оценивания состояния динамической системы.

Пусть элементы, определяющие возможное состояние системы, формируют множество (геометрический объект) Ω_k, которое ограничено совокупностью соответствующих граничных элементов $\partial\Omega_k$. Описание данного геометрического объекта выполним с помощью R-функции $\varphi(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k})$, имеющей следующие свойства:

$$\varphi(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) > 0 \text{ при } (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \in \Omega_k,$$

$$\varphi(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) = 0 \text{ при } (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \in \partial\Omega_k,$$

$$\varphi(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) < 0 \text{ при } (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \notin \Omega_k \bigcup \partial\Omega_k.$$

Обозначим R-функции, описывающие множества Ω_k^v, Ω_k^u, Ω_k^r, $\Omega_{k,k+1}^f$ и $\Omega_{k,k+1}^w$ возможных состояний дискретной системы, соответственно $\varphi^v(x_k)$, $\varphi^u(x_k)$, $\varphi^r(x_k)$, $\varphi^f(x_k)$ и $\varphi^w(x_k)$. Например, множество $\Omega_{k,k+1}^w$, которое образуется как результат объединения множеств возможных состояний ${}_j\Omega_{k,k+1}^w$ (6), описывается R-функцией с использованием R-операции дизъюнкции:

$$\varphi^w(x_k) = \bigvee_R \varphi_{j,k}^w(x_k), \tag{7}$$

где

$$\varphi_j^w \bigvee_R \varphi_{j+1}^w = \varphi_j^w + \varphi_{j+1}^w + \sqrt{(\varphi_j^w)^2 + (\varphi_{j+1}^w)^2}. \tag{8}$$

Описание геометрического объекта, определяемого множеством Ω_k^r, реализуется с помощью R-функции, имеющей вид

$$\varphi^r(x_k) = \varphi^u(x_k) \bigwedge_R \varphi^v(x_k), \tag{9}$$

где $\bigwedge_R$ — R-операция конъюнкции

$$\varphi^u \bigwedge_R \varphi^v = \varphi^u + \varphi^v - \sqrt{(\varphi^u)^2 + (\varphi^v)^2}. \tag{10}$$

На рис. 2 приведены построенные с использованием R-функций эволюционирующие во времени множества Ω_k^r, $\Omega_{k,k+1}^f$ и $\Omega_{k,k+1}^w$ возможных состояний системы управления, уравнения (1), (2) динамики которой приведены к виду

$$x_{k+1} = Ax_k + B(u_k + w_k), \tag{11}$$

$$y_k = Cx_k + v_k, \tag{12}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}9882 & 0{,}2125 \\ -0{,}0893 & 0{,}7120 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0{,}0281 \\ 0{,}2125 \end{bmatrix}; \; C = [1 \;\; 0].$$

Действующие на систему внешние возмущения ограничиваются условием $|w_k| \le 0{,}3$, а помеха измерения — условием $|v_k| \le 0{,}025$. Период дискретности работы системы $T = 0{,}25$ с.

Для построения множеств (см. рис. 2) использовались зависимости (7)–(10), при этом достаточно иметь информацию о координатах вершин множеств в виде соответствующей матрицы вершин

$$V = [v_{ij}], \ i \in [1, n], \ j \in [1, M],$$

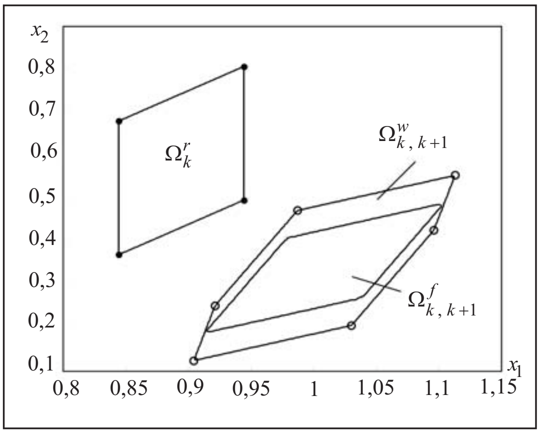

Рис. 2. Множества возможных состояний системы, построенные с помощью R-функций

где M — общее число вершин множества. В j-м столбце матрицы V расположены координаты j-й вершины.

