



Н.Ю. КУЗНЕЦОВ, М.А. ФЕДОТКИН

УДК 519.873

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФЛИКТНЫХ  
ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ<sup>1</sup>**

**Ключевые слова:** *конфликтные транспортные потоки, метод статистического моделирования, управление потоками.*

Теория массового обслуживания как наука отметила столетний юбилей. Если первые значимые работы относились к телефонии, то в дальнейшем круг приложений теории массового обслуживания значительно расширился. Системы и сети массового обслуживания часто используются как адекватные модели для описания функционирования реальных систем. Задача исследования и управления конфликтными транспортными потоками хорошо описывается сетью систем массового обслуживания. Существенный вклад в создание моделей и методов исследования конфликтных транспортных потоков внесла Нижегородская математическая школа [1–7]. Разработан ряд моделей, описывающих взаимодействие конфликтных транспортных потоков, поступающих на перекресток автомобильных магистралей. Модели строятся таким образом, чтобы поведение системы описывалось цепью Маркова, хотя и достаточно сложной структуры. Далее применялась эргодическая теория марковских цепей. Был предложен итеративно-мажоритарный метод (см., например, [1, 4, 6]), позволяющий устанавливать необходимые и/или достаточные условия эргодичности распределения цепи Маркова. Из последних работ в этом направлении отметим [7], в которой получено необходимое условие существования стационарного распределения цепи Маркова, описывающей функционирование тандема из двух перекрестков. В то же время распространение полученных результатов на большее количество перекрестков сталкивается с серьезными проблемами, вызванными необозримым расширением пространства состояний цепи Маркова.

Метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), возникший около 70 лет тому назад, с развитием вычислительной техники получил широкое распространение в инженерных расчетах и при моделировании процессов, происходящих в реальных системах. Исходя из сложности взаимозависимых случайных процессов, используемых для описания конфликтных потоков в сети из  $n$  перекрестков, по-видимому, метод статистического моделирования является едва ли не единственным инструментом численного исследования параметров сети.

В настоящей статье предложена модель сети из  $n$  однолинейных систем массового обслуживания. Сформулирован алгоритм статистического моделирования, позволяющий в режиме реального времени проследить за количеством требований, находящихся в очереди у каждого светофора, а также оценить сколь-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке НАН Украины (НДР от 29.03.2012 г., договор № ВК.125.15.12) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-90409\_Укр\_а, договор № НК-12-01-90409.13).

зующие средние величины соответствующих очередей. Кроме того, предложен алгоритм, позволяющий установить режимы работы светофоров, обеспечивающие устойчивость работы сети (если вообще такие режимы существуют). Данные результаты проиллюстрированы на численном примере сети из  $n = 20$  светофоров.

#### ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Предлагаемая модель не претендует на описание всех возможных ситуаций (что вряд ли возможно). Все светофоры предполагаются одного типа (некоторого разнообразия можно добиться изменением параметров). Если возникнет необходимость учесть светофоры другого типа, то это легко сделать в рамках данной модели. Обоснованием выбора этой модели служит доступность статистических данных относительно всех параметров, входящих в исходные данные. Использование имитационного моделирования позволяет отказаться от предположения об экспоненциальности времени передвижения машин между перекрестками (даже смещенное экспоненциальное распределение не вполне отвечает реальности). Потоки машин, входящие в различные узлы сети, предполагаются стационарными пуассоновскими. Возможно моделирование сети и в случае потоков более сложной структуры (нестационарные, неординарные), но возникает проблема доступности статистических данных. Предлагаемая модель сети обслуживания основывается на следующих постулатах.

