УДК 519.217; 519.718; 519.837

В.К. ЯСИНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И ВНЕШНИМИ МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Аннотация. Получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости в целом в разных интерпретациях вторым методом Ляпунова–Красовского стохастической диффузионной динамической системы Ито с конечным последействием случайной структуры с марковскими переключениями.

Ключевые слова: динамическая система случайной структуры, система с последействием, марковские переключения.

ВВЕДЕНИЕ

В современной математической науке чрезвычайно важное место принадлежит проблеме исследований математической модели управления динамических систем как детерминированных (неслучайных), так и стохастических (случайных). Создание качественной теории, в свою очередь, невозможно без фундаментального исследования устойчивости таких управляемых систем. Качественная теория устойчивости стала реальным инструментом при ответе на вопрос об устойчивости или неустойчивости решений исследованной системы, асимптотической устойчивости или неустойчивости и изучении проблемы устойчивости в целом. Этому посвящены монографии Ляпунова А.Н., Красовского Н.Н., Малкина И.Г. [9], Меркина Д.Р. [10] и многих других [1–4, 15, 20–26]. Влияние марковских возмущений на устойчивость импульсной динамической системы рассматривается в монографиях Королюка В.С. [23], Скорохода А.В. [13, 14], Кореневского Д.Г. [16], Хасьминского Р.З. [11], Каца И.Я. [12], Царькова Е.Ф. [5, 7, 17], Шуренкова В.М. [25] и многих других.

В настоящей статье исследуется устойчивость стохастических диффузионных динамических систем по первому приближению, когда исходная система является линейной стохастической динамической системой. При исследовании используется второй метод Ляпунова.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \Im, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, $\mathbf{F} \equiv \{\Im_t, t \ge 0\}$, $\Im_t \subset \Im$, рассматривается диффузионная система случайной структуры (ДССС) с последействием

$$dx(t) = [a_0(t, x_t, \xi(t)) + a_1(t, x_t, \xi(t))]dt +$$
$$+ b_0(t, x_t, \xi(t))dw_0(t) + b_1(t, x_t, \xi(t))dw_1(t), \tag{1}$$

с внешними марковскими переключениями

$$\Delta x(t)|_{t_k} = g_0(t_k, x_{t_k -}, \xi(t_k -), \eta_k) + g_1(t_k, x_{t_k -}, \xi(t_k -), \eta_k) \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$x_{t_0} = \varphi \in \mathbf{D}_m, \ \xi(t_0) = y, \ \eta_{k_0} = h. \tag{3}$$

Здесь $x(t) \equiv x(t, \omega)$: $[0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^m$; $x_t \equiv \{x(t+\theta), \ \theta \in [-\tau, 0]\} \in \mathbf{D}_m$, $\tau > 0$; a_i: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}^m$; b_i: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}^m$; g_i: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}^m$,

$i = 0, 1,$ — отображения, измеримые по совокупности переменных, которые удовлетворяют глобальному условию Липшица типа

$$|a_i(t, x_t^{(1)}, y) - a_i(t, x_t^{(2)}, y)| + |b_i(t, x_t^{(1)}, y) - b_i(t, x_t^{(2)}, y)| +$$
$$+|g_i(t, x_t^{(1)}, y, h) - g_i(t, x_t^{(2)}, y, h)| \le L \| x_t^{(1)} - x_t^{(2)} \| \quad (4)$$

и условию равномерной ограниченности по t типа

$$|a_i(t, 0, y)| + |b_i(t, 0, y)| + |g_i(t, 0, y, h)| \le c < \infty, \ t \ge 0, \ y \in \mathbf{Y}, \ h \in \mathbf{H}, \ i = 0,1;$$

$\mathbf{D}_m \equiv \mathbf{D}_m([-\tau, 0], \mathbf{R}^m)$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, имеющих левосторонние пределы [13]; $w_i(t) = w_i(t, \omega)$, $i = 0, 1$, — одномерные нормированные винеровские процессы [1–4]; далее $t_0 = 0$.

Всюду ниже будем исследовать устойчивость в различных трактовках, в которых рассматривается тривиальное решение (1)–(3), т.е. выполняется условие

$$a_i(t, 0, y) = 0; \ b_i(t, 0, y) = 0; \ g_i(t, 0, y, h) = 0, \ i = 0,1.$$

Определение 1. Диффузионную систему случайной структуры с последействием

$$d\bar{x}(t) = a_0(t, \bar{x}_t, \xi(t))\,dt + b_0(t, \bar{x}_t, \xi(t))\,dw_0(t), \quad (5)$$

$$\Delta \bar{x}(t)|_{t_k} = g_0(t_k, \bar{x}_{t_k -}, \xi(t_k -), \eta_k) \quad (6)$$

с начальными условиями (3) назовем системой первого приближения для системы (1)–(3).