Для описания подобных множеств с помощью аппарата линейных матричных неравенств, например, в работах [7, 11] использовалась гораздо более громоздкая структура.

На рис. 2 приведен двумерный случай, однако предложенный подход без усложнений применим для описания множеств, в том числе и невыпуклых, больших размерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Для получения точечной оценки $x_{k+1}^u \in \Omega_{k,k+1}^w$ состояния системы из информационного множества возможных состояний $\Omega_{k,k+1}^w$ используют точку, либо обеспечивающую максимум заданного функционала качества [5], либо удовлетворяющую условию минимума ошибки в наихудшем случае, т.е. чебышевский центр [14], который находится как точка x^u, максимальное удаление от которой до любой другой точки этого множества $\Omega_{k,k+1}^w$ минимально, т.е. $x^u = \min\limits_{x \in \Omega^w} \max \{\|x - y\| \mid y \in \Omega^w\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Выбор значения x^u, максимизирующего заданный функционал качества, предпочтительнее, так как функционал может учитывать не только минимум ошибки, но и затраты ресурсов на реализацию управления, а также ограничения на их величину [5]. В то же время, чем меньше объем исходной информации о действующих на систему неопределенных факторах, тем большие мощности имеют соответствующие информационные множества $\Omega_{k,k+1}^w$, что может потребовать бóльших усилий для определения оптимального управления. Таким образом, необходимо решение задачи обоснованного уменьшения мощности множества $\Omega_{k,k+1}^w$, т.е. построения множества $\Omega_{k,k+1}^* \subset \Omega_{k,k+1}^w$ с целью поиска более вероятного значения $x_{k+1}^u \in \Omega_{k,k+1}^*$.

В качестве множества $\Omega_{k,k+1}^*$ наиболее вероятных значений координат состояния системы предлагается использовать множество, представляющее совокупность точек, геометрически равноудаленных от границы $\partial\Omega_{k,k+1}^w$ множества $\Omega_{k,k+1}^w$. Процедура построения такого множества описана в [21] и основана на построении нормальной в области $\Omega^{w}_{k,k+1}$ функции $\varphi^*(x_k)$ путем установления положения рассматриваемой точки множества по отношению к ближайшей (по направлению к нормали) к ней точки границы $\partial\Omega^{w}_{k,k+1}$. На рис. 3 изображены линии уровня функции $\varphi^*(x_k)$ и множество $\Omega^{*}_{k,k+1}$, соответствующие приведенному на рис. 2 информационному множеству $\Omega^{w}_{k,k+1}$.

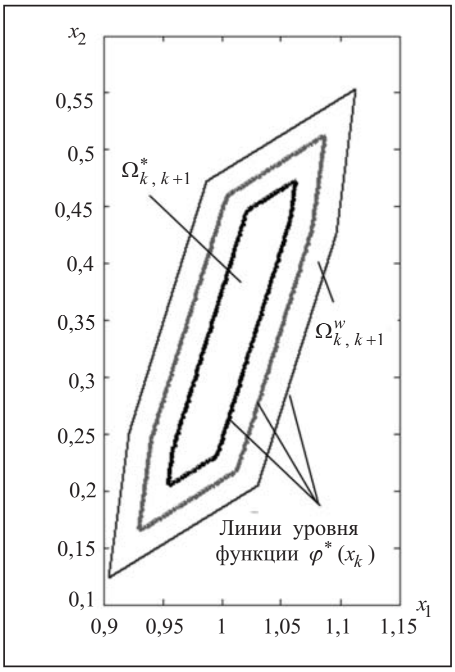

Рис. 3. Множество наиболее вероятных значений координат состояния

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Эффективность использования множества $\Omega^{*}_{k,k+1}$ наиболее вероятных значений координат состояния системы рассмотрим на примере управления объектом, описываемом уравнениями (11), (12) с указанными выше значениями соответствующих параметров. Помеха измерения лежит в интервале $|v_k| \le 0{,}025$ и подчиняется равномерному закону распределения. Для сравнения рассмотрим также результаты работы системы с аналогичными параметрами, однако без построения множества $\Omega^{*}_{k,k+1}$ [11]. Начальное отклонение системы от желаемого режима $x_0 = (0{,}5;\ 0{,}7)$. Целью управления будем считать минимизацию функции