1. Задается структура сети перекрестков (однолинейные системы обслуживания):

- имеется  $n$  взаимосвязанных перекрестков ( $i = 1, \dots, n$ ), на каждом из которых расположен светофор;

- каждый перекресток содержит по четыре входа/выхода ( $j = 1, 2, 3, 4$ ); их нумерация проводится по часовой стрелке; светофоры на перекрестках работают в циклическом режиме:  $1 \leftrightarrow 3$  (зеленый свет), переключение (желтый свет),  $2 \leftrightarrow 4$  (зеленый свет), переключение (желтый свет),  $1 \leftrightarrow 3$  (зеленый свет) и т.д.; в дальнейшем запись «перекресток  $(i, j)$ » означает, что речь идет о входе/выходе  $j$  перекрестка  $i$ ;

- задается коммутация перекрестков:  $(i, j) \Leftrightarrow (k, l)$ ; это означает, что поток требований с  $j$ -го выхода перекрестка  $i$  поступает на  $l$ -й вход перекрестка  $k$ ; аналогично поток требований с  $l$ -го выхода перекрестка  $k$  поступает на  $j$ -й вход перекрестка  $i$ ; иначе говоря, задано отображение на пространстве пар:  $h(i, j) = (k, l)$ ,  $h(k, l) = (i, j)$ ;

- задается множество  $I = \{(i, j)\}$  входов перекрестков, на которые извне сети поступают пуассоновские потоки требований;

- задается множество  $O = \{(i, j)\}$  выходов перекрестков, которые одновременно являются выходами из сети (поступившее на данный выход требование покидает сеть);

- в начальный момент в сети нет требований.

2. Задаются численные характеристики сети:

- для каждого  $(i, j) \in I$  задается интенсивность  $\lambda(i, j)$  входящего потока требований;

- для каждого  $i = 1, \dots, n$  задаются  $\tau_1^{(i)}$ ,  $\tau_2^{(i)}$  и  $\tau_0^{(i)}$  — соответственно продолжительности работы  $i$ -го светофора в режимах пропуска (зеленый свет) потоков  $1 \leftrightarrow 3$ ,  $2 \leftrightarrow 4$  и переключения между данными режимами (желтый свет); величины  $\tau_1^{(i)}$ ,  $\tau_2^{(i)}$  и  $\tau_0^{(i)}$  предполагаются детерминированными;

- на каждом входе  $(i, j)$  поток разделяется на три потока: левый, правый и центральный соответственно с вероятностями  $p_l(i, j)$ ,  $p_r(i, j)$  и  $p_c(i, j)$ , причем  $p_l(i, j) + p_r(i, j) + p_c(i, j) = 1$ ;

- требования правого потока проходят в режиме «зеленая стрелка», т.е. без ожидания разрешающего сигнала светофора; время обслуживания (прохождения перекрестка  $(i, j)$ ) требований данного потока имеет распределение  $F_{ij}^{(r)}(x)$ ,  $x \geq 0$ ;

- требования центрального потока обслуживаются только при разрешающем сигнале светофора; время обслуживания имеет распределение  $F_{ij}^{(c)}(x), x \geq 0$ ;
- требования левого потока обслуживаются только при разрешающем сигнале светофора; время обслуживания имеет распределение  $F_{ij}^{(l)}(x), x \geq 0$ ;
- для каждой пары связанных между собой перекрестков  $((i, j) \leftrightarrow (k, l))$  задается функция распределения  $F_{(ij),(kl)}(x), x \geq 0$ , времени прохождения требования от выхода одного из них до входа другого.

Описанная модель имеет достаточно сложную структуру, задаваемую многочисленными параметрами. Для того чтобы сделать модель более удобной для моделирования, проведем ее дискретизацию. В качестве единицы измерения выберем одну секунду. Будем считать, что все величины, относящиеся ко времени выполнения той или иной операции, являются кратными 1 с. Иначе говоря, все непрерывные случайные величины округляем до ближайшего целого. В теории статистического моделирования широко применяются два подхода: метод узловых моментов и  $\Delta t$ -метод. Первый метод более популярен. Он основан на моделировании изменений состояний системы, происходящих в моменты окончания тех или иных операций (обслуживание и поступление требования, профилактика и т.п.). Этот подход эффективнее, когда частота узловых моментов не очень велика. Вторым методом моделирует изменение состояния системы за малый промежуток времени  $\Delta t$ . Данным подходом воспользуемся для моделирования поступления требований в сеть и передвижения их между узлами. Положим  $\Delta t = 1$  с.