Для анализа устойчивости ДССС (1)–(3) можно использовать функционалы Ляпунова–Красовского для (5), (6) с начальными условиями (3), вычислить дискретный оператор Ляпунова для ДССС (1)–(3), получить достаточные условия устойчивости этой системы в том или ином вероятностном понимании [5–7, 12, 26].

Этот метод [5] называется исследованием устойчивости по первому приближению [11–18]. Наиболее часто в качестве системы первого приближения (5), (6) выступает линейная система. В этом случае считаем устойчивость по линейному приближению. Возможно, что системой первого приближения является детерминированная система, т.е. a_0, b_0 и g_0 в (5), (6) не зависят от $\xi(t)$ и η_k. Тогда имеем устойчивость относительно детерминированного приближения [8–10].

Естественно полагать, что в случае стохастических диффузионных динамических систем случайной структуры с внешними марковскими переключениями должны появляться системы первого приближения иного вида [20, 21].

Будем предполагать, что внешние марковские переключения приводят к разрыву гладких решений дифференциального уравнения [22, 23]. Исходя из этого следует выполнение равенства

$$a_1(t, x, y) = b_1(t, x, y) = 0; \ g_0(t, x, y, h) = 0. \quad (7)$$

В некоторых случаях [11–13]

$$a_0(t, x, y) = b_0(t, x, y) = 0; \ g_1(t, x, y, h) = 0. \quad (8)$$

Здесь можно предполагать, что исходным объектом (системой первого приближения) есть разностное уравнение вида

$$x_{k+1} = x_k + g_0(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_k), \ k \ge 0. \quad (9)$$

Если для анализа устойчивости системы (9) в случае (8) (или (7)) применять дискретный оператор Ляпунова [5, 11], то для анализа устойчивости системы первого приближения вида (1), как правило, используют производную в силу решений системы [19]. Поэтому докажем некоторые теоремы второго метода Ляпунова, которые будем использовать как производную в силу решений системы (5), так и как разность относительно решений системы (9).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Как и ранее, предположим, что коэффициенты уравнений (1), (2), (5), (6) удовлетворяют условиям Липшица и равномерной ограниченности, а также условиям измеримости по совокупности переменных.

Пусть $U(t, x_t, y, h)$ — такая скалярная неотрицательная функция, когда последовательность

$$\{v_k(x_t, y, h) \equiv U(t_k, x_t, y, h),\ k \in N\} \tag{10}$$

является функционалом Ляпунова–Красовского [17, 18]. Для дискретного оператора Ляпунова, а именно

$$(lv_k)(x_t, y, h) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbf{R}^m} \mathbf{P}_k(x_t, y, h)(du \times dz \times dl) v_{k+1}(u, z, l) - v_k(x_t, y, h),$$

в силу решений системы (1)–(3) сохраним обозначение l, а для дискретного оператора Ляпунова на решениях (5), (6) введем обозначение l_0. Введем также необходимые ограничения и обозначения, связанные с марковским процессом $\xi(t)$. Используя результаты Е.Б. Дынкина [2], определим C-инфинитезимальный оператор $\widetilde{\mathcal{L}}$:

$$(\widetilde{\mathcal{L}} U)(y) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\mathbf{E}_y \{U(\xi(t))\} - U(y)], \tag{11}$$

где $U \in \mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset C(\mathbf{Y})$. Сохраним это обозначение для продолжения $\widetilde{\mathcal{L}}$ в пространстве непрерывных, но не обязательно ограниченных отображений $\mathbf{Y} \to \mathbf{R}$.

Предположим далее, что марковский процесс $\xi(t)$ не зависит от цепи Маркова $\{\eta_k\}$. Пусть функционал $U(t, x_t, y, h)$ — непрерывен по совокупности переменных, непрерывно дифференцируем по t и является неотрицательным функционалом. Можно доказать [2], что пара $(\xi(t), x_t)$, где $x(t)$ — сильное решение уравнения первого приближения, заданного как ДССС, представляет собой феллеровский марковский процесс, и ввести оператор

$$(\mathbf{Q}U)(t, x_t, y, h) \equiv \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} [\mathbf{E}^{(t)}_{x,y} \{U(t+\tau+\theta, x(t+\tau), \xi(t+\tau), h)\} - U(t, x_t, y, h)], \tag{12}$$

где индексы при математическом ожидании обозначают условия $y = \xi(t)$, $x = x_t$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Естественно считать, что определенный выше функционал $U(t, x_t, y, h)$ лежит в области определения оператора $\mathbf{Q}(U \in \mathbf{D}(\mathbf{Q}))$, если предел (12) существует в смысле равномерной сходимости в некоторой окрестности точки (x_t, y) равномерно по $h \in \mathbf{H}$.