$$J_k = V_{\max}(x_{k+1}) + 0{,}5u_k^2 \to \min,$$

где $V_{\max}(x_{k+1})$ — максимальное значение функции Ляпунова на множестве возможных состояний в момент $[k+1]$.

На рис. 4 представлены информационные множества Ω^{r}_{25} и $\widetilde{\Omega}^{r}_{25}$ при $k=25$, а также соответствующие истинные состояния x_{25} и $\widetilde{x}_{25}$, где верхний символ ~ соответствует случаю, когда информационные множества $\Omega^{*}_{k,k+1}$ не строились. Характер действия внешних возмущений w_k и управляющих воздействий u_k показан на рис. 5.

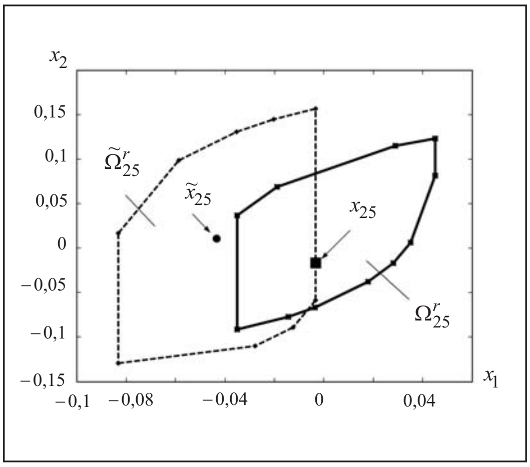

Рис. 4. Информационные множества и истинные состояния системы при использовании (Ω^r_{25}, x_{25}) и без использования ($\widetilde{\Omega}^r_{25}$, $\widetilde{x}_{25}$) информационных множеств $\Omega^*_{k,k+1}$

Представляет интерес случай, когда на систему действуют максимально возможные возмущения (см. рис. 5, моменты квантования $k=\overline{5,9}$). Тогда истинное значение

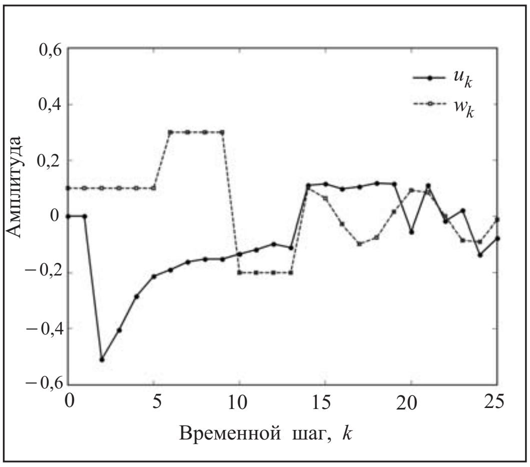

Рис. 5. Графики зависимости внешних возмущений w_k и управляющих воздействий u_k в процессе моделирования от временного шага k

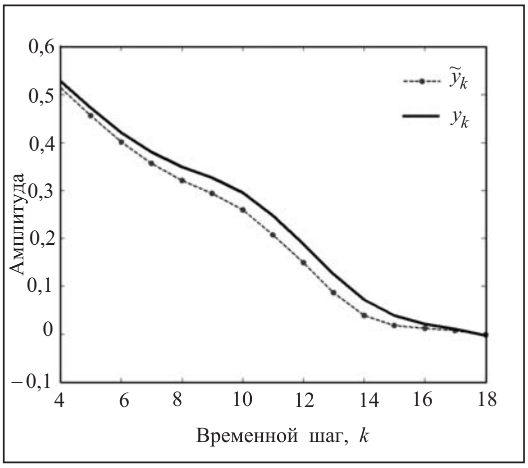

Рис. 6. Графики зависимости выходного сигнала системы при $w_k = 0{,}3$ (y_k — система, в которой множества $\Omega^*_{k,k+1}$ используются, $\widetilde{y}_k$ — эти множества не используются) от временного шага k