Целью исследования является разработка алгоритма статистического моделирования в режиме реального времени длин очередей  $\{w^{(k)}(i, j), k = 1, 2, \dots\}$  на каждом перекрестке, а также суммарного количества  $z^{(k)}$  требований, находящихся в сети (в очередях, на обслуживании, в движении между узлами сети). Параметр  $k$  означает  $k$ -ю секунду с момента начала работы сети. При этом вычисляются скользящие средние

$$W^{(k)}(i, j) = \frac{1}{L} \sum_{m=k-L+1}^k w^{(m)}(i, j), \quad Z^{(k)} = \frac{1}{L} \sum_{m=k-L+1}^k z^{(m)}, \quad k = L, L+1, \dots, \quad (1)$$

где  $L$  — заданный период усреднения. При высоких интенсивностях входящих потоков и неудачном выборе  $\{\tau_1(i), \tau_2(i)\}$  загруженность сети будет неограниченно возрастать. Нетрудно сформулировать условия, гарантирующие существование стационарного распределения числа требований в очереди к перекрестку  $(i, j) \in I$ . В то же время выполнение этих условий не означает существования стационарного распределения для внутренних перекрестков  $(i, j) \notin I$ . Сложность и взаимозависимость случайных процессов, описывающих изменение очередей внутри сети, не позволяют использовать аналитический аппарат для получения условий существования стационарных распределений для всех перекрестков  $(i, j)$ . Поэтому при фиксированных интенсивностях входящих потоков будем добиваться устойчивого функционирования сети за счет рационального выбора длительностей работы светофоров  $\{\tau_1(i), \tau_2(i)\}$  (управление сетью). Устойчивость означает, что  $\sup_k z^{(k)} < \infty$  с вероятностью единица.

#### УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕКРЕСТКОВ $(i, j) \in I$

Рассмотрим перекресток  $(i, j) \in I$ . По сути, это три независимо функционирующие однолинейные системы обслуживания, в которые поступают пуассоновские потоки требований с интенсивностями  $\lambda(i, j) p_l(i, j)$ ,  $\lambda(i, j) p_c(i, j)$  и  $\lambda(i, j) p_r(i, j)$ . Пусть  $j=1$  или  $j=3$ . В случае первых двух систем обслуживания проводится циклически: цикл состоит из собственно времени обслуживания

$\tau_1^{(i)}$  и времени простоя  $\tau_2^{(i)} + 2\tau_0^{(i)}$ . При этом на обслуживание принимаются лишь те требования, суммарная длительность обслуживания которых не превосходит  $\tau_1^{(i)}$ . Среднее количество требований, поступающих за один цикл обслуживания, равно  $\lambda(i, j) p_l(i, j) (\tau_1^{(i)} + \tau_2^{(i)} + 2\tau_0^{(i)})$  (для первой системы), а среднее число обслуженных требований —  $H_l(\tau_1^{(i)})$ , где  $H_l(t)$  — функция восстановления простого процесса восстановления, задаваемого функцией распределения  $F_{ij}^{(l)}(x)$  промежутков между восстановлениями. Поэтому условие существования стационарного распределения записывается в виде

$$\lambda(i, j) p_l(i, j) (\tau_1^{(i)} + \tau_2^{(i)} + 2\tau_0^{(i)}) < H_l(\tau_1^{(i)}), \quad (2)$$

$$\lambda(i, j) p_c(i, j) (\tau_1^{(i)} + \tau_2^{(i)} + 2\tau_0^{(i)}) < H_c(\tau_1^{(i)}), \quad (3)$$

$$\lambda(i, j) p_r(i, j) a_{ij}^{(r)} < 1 \quad (4)$$

(для третьей системы действует режим «зеленая стрелка», т.е. проводится обслуживание без прерывания; поэтому система превращается в обычную систему  $M/G/1/\infty$ ;  $a_{ij}^{(r)}$  обозначает среднее время обслуживания правого потока).