Далее введем оператор Ляпунова $\mathcal{L}_0$, который связан с внешними марковскими переключениями (6) в момент времени $t_k, k \in N$, и действует на последовательность функционалов $U(t_k, x_t, y, h)$ в силу системы (5), (6), а именно

$$(\mathcal{L}_0 U)(t_k, x_t, y, h) = \int\limits_{\mathbf{H}} U(t_k, x + g_0(t_k, x_t, y, h), y, h) \overline{\mathbf{P}}_k(h, dz) - U(t_k, x_t, y, h). \tag{13}$$

Вычислим оператор $(\mathbf{Q}U)(t, x_t, y, h)$ по определению (12) на решениях системы (5), зависящей от параметра — марковского процесса $\xi(t)$, с учетом внешних марковских переключений $\{\eta_k\}$, $k \in N$, вида (6).

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть система случайной структуры задана ДССС первым приближением (5), (6) для $t \geq t_0$, где $x(t) \in \mathbf{R}^m$, $\xi(t)$ — простая цепь Маркова с конечным числом состояний $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и заданными вероятностями перехода

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=y_j \,/\, y(s)=y_i\}=q_{ij}(t-s)+o(t-s), \tag{14}$$

$$\mathbf{P}\{\xi(l)=y_i,\ s\le l\le t \,/\, y(s)=y_i\}=1-q_i(t-s)+o(t-s). \tag{15}$$

В момент τ изменения структуры $y_i \to y_j$ параметра $\xi(t)$ системы (5) происходит случайное скачкообразное изменение фазового вектора $x(\tau-0)=x$, $x(\tau)=z$, для которого задана условная плотность $p_{ij}(\tau, z/x)$, а именно

$$\mathbf{P}\{x(\tau)\in[z, z+dz]/x(\tau-0)=x\}=p_{ij}(\tau, z/x)dz+o(dz). \tag{16}$$

Вычислим оператор $\mathbf{Q}_0 U$ на решениях системы (5), (6).

Теорема 1. Пусть марковская цепь $\xi(t)\in\mathbf{Y}\equiv\{y_1, y_2,\dots, y_k\}$, для которой выполняются условия (14), (15), не зависит от внешних марковских переключений $\{\eta_k\}$, $k\in N$. Тогда оператор $(\mathbf{Q}_0 U)$ на решениях системы первого приближения (5), (6) от функционала $U(t, x_t, \xi(t), \eta_k)$ вычисляется по формуле

$$(\mathbf{Q}_0 U)(t,x_t, y,h)=(\mathcal{L}_t U)(t,x_t, y,h)+(\mathcal{L}_x U)(t,x_t, y,h)+$$
$$+(\widetilde{\mathcal{L}}_y U)(t,x_t, y,h)+(\mathcal{L}_0 U)(t,x_t, y,h). \tag{17}$$

Здесь

$$(\mathcal{L}_t U)(t,x_t, y,h)=\frac{\partial U(t,x_t, y,h)}{\partial t}, \tag{18}$$

$$(\mathcal{L}_x U)(t,x_t, y,h)=(\nabla_x U(t,x_t, y,h), a_0(t,x_t, y,h))+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx}U(t,x_t, y,h), b_0(t,x_t, y,h), b_0^T(t,x_t, y,h)), \tag{18$'$}$$

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_y U)(t,x_t, y,h)=\sum_{j\ne i}^{k}\left[\int_{\mathbf{R}^m} U(t,x_t, y_j,h)p_{ij}(t, z/x)dz-U(t,x_t, y_i,h)\right]q_{ij}, \tag{19}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, $(\nabla U)\equiv\left(\frac{\partial U}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial U}{\partial x_m}\right)^T$ — производная Фреше [2], $\nabla^2_{xx}U\equiv\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]_{i,\,j=1}^{m}$, Sp — след матрицы, $(\mathcal{L}_0 U)(t,x_t, y,h)$ вычисляется по формуле (13), $\mathcal{L}_0 U$ вычисляется согласно (13).

Доказательство. В силу линейности оператора $(\mathbf{Q}_0 U)(t,x_t, y,h)$ по определению (11) имеем его изображение в виде суммы четырех операторов (см. (17)). Докажем формулы (18′), (19) для вычисления операторов $(\mathcal{L}_x U)(t,x_t, y,h)$ и $(\widetilde{\mathcal{L}}_y U)(t,x_t, y,h)$.