состояния системы может и не принадлежать информационному множеству $\Omega^*_{k,k+1}$. Поведение выходного сигнала системы в этом случае представлено на рис. 6, где хорошо видно, что выход y_k системы, в которой используются информационные множества $\Omega^*_{k,k+1}$, отклоняется от желаемого режима больше, чем выход $\widetilde{y}_k$ системы, в которой используются информационные множества $\Omega^*_{k,k+1}$, однако это отклонение достаточно быстро ликвидируется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена процедура оценивания состояния системы управления в условиях действия неконтролированных ограниченных возмущений, основанная на математических средствах теории R-функций как альтернативы линейным матричным неравенствам для построения множества возможных состояний.

Применение R-функций, особенностью которых является относительная простота и гибкость с точки зрения автоматизации программирования, позволяет описывать множества возможных состояний системы практически любой сложности и размерности.

Для приближения работы системы к оптимальному режиму движения предложено построение множества наиболее вероятных значений координат состояния системы как совокупности точек, геометрически равноудаленных от границы исходного информационного множества.

Полученные в данной статье результаты можно использовать при определении оптимального (субоптимального) управления статистически неопределенными системами.

В дальнейшем предполагается исследовать практическую эффективность данной процедуры при оценивании состояния и поиска робастного управления систем с нелинейными объектами и, следовательно, невыпуклыми информационными множествами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A t h a n s M . The role and use of the stochastic linear-quadratic-Gaussian problem in control system design // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — **16**, N 1. — P. 529–552.

2. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975. — 432 с.

3. Grewal M. S., Andrews A.P. Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. — Wiley-IEEE press, 2008 — 592 p.

4. Bertsekas D.P., Rhodes I.B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — **16**, N 2. — P. 117–128.

5. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. — К.: Наук. думка, 1985. — 248 с.

6. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. — М.: Наука, 1985. — 248 с.

7. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 5. — С. 34–41.

8. Li Yu, Qing-Long Han, Ming-Xuan Sun. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems with input constraints // Intern. J. Control, Automat., and Syst. — 2005. — **3**, N 3. — P. 397–402.

9. Fogel E., Huang F. On the value of information in system identification bounded noise case // Automatica. — 1982. — **18**, N 2. — P. 229–238.

10. Norton J.P. Identification and application of bounded-parameter models // Ibid. — 1987. — **23**, N 4. — P. 497–507.

11. Eryemenko I.F., Gurko A.G. Realization of the game approach to control of second order linear objects // J. Automat. and Inform. Sci. — 2009. — **41**, N 10. — P. 10–22.

12. Gurko A.G., Eryemenko I.F. Control of discrete system under bounded disturbances // Ibid. — 2011. — **43**, N 11. — P. 18–29.

13. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 518 с.

14. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.

15. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Физматлит, 1978. — 352 с.

16. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения: Гарантирующий подход. — М.: Наука, 1980. — 360 с.

17. Ананьев Б.И. Об информационных множествах для многошаговых статистически неопределенных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2000. — **6**, № 2. — С. 290–306.

18. Миллер Г.Б., Панков А.Р. Оптимизация управления в линейных стохастических дифференциальных системах с неопределенными параметрами возмущений // Информ. процессы. — 2006. — **6**, № 2. — С. 131–143.

19. Тимофеева Г.А. Оптимальные доверительные множества для статистически неопределенных систем // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 11. — С. 84–95.

20. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 551 с.

21. Заславский В.А., Колодяжный В.М. Функциональное и алгоритмическое описание геометрических особенностей фасонных отливок при моделировании литейных процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 161–169.

Поступила 28.11.2011