Если  $j=2$  или  $j=4$ , то неравенства (2) и (3) переписываются в виде

$$\lambda(i, j) p_l(i, j) (\tau_1^{(i)} + \tau_2^{(i)} + 2\tau_0^{(i)}) < H_l(\tau_2^{(i)}), \quad (5)$$

$$\lambda(i, j) p_c(i, j) (\tau_1^{(i)} + \tau_2^{(i)} + 2\tau_0^{(i)}) < H_c(\tau_2^{(i)}). \quad (6)$$

Если хотя бы одно из соотношений (2)–(6) не выполнено, то  $W_k(i, j) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$  и

$Z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$  по вероятности, т.е. количество требований в сети неограниченно возрастает и тогда отпадает необходимость исследования очередей на внутренних перекрестках. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что параметры сети подобраны таким образом, что соотношения (2)–(6) выполняются.

#### ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ИЗМЕНЕНИЕ СОСТОЯНИЙ СЕТИ

Введем цепь Маркова, описывающую посекундное изменение состояния сети из  $n$  перекрестков. В каждый момент времени  $k \geq 0$  состояние сети однозначно определяется совокупностью переменных:

$$v_i^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-м перекрестке горит зеленый свет в направлении } 1 \leftrightarrow 3, \\ 2, & \text{если горит желтый свет, после которого загорается зеленый} \\ & \text{в направлении } 2 \leftrightarrow 4, \\ 3, & \text{если горит зеленый свет в направлении } 2 \leftrightarrow 4, \\ 4, & \text{если горит желтый свет, после которого загорается зеленый} \\ & \text{в направлении } 1 \leftrightarrow 3, \end{cases}$$

— дискретная переменная, характеризующая состояние светофора на  $i$ -м перекрестке ( $i=1, \dots, n$ );

$\theta_i^{(k)}$  — время, оставшееся до переключения  $i$ -го светофора;

$w_l^{(k)}(i, j)$ ,  $w_c^{(k)}(i, j)$ ,  $w_r^{(k)}(i, j)$  — величины, определяющие количества требований, обслуживаемых или находящихся в очередях на перекрестке  $(i, j)$  (поворот налево, прямолинейное движение, поворот направо);

$s_l^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_l^{(k)}(i, j), s_c^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_c^{(k)}(i, j), s_r^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_r^{(k)}(i, j)$ , — длительности, требуемые на обслуживание (или для завершения обслуживания)  $m$ -го требования, находящегося в соответствующей очереди (или на обслуживании) на перекрестке  $(i, j)$ ;

$w_0^{(k)}(i, j)$  — количество требований, движущихся по направлению к перекрестку  $(i, j)$ ;

$s_0^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_0^{(k)}(i, j)$ , — время, оставшееся  $m$ -му требованию до достижения перекрестка  $(i, j)$  (после чего требование поступает в одну из трех очередей).

Введенные переменные однозначно определяют текущее состояние сети и дальнейшее ее функционирование. Поэтому

$$\begin{aligned} \zeta^{(k)} = & (v_i^{(k)}, \theta_i^{(k)}, w_l^{(k)}(i, j), w_c^{(k)}(i, j), w_r^{(k)}(i, j), s_l^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_l^{(k)}(i, j), \\ & s_c^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_c^{(k)}(i, j), s_r^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_r^{(k)}(i, j), w_0^{(k)}(i, j), \\ & s_0^{(k)}(i, j, m), m=1, \dots, w_0^{(k)}(i, j), i=1, \dots, n, j=1, \dots, 4), k \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

является цепью Маркова. Для определенности начальное состояние зададим в виде

$$v_i^{(0)} = 1, \theta_i^{(0)} = \tau_1^{(i)}, w_l^{(0)}(i, j) = 0, w_c^{(0)}(i, j) = 0, w_r^{(0)}(i, j) = 0, w_0^{(0)}(i, j) = 0, \\ i=1, \dots, n, j=1, \dots, 4.$$

Наибольший интерес представляет исследование длин очередей на каждом перекрестке,  $w^{(k)}(i, j) = w_l^{(k)}(i, j) + w_c^{(k)}(i, j) + w_r^{(k)}(i, j)$ , суммарного количества

$z^{(k)}$  требований, находящихся в сети,  $z^{(k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 [w^{(k)}(i, j) + w_0^{(k)}(i, j)]$ , а также скользящих средних, определяемых согласно (1).