Упростим задачу, исключив из рассмотрения внешнее марковское переключение (16), и обозначим начальные условия $x_t=\varphi$, $\xi(t)=y_i$. Рассмотрим полную группу несовместных событий (гипотез) для каждого $i=\overline{1,k}$. Обозначим H_i событие, при котором на интервале времени $(t, t+\Delta t]$ структура системы (15) не изменится, т.е. $\xi(\tau)=y_i$ при $(t, t+\Delta t)$. Тогда с точностью до $o(\Delta t)$ имеем

$$\mathbf{P}(H_{ij})=1-q_{ij}\Delta t. \tag{20}$$

Далее обозначим H_{ij} событие, при которой на интервале времени $(t, t+\Delta t]$ происходит изменение структуры $y_i\to y_j\ne y_i$. Тогда с точностью до $o(\Delta t)$ получим

$$\mathbf{P}(H_{ij})=q_{ij}\Delta t. \tag{21}$$

Пусть $\Delta U \equiv U(t+\Delta t,\ x(t+\Delta t+\theta), \xi(t+\Delta t),\ h) - U(t, x_t,\ y_i, h)$, вычислим изменения $\Delta_i U \equiv \Delta_{H_i} U$, $\Delta_{ij} U \equiv \Delta_{H_{ij}} U$ функции U при наступлении событий H_i, H_{ij}, $j \neq i$, пренебрегая слагаемыми порядка $o(\Delta t)$:

$$\Delta_i U = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (\nabla_x U, a_0(t, x_t, y, h)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U b_0(t, x_t, y, h),\ b_0^T(t, x_t, y, h))\right]\Delta t + o(\Delta t). \tag{22}$$

Все частные производные вычислены в точке (t, x_t, y_i, h), где $x(s)$ — решение уравнения (5) с начальными условиями $x_t = \varphi$, $\xi(t) = y_i$, $s > t \geq t_0 > 0$ (внешние марковские переключения здесь не учтены).

В случае изменения структуры $y_i \to y_j$ на интервале времени $(t, t+\Delta t]$ будем иметь приращение

$$\Delta_{ij} U = U((t+\Delta t), x_t,\ y_j, h) - U(t, x_t,\ y_i, h). \tag{23}$$

Отметим, что в (23) исключены слагаемые, связанные с возможностью изменения структуры при $\tau \in [t, t+\Delta]$ и с непрерывным изменением $x(t)$ на интервале $(t, t+\Delta t]$, причем все эти слагаемые имеют высший порядок малости относительно $o(\Delta t)$. Поэтому после усреднения эти слагаемые с учетом

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_j \,/\, \xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = y_i,\ \ t < \tau < t+\Delta t \,/\, \xi(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t)$$

будут иметь порядок $o(\Delta t)$ и, следовательно, в результате предельного перехода (11) они преобразуются в нуль.

Для вычисления $\mathbf{E}\{\Delta U \,/\, \xi(t) = x_t,\ y_i, h = \varphi\}$ воспользуемся формулой повторного условного математического ожидания

$$\mathbf{E}\{\Delta U \,/\, x_t = \varphi, y_i, h\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\Delta U \,/\, x_t = \varphi, y_i, h\} \,/\, x(t+\Delta t+\theta) = \psi\}, \tag{24}$$

где внешнее математическое ожидание в правой части (24) выполняется по переменной $\psi, \varphi \in \mathbf{D}_m$.

С учетом равенств

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_j \,/\, \xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = y_i,\ \ t < \tau < t+\Delta t \,/\, \xi(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t)$$

и приращения (23) получим с точностью до $o(\Delta t)$ условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}\{\Delta U \,/\, x_t = \varphi, y_i, h\} = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (\nabla_x U, a_0(t, x_t, y, h)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U b_0(t, x_t, y, h),\ b_0^{\mathrm{T}}(t, x_t, y, h))\right](1 - q_i \Delta t)\Delta t +$$

$$+ \sum_{j \neq i}^{k} \left[\int_{\mathbf{R}^m} U(t, x_t, y_j, h) p_{ij}(t, z / x) dz - U(t, x_t, y_i, h)\right] q_{ij}\Delta t + o(\Delta t). \tag{25}$$

При вычислении третьего слагаемого в (25) используем свойство приращения винеровского процесса исчисления ковариации [3]. Выполнив деление на Δt в (25), перейдем к пределу при $\Delta t \to 0+$ и получим первое слагаемое $\mathcal{L}_t U$, второе $\mathcal{L}_x U$ и третье слагаемое $\mathcal{L}_y U$ в формуле (17). Вычисление четвертого слагаемого $\mathcal{L}_0 U$ можно найти в [5, с. 164]. Теорема 1 доказана. ■

Замечание 1. Пусть предел (11) вычислен в силу (1)–(3):

$$(\mathbf{Q}_1 U)(t, x_t, y, h) = \mathbf{Q}_0 U(t, x_t, y, h) + \mathcal{L}_1 U(t_k, x_t, y, h) +$$
$$+(\nabla_x U(t, x_t, y, h), a_1(t, x_t, y, h)) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U(t, x_t, y, h) b_1(t, x_t, y, h),\ b_1^{\mathrm{T}}(t, x_t, y, h)), \qquad (26)$$

где $\mathcal{L}_1 U(t_k, x_t, y, h)$ вычисляется по правилу (22), при этом вместо g_0 выступает g_1.

Рассмотрим случай изменения внутренней структуры системы (1) под действием внешних марковских переключений (6).

Случай 2. Пусть в момент изменения структуры $y_i \to y_j$ фазовый вектор изменяется по детерминированному закону $x(\tau) = \varphi_{ij}(x(\tau - 0))$, $i \neq j$, согласно которому задана условная плотность $p_{ij}(\tau, z / x)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда оператор $\mathbf{Q}_0 U(t, x_t, y, h)$ вычисляется по формуле

$$(\mathbf{Q}_0 U)(t, x_t, y, h) = \frac{\partial U(t, x_t, y, h)}{\partial t} + (\nabla_x U(t, x_t, y, h), a_0(t, x_t, y, h)) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U(t, x_t, y, h) b_0(t, x_t, y, h),\ b_0^{\mathrm{T}}(t, x_t, y, h)) +$$
$$+\sum_{j \neq i}^{k} [U(t, \varphi_{ij}(x), y_j, h) - U(t, x_t, y_i, h)] q_{ij}. \qquad (27)$$

Доказательство осуществляется по схеме доказательства теоремы 1.

Замечание 2. Пусть предел (11) вычисляется согласно уравнениям (1)–(3). Тогда оператор $\mathbf{Q}_1 U(t, x_t, y, h)$ следует вычислять по формуле

$$(\mathbf{Q}_1 U)(t, x_t, y, h) = \mathbf{Q}_0 U(t, x_t, y, h) + (\nabla_x U(t, x_t, y, h), a_1(t, x_t, y, h)) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U(t, x_t, y, h) b_1(t, x_t, y, h),\ b_1^{\mathrm{T}}(t, x_t, y, h)) + \mathcal{L}_1 U(t_k, x_t, y, h). \qquad (28)$$

Здесь $\mathcal{L}_1 U$ вычисляется по правилу (13), где вместо g_0 следует использовать g_1.

Случай 3. Если в моменты изменения структуры $y_i \to y_j$ фазовый вектор $x(\tau - 0) = x(\tau) = x$ изменяется непрерывно, то формула (27) упрощается.

Следствие 1. В условиях теоремы 1

$$(\mathbf{Q}_1 U)(t, x_t, y, h) = \frac{\partial U(t, x_t, y, h)}{\partial t} + (\nabla_x U(t, x_t, y, h), a_0(t, x_t, y, h)) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U(t, x_t, y, h) b_0(t, x_t, y, h),\ b_0^{\mathrm{T}}(t, x_t, y, h)) +$$
$$+\sum_{j \neq i}^{k} [U(t, x_t, y_j, h) - U(t, x_t, y_i, h)] q_{ij} + (\nabla_x U(t, x_t, y, h), a_1(t, x_t, y, h)) + \qquad (29)$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2_{xx} U(t, x_t, y, h) b_1(t, x_t, y, h),\ b^{\mathrm{T}}(t, x_t, y, h)) + \mathcal{L}_0 U(t, x_t, y, h) + \mathcal{L}_1 U(t, x_t, y, h),$$

где $\mathcal{L}_0 U$ и $\mathcal{L}_1 U$ в силу (1)–(3) действуют по правилу (13).

Случай 4. Если при более сложных конструкциях марковского процесса, т.е. когда $\xi(t) \in [\eta_1, \eta_2]$ — сугубо разрывной марковский процесс, допускающий распределение вероятностей

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t)\in[\beta,\beta+\Delta\beta]/\,\xi(t)=\alpha\neq\beta\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau)=\alpha,\;\; t<\tau<t+\Delta t\,/\,\xi(t)=\alpha\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t)\,,$$

а в моменты скачка $\xi(t)$ фазовый вектор меняется непрерывно, то оператор $(\mathbf{Q}_0 U)(t,x_t,y,h)$ примет вид

$$(\mathbf{Q}_0 U)(t,x_t,y,h)=(\mathcal{L}_t U)(t,x_t,y,h)+(\mathcal{L}_x U)(t,x_t,y,h)+$$
$$+(\mathcal{L}_0 U)(t,x_t,y,h)+\int\limits_{[\eta_1,\eta_2]}\big[v(t,x_t,\beta,h)-v(t,x_t,\alpha,h)\big]\rho(t,\alpha,\beta)d\beta\,, \qquad (30)$$

где $\mathcal{L}_t U$, $\mathcal{L}_x U$, $\mathcal{L}_0 U$ соответственно вычисляется по формулам (18), (18′), (13).