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА $\{\zeta^{(k)}, k \geq 0\}$

Предположим, что состояние  $\zeta^{(k)}$  сети в момент  $k$  определяется согласно (7). Алгоритм моделирования состояния  $\zeta^{(k+1)}$  формулируется следующим образом.

1. Положим  $\delta(i, j, m) = 0, m=1, \dots, w_0^{(k)}(i, j), i=1, \dots, n, j=1, \dots, 4$ , — начальное значение индикатора того, что в момент  $k+1$  закончится обслуживание на одном из светофоров и требование с номером  $m$  начнет движение по направлению к перекрестку  $(i, j)$ .

2. Изменяем очереди на всех перекрестках  $i=1, \dots, n$ . Если  $v_i^{(k)} = 1$ , то:

- если  $w_l^{(k)}(i, 1) > 0$  и  $s_l^{(k)}(i, 1, 1) \leq \theta_i^{(k)}$ , то полагаем  $s_l^{(k+1)}(i, 1, 1) = s_l^{(k)}(i, 1, 1) - 1$ ;

- если, кроме того,  $s_l^{(k+1)}(i, 1, 1) = 0$  и  $(i, 2) \notin O$ , то полагаем  $(i_1, j_1) = h(i, 2)$ ,  $m_1 = w_0^{(k)}(i_1, j_1) + 1, \delta(i_1, j_1, m_1) = 1, w_0^{(k+1)}(i_1, j_1) = m_1$ ; в качестве  $s_0^{(k+1)}(i_1, j_1, m_1)$  выбираем реализацию случайной величины с функцией распределения  $F_{(i_2), (i_1, j_1)}(x)$ .

Аналогичные операции проводим:

- если нижний индекс 1 заменить на индекс  $c$  и пару  $(i, 2)$  — на  $(i, 3)$ ;
- если пару  $(i, 1)$  заменить на  $(i, 3)$  и пару  $(i, 2)$  — на  $(i, 4)$ ;
- если нижний индекс 1 заменить на индекс  $c$ , пару  $(i, 1)$  — на  $(i, 3)$  и пару  $(i, 2)$  — на  $(i, 1)$ .

Если  $\nu_i^{(k)} = 3$ , то:

- если  $w_l^{(k)}(i, 2) > 0$  и  $s_l^{(k)}(i, 2, 1) \leq \theta_i^{(k)}$ , то полагаем  $s_l^{(k+1)}(i, 2, 1) = s_l^{(k)}(i, 2, 1) - 1$ ;

- если, кроме того,  $s_l^{(k+1)}(i, 2, 1) = 0$  и  $(i, 3) \notin O$ , то полагаем  $(i_1, j_1) = h(i, 3)$ ,  $m_1 = w_0^{(k)}(i_1, j_1) + 1$ ,  $\delta(i_1, j_1, m_1) = 1$ ,  $w_0^{(k+1)}(i_1, j_1) = m_1$ ; в качестве  $s_0^{(k+1)}(i_1, j_1, m_1)$  выбираем реализацию случайной величины с функцией распределения  $F_{(i_3), (i_1 j_1)}(x)$ .

Аналогичные операции проводим:

- если нижний индекс  $l$  заменить на индекс  $c$  и пару  $(i, 3)$  — на  $(i, 4)$ ;
- если пару  $(i, 2)$  заменить на  $(i, 4)$  и пару  $(i, 3)$  — на  $(i, 1)$ ;
- если нижний индекс  $l$  заменить на индекс  $c$ , пару  $(i, 2)$  — на  $(i, 4)$  и пару  $(i, 3)$  — на  $(i, 2)$ .

3. Требования правого потока проходят в режиме «зеленая стрелка», т.е. не зависят от разрешающего сигнала светофора:

- если  $w_r^{(k)}(i, 1) > 0$ , то полагаем  $s_r^{(k+1)}(i, 1, 1) = s_r^{(k)}(i, 1, 1) - 1$ ;

- если, кроме того,  $s_r^{(k+1)}(i, 1, 1) = 0$  и  $(i, 4) \notin O$ , то полагаем  $(i_1, j_1) = h(i, 4)$ ,  $m_1 = w_0^{(k)}(i_1, j_1) + 1$ ,  $\delta(i_1, j_1, m_1) = 1$ ,  $w_0^{(k+1)}(i_1, j_1) = m_1$ ; в качестве  $s_0^{(k+1)}(i_1, j_1, m_1)$  выбираем реализацию случайной величины с функцией распределения  $F_{(i_4), (i_1 j_1)}(x)$ .

Аналогичные операции проводим:

- если пару  $(i, 1)$  заменить на  $(i, 2)$  и пару  $(i, 4)$  — на  $(i, 1)$ ;
- если пару  $(i, 1)$  заменить на  $(i, 3)$  и пару  $(i, 4)$  — на  $(i, 2)$ ;
- если пару  $(i, 1)$  заменить на  $(i, 4)$  и пару  $(i, 4)$  — на  $(i, 3)$ .

4. Полагаем  $\theta_i^{(k+1)} = \theta_i^{(k)} - 1$ . Если  $\theta_i^{(k+1)} = 0$ , то изменяем состояние  $i$ -го светофора:  $\nu_i^{(k+1)} = \nu_i^{(k)} + 1$ , если  $\nu_i^{(k)} \leq 3$ , и  $\nu_i^{(k+1)} = 1$ , если  $\nu_i^{(k)} = 4$ . Кроме того, полагаем:  $\theta_i^{(k+1)} = \tau_1^{(i)}$ , если  $\nu_i^{(k+1)} = 1$ ;  $\theta_i^{(k+1)} = \tau_2^{(i)}$ , если  $\nu_i^{(k+1)} = 3$ ;  $\theta_i^{(k+1)} = \tau_0^{(i)}$ , если  $\nu_i^{(k+1)} = 2$  или  $\nu_i^{(k+1)} = 4$ .

5. Изменяем время, необходимое требованию для достижения перекрестка: если  $(i, j) \notin I$  и  $\delta(i, j, m) = 0$ ,  $m = 1, \dots, w_0^{(k+1)}(i, j)$ , то полагаем  $s_0^{(k+1)}(i, j, m) = s_0^{(k)}(i, j, m) - 1$  (если  $\delta(i, j, m) = 1$ , то  $s_0^{(k+1)}(i, j, m)$  уже определено).

6. Определяем, к какой очереди присоединятся требования, поступившие на перекресток. Пусть  $(i, j) \notin I$  и  $s_0^{(k+1)}(i, j, m) = 0$ . Тогда реализуем случайную величину  $\omega$ , равномерно распределенную на  $[0, 1]$ . Если  $\omega < p_l(i, j)$ , то полагаем  $m = w_l^{(k+1)}(i, j) = w_l^{(k)}(i, j) + 1$  и в качестве  $s_l^{(k+1)}(i, j, m)$  выбираем реализацию случайной величины с функцией распределения  $F_{ij}^{(l)}(x)$ . Если  $p_l(i, j) < \omega < p_l(i, j) + p_c(i, j)$ , то полагаем  $m = w_c^{(k+1)}(i, j) = w_c^{(k)}(i, j) + 1$  и в качестве  $s_c^{(k+1)}(i, j, m)$  выбираем реализацию случайной величины с функцией распределения  $F_{ij}^{(c)}(x)$ . В противном случае полагаем  $m = w_r^{(k+1)}(i, j) = w_r^{(k)}(i, j) + 1$  и в качестве  $s_r^{(k+1)}(i, j, m)$  выбираем реализацию случайной величины с функцией распределения  $F_{ij}^{(r)}(x)$ .

7. Проводим перенумерацию всех требований с ненулевыми  $\{s_0^{(k+1)}(i, j, m)\}$ . При этом определяем новое значение  $w_0^{(k+1)}(i, j)$  и соответствующие значения  $\{s_0^{(k+1)}(i, j, m), i = 1, \dots, w_0^{(k+1)}(i, j)\}$ .