Случай 5. Формула $\mathbf{Q}_0 U$ в точке (t,x_t,y,h) для системы (5), (6), когда $\xi(t)$ является решением обобщенного стохастического СДУ Ито–Скорохода с интегралом по пуассоновой случайной мере, имеет более сложный вид даже без учета внешних марковских переключений (см. [18, с. 54–56]).

3. УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Стохастическое дифференциальное уравнение (1)–(3), вероятностные характеристики марковского процесса $\xi(t)$, а также условие скачка фазового вектора $x(t)$ в моменты скачкообразного изменения структуры системы определяют марковский процесс $\{x(t),\xi(t)\}$ с непрерывными справа реализациями. Для таких систем сформулируем достаточные условия устойчивости по вероятности в целом.

Теорема 3. Пусть на вероятностном базисе $(\Omega,\mathfrak{I},\mathbf{F},\mathbf{P})$ рассматривается ДССС (1)–(3) и выполняются следующие условия:

1) a_i, b_i, g_i, $i=0,1$, удовлетворяют условиям Липшица по второму аргументу при всех $t\in\mathbf{R}_+$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$ и равномерной ограниченности по t при всех $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $x\in\mathbf{R}^m$;

2) марковский процесс стохастически непрерывен;

3) существует неотрицательный функционал $U\in D(\mathbf{Q}_0)$ такой, что:

а) $$\bar{u}(r)\equiv\inf_{\substack{t\geq 0,\ y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H},\ |x|\geq r}} U(t,x_t,y,h)\to\infty \text{ при } r\to\infty; \qquad (31)$$

б) $$\underline{u}(r)\equiv\sup_{\substack{t\geq 0,\ y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H},\ |x|\leq r}} U(t,x_t,y,h)\to 0 \text{ при } r\to 0\,; \qquad (32)$$

в) $$(\mathbf{Q}_0 U)(t,x_t,y,h)\leq 0\,; \qquad (33)$$

г) $$(\mathcal{L}_0 U)(t,x_t,y,h)\leq 0\,; \qquad (34)$$

4) $$\sup_{k\in N}|t_{k+1}-t_k|=\Delta<\infty$$

при всех $t\geq 0$, $t_k\in S$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $x_t\in\mathbf{D}_m$. Тогда система (1)–(3) является устойчивой по вероятности в целом.

Доказательство. Согласно (31), (32) последовательность $\{v_k(x_t,y,h)\equiv \equiv U(t_k,x_t,y,h)\}$, $k\in N$, образует последовательность функционалов Ляпунова–Красовского. Поэтому достаточно получить неравенство

$$(\mathcal{L}_0 v_k)(x_t,y,h)\leq 0$$

при всех $k \in N$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x_t \in \mathbf{D}_m$. По определению инфинитезимального оператора марковского процесса $\{\xi(t), \bar{x}_t\}$ и по формуле Дынкина [2] имеем

$$\mathbf{E}_{x,y}^{(t_k)} U(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), h) = U(t_k, \bar{x}_t, y, h) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{E}^{(t_k)} \{(\mathbf{Q}_0 U)(\tau, \bar{x}_\tau, \xi(\tau), h)\} d\tau .$$

Поэтому из (33) получим

$$\mathbf{E}_{x,y}^{(t_k)} U(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), h) \le U(t_k, \bar{x}_t, y, h) \tag{35}$$

при всех $k \in N$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x_t \in \mathbf{D}_m$.

Учитывая предположение о стохастической непрерывности марковского процесса $\xi(t)$ при вычислении условных математических ожиданий для любого детерминированного $t \in R_+$, можно вместо $\xi(t)$ подставить $\xi(t-)$. Этим воспользуемся при вычислении $\mathcal{L}_0 v_k$, а именно

$$(\mathcal{L}_0 v_k)(\bar{x}_t, y, h) = \mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})\} -$$

$$-U(t_k, \bar{x}_t, y, h) = [\mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}) +$$

$$+g_0(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}\} - |\mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta)\} +$$

$$+[\mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), h) - U(t_k, \bar{x}_t, y, h)\}]. \tag{36}$$

Согласно (35) второе слагаемое в (36) неположительное. При оценке первого слагаемого берем сначала условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_{t_{k+1}-}$, воспользуемся $\mathcal{F}_{t_{k+1}-}$-измеримостью случайных величин $\xi(t_{k+1}-)$ и $\bar{x}(t_{k+1}-)$. Итак, согласно условию (34) получим $(\mathcal{L}_0 v_k)(x, y, h) \le 0$, что и доказывает устойчивость решения исходной системы (1)–(3). Теорема 3 доказана. ■

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и существует такое число $\gamma \in (0,1)$, что при всех t_k, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ и $x \in \mathbf{R}^m$ имеет место неравенство

$$(\mathcal{L}_0 U)(t_k, x, y, h) \le -\gamma U(t_k, x, y, h) . \tag{37}$$

Тогда система (1)–(3) асимптотически устойчива по вероятности в целом.