8. Проводим перенумерацию всех требований с ненулевыми  $\{s_l^{(k+1)}(i, j, m)\}$ ,  $\{s_c^{(k+1)}(i, j, m)\}$  и  $\{s_r^{(k+1)}(i, j, m)\}$ . При этом определяем новые значения  $w_l^{(k+1)}(i, j)$ ,  $w_c^{(k+1)}(i, j)$  и  $w_r^{(k+1)}(i, j)$ , а также значения длительностей обслуживания требований соответствующих потоков.

9. Моделируем количество требований, поступивших на каждый вход сети  $(i, j) \in I$ . Для этого моделируем случайную величину  $\gamma(i, j)$ , имеющую распределение Пуассона с параметром  $\lambda(i, j)$ . Аналогично шагу 6 алгоритма каждое поступившее требование с заданной вероятностью направляется в соответствующую очередь и моделируется время его обслуживания. Затем увеличиваем  $k$  на единицу и возвращаемся на шаг 1 алгоритма.

Оцениваемые характеристики являются функциями от траекторий цепи Маркова  $\{\xi^{(k)}, k \geq 0\}$ , моделирование которой проводится в течение  $K$  шагов. Управление сетью осуществляется за счет выбора продолжительностей работы светофоров  $\{\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}\}$ . Можно использовать простой критерий: если

$$w^{(k)}(i, 1) + w^{(k)}(i, 3) > N, \quad (8)$$

то увеличиваем  $\tau_1^{(i)}$  на  $r$  секунд. Аналогично, если

$$w^{(k)}(i, 2) + w^{(k)}(i, 4) > N, \quad (9)$$

то увеличиваем  $\tau_2^{(i)}$  на  $r$  секунд. При этом накладывается естественное ограничение:  $\tau_m^{(i)} \leq \tau_m^{(i)*}$  — наперед заданные значения ( $m=1, 2$ ).

#### ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим сеть, состоящую из  $n=20$  перекрестков. Перекрестки расположены в виде матрицы размером  $4 \times 5$  (нумерация производится по строчкам, например, в третьей строчке расположены перекрестки с номерами от 11 до 15). Как оговорено выше, нумерация входов/выходов проводится по часовой стрелке. Номер «1» присвоим западному направлению. Тем самым будут определены множества входов  $I$  и выходов  $O$ :  $I = O = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (5,3), (6,1), (10,3), (11,1), (15,3), (16,1), (16,4), (17,4), (18,4), (19,4), (20,3), (20,4)\}$ . Кроме того, однозначно определяется коммутация перекрестков, например,  $h(7, 2) = (2, 4)$ ,  $h(14, 3) = (15, 1)$ . Таким образом, структура сети полностью определена.

Зададим числовые характеристики, одинаковые для каждого перекрестка. Пусть  $\lambda(i, j) = 0,08 + 0,01j$ , если  $(i, j) \in I$ . Положим  $\tau_0^{(i)} = 3$  и зададим начальные (изменяемые в дальнейшем) значения  $\tau_1^{(i)} = 20$ ,  $\tau_2^{(i)} = 20$ . Вероятности расщепления входящего на перекресток  $(i, j)$  потока зададим так:  $p_l(i, j) = 0,2$ ,  $p_c(i, j) = 0,6$  и  $p_r(i, j) = 0,2$ . В качестве распределений  $F_{ij}^{(l)}(x)$ ,  $F_{ij}^{(c)}(x)$ ,  $F_{ij}^{(r)}(x)$  и  $F_{(ij),(kl)}(x)$  выберем усеченные нормальные распределения соответственно с параметрами  $a_l(i, j) = 8$ ,  $\sigma_l^2(i, j) = 0,64$ ,  $a_c(i, j) = 6$ ,  $\sigma_c^2(i, j) = 0,36$ ,  $a_r(i, j) = 4$ ,  $\sigma_r^2(i, j) = 0,16$  и  $b(i, j; k, l) = 60$ ,  $d^2(i, j; k, l) = 36$  (условием усечения нормально распределенных случайных величин является их положительность).