Доказательство. Из неравенства (37) для последовательности функций $b_k(x_t, y, h) \equiv (1-\gamma)^{-k} U(t_k, x_t, y, h)$ легко получить неравенство

$$(\mathcal{L}_0 b_k)(x_t, y, h) = (1-\gamma)^{-k-1} \mathbf{E}_h^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, x_t, y, \eta_{k+1})\} -$$

$$-(1-\gamma)^{-k} U(t_k, x_t, y, h) = (1-\gamma)^{-k-1} [(\mathcal{L}_0 U)(t_k, x_t, y, h) + \gamma U(t_k, x_t, y, h)] \le 0 .$$

Таким образом, используя неравенство (34) теоремы 3, получаем $(\mathcal{L}_0 b_k)(x_t, y, h) \le 0$, что гарантирует выполнение двойного неравенства

$$(1-\gamma)^{-k-1} \mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} U(t_k, x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \le U(t_0, x_t, y, h) \le \underline{U}(\| x_t \|) . \tag{38}$$

С учетом определения функционала Ляпунова–Красовского получим

$$\mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} \overline{U}(\| x_{t_k} \|) \le \mathbf{E}_{y,h}^{(t_k)} U(t_k, x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \le (1-\gamma)^k \underline{U}(\| x_t \|) .$$

Отсюда по определению асимптотической устойчивости по вероятности в целом [17] имеет место утверждение теоремы 4. ■

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 3. Если $\inf\limits_{k\in N}(t_{k+1}-t_k)\equiv$ $\equiv\Delta_1>0$ и существует такое $\gamma>0$, что выполняется неравенство

$$(\mathbf{Q}_0 U)(t,x_t,y,h)\le-\gamma U(t,x_t,y,h) \qquad (39)$$

при $\forall t\ge 0$, $t_k\in S$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$ и $x_t\in\mathbf{D}_m$, то система (1)–(3) асимптотически стохастически устойчива в целом.

Доказательство. По определению $\mathbf{Q}_0$ для функционалов Ляпунова–Красовского $z(t,\varphi,y,h)\equiv e^{\gamma t}U(t,\varphi,y,h)$ легко получить неравенство

$$(\mathbf{Q}_0 z)(t,\varphi,y,h)\le\gamma z(t,\varphi,y,h)+e^{\gamma t}\mathbf{Q}_0 U(t,\varphi,y,h)\le 0$$

для $\varphi_t\in\mathbf{D}_m$ $\forall t\ge 0$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$.

Тогда при $v_k(\varphi,y,h)\equiv U(t_k,\varphi,y,h)$ можно записать

$$(\mathcal{L}_0 v_k)(\varphi,y,h)\le-e^{-\gamma\Delta_1}\mathbf{E}_h^{(t_k)}\{U(t_k,x_t+g_0(t_k,x_t,y,h),y,\eta_{k+1})\}-$$
$$-U(t_k,\varphi,y,h)\le(e^{-\gamma\Delta_1}-1)U(t_k,\varphi,y,h)\le 0,$$

что и доказывает следствие 2. ■

Исследуем далее случаи сохранения свойств экспоненциальной устойчивости решения в среднем квадратическом при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 5. Пусть:

1) для системы (5), (6) выполняются условия существования сильного решения;

2) существует такая последовательность функционалов Ляпунова–Красовского $v_k(\varphi,y,h)$, что при некоторых $c_i>0$, $i=\overline{1,4}$, выполняются неравенства

$$\text{а)}\ c_1|\varphi(0)|^2\le v_k(\varphi,y,h)\le c_2\|\varphi\|^2; \qquad (40)$$

$$\text{б)}\ |v_k(\varphi_1,y,h)-v_k(\varphi_2,y,h)|\le c_4\|\varphi_1-\varphi_2\|^2 \qquad (41)$$

для всех $k\in N$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi_i\in\mathbf{D}^m$, $i=\overline{1,2}$;

$$3)\ (\mathcal{L}_0 v_k)(\varphi,y,h)\le-c_3\|\varphi\|^2; \qquad (42)$$

4) $\sup\limits_k|t_{k+1}-t_k|\le\Delta$;

5) возмущения a_i, b_i и g_i удовлетворяют равномерно по t,y,h глобальному условию Липшица и условию

$$|a_i(t,\varphi,y,h)|+|b_i(t,\varphi,y,h)|+|g_i(t,\varphi,y,h)|\le l\|\varphi\|,\quad l>0,\ i=\overline{1,2}. \qquad (43)$$

Тогда при достаточно малой константе $0<l<<1$ исходная система (1)–(3) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом в целом.