Предположим, что зеленый (соответственно красный) цвет светофора не может гореть дольше 60 с, т.е.  $\tau_1^{(i)*} = \tau_2^{(i)*} = 60$ . Пусть  $N = 50$ ,  $r = 5$  (изменение значений  $\tau_1^{(i)}$ ,  $\tau_2^{(i)}$  происходит в случае, когда количество требований в соответствующих очередях превысило 50; соотношения (8) и (9) используем в случае, когда  $k$  кратно 1000).

В качестве основной исследуемой характеристики выберем  $Z^{(k)}$  — скользящее среднее количество требований в системе (см. (1)), при параметре усредне-

ния  $L = 1000$ . На рис. 1 приведен график изменения  $Z^{(k)}$ ,  $k = 4000 m$ ,  $m = 1, \dots, 20$ , под воздействием изменения  $\{\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}\}$  согласно правилам (8), (9).

Вначале наблюдается рост количества требований в системе (до  $Z^{(k)} = 1562$  при  $k = 24\,000$ ), затем увеличение значений  $\{\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}\}$  приводит к уменьшению  $Z^{(k)}$  и стабилизации их значений при  $k \geq 56\,000$  (т.е. обоснованно можно говорить о существовании стационарного распределения). При этом были получены значения  $\{\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}\}$ , представленные в табл. 1. Если принять данные значения в качестве начальных (и в дальнейшем их не менять), то получим график изменения  $Z^{(k)}$ , представленный на рис. 2.

**Таблица 1**

Длительность режимов	Продолжительность работы светофоров (с) при $i$																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\tau_1^{(i)}$	30	25	35	40	45	25	30	35	55	35	50	40	45	60	50	60	55	45	55	45
$\tau_2^{(i)}$	25	25	35	45	45	25	30	35	55	35	60	40	45	60	55	60	60	50	60	45

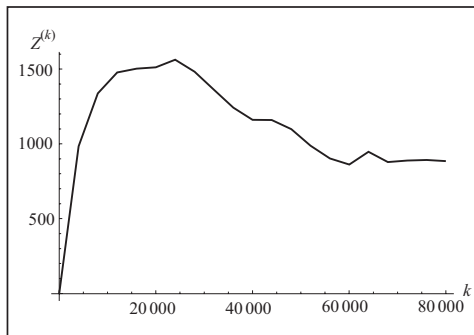


Рис. 1

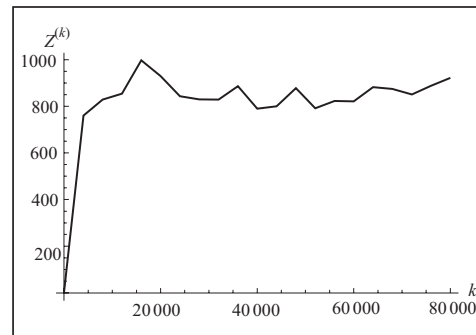


Рис. 2

Приведенный график показывает, что рациональный выбор  $\{\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}\}$  позволил добиться стационарного режима работы сети, т.е. метод статистического моделирования может быть эффективно использован для выявления наиболее «узких» мест сети и нахождения значений параметров (если таковые существуют), обеспечивающих входение сети в стационарный режим.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоткин М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1996. — С. 51–70.
2. Литвак Н. В., Федоткин М. А. Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 5. — С. 67–76.
3. Семенов В. В. Математическое моделирование транспортного потока на нерегулируемом пересечении // Мат. моделирование. — 2008. — **20**, № 10. — С. 14–22.
4. Федоткин М. А., Федоткин А. М. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 92–108.
5. Федоткин М. А., Федоткин А. М. Изучение свойств потока Гнеденко–Коваленко // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. — 2008. — № 6. — С. 156–160.
6. Zogin A. V. Stability of a tandem of queueing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers // Theory of Probab. and Math. Statist. — 2012. — P. 173–188.
7. Зорин А. В. Стохастическая модель сообщающихся систем массового обслуживания с повторными вызовами и циклическим управлением в случайной среде // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 6. — С. 100–109.

Поступила 28.03.2012