Доказательство. Представим сначала решение $x(t)$ системы (1)–(3) на отрезке $[t_k,t_{k+1}]$, $k\in N$, через решение $\bar{x}(t)$ системы по первому приближению (5) в виде

$$x(t_{k+1})=\bar{x}(t_{k+1})+\Delta x(t_{k+1}), \qquad (44)$$

где $\Delta x(t)=x(t)-\bar{x}(t)$.

Вычислив дискретный оператор Ляпунова в силу (1)–(3) с учетом (41) и (42), получим

$$(\mathcal{L}_1 v_k)(\varphi, y, h) \equiv \mathbf{E}_{x,y,h}^{(t_k)}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, \bar{x}(t_{k+1}) + \Delta x(t_{k+1}))\} -$$

$$-v_k(\varphi, y, h) \le (\mathcal{L}_0 v_k)(\varphi, y, h) + c_4 \mathbf{E}_{x,y,h}^{(t_k)}\{|\Delta x(t_{k+1})|^2\} \le$$

$$\le -c_3 \|\varphi\|^2 + c_4 \mathbf{E}_{x,y,h}^{(t_k)}\{|x(t_{k+1}, \varphi, t_k, y, h) - \bar{x}(t_{k+1}, \varphi, t_k, y, h)|^2\}. \qquad (45)$$

Под сильными решениями для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ДССС (1) и соответственно (4) понимаем случайный процесс [23, 24, 26] с одинаковыми исходными данными $x_{t_k} = \bar{x}_{t_k} = \varphi$

$$x(t) = x + \int_{t_k}^{t} [a_0(s, x_s, \xi(s)) + a_1(s, x_s, \xi(s))] ds +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} [b_0(s, x_s, \xi(s)) + b_1(s, x_s, \xi(s))] dw(s), \qquad (46)$$

$$\bar{x}(t) = x + \int_{t_k}^{t} a_0(s, \bar{x}_s, \xi(s)) ds + \int_{t_k}^{t} b_0(s, \bar{x}_s, \xi(s)) dw(s). \qquad (47)$$

Вычислив разность $x(t) - \bar{x}(t)$, получим

$$|x(t) - \bar{x}(t)| = \int_{t_k}^{t} |a_0(s, x_s, \xi(s)) - a_0(s, \bar{x}_s, \xi(s))| ds +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} |a_1(s, x_s, \xi(s))| ds + \int_{t_k}^{t} |b_0(s, x_s, \xi(s)) - b_0(s, \bar{x}_s, \xi(s))| dw(s) +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} |b_1(s, x_s, \xi(s))| dw(s). \qquad (48)$$

Возведя в квадрат левую и правую части уравнения (48), учитывая неравенство $(a+b+c+d)^2 \le 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, а также применяя операцию математического ожидания, неравенство Коши–Буняковского для интегралов Римана и свойство математического ожидания и для квадрата интеграла Винера–Ито [14, 18], получим

$$\mathbf{E}|x(t) - \bar{x}(t)|^2 \le 4\Bigg[\mathrm{L}|t_{k+1} - t_k|^2 \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}|x(s) - \bar{x}(s)|^2 ds +$$

$$+ l^2 |t_{k+1} - t_k|^2 \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}|\bar{x}(s)|^2 \, ds + \mathrm{L} \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}|x(s) - \bar{x}(s)|^2 \, ds + \qquad (49)$$

$$+ l^2 \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}|\bar{x}(s)|^2 \, ds \Bigg] = 4\left[\mathrm{L}(\Delta^2 + 1) \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}|x(s) - \bar{x}(s)|^2 \, ds + l^2 (\Delta^2 + 1) \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}|\bar{x}(x)|^2 \, ds\right].$$

С использованием неравенства Гронуолла верна оценка для $\mathbf{E}|\bar{x}(t)|^2$:

$$\mathbf{E}|\bar{x}(t)|^2 \le 12|x|^2 \, e^{3l^2(\Delta^2+1)} l^2 (\Delta^2 + 1). \qquad (50)$$

С учетом (50) легко получить из неравенства (49), используя неравенство Гронуолла, следующую оценку:

$$\mathbf{E}|x(t) - \bar{x}(t)|^2 \le 12|x|^2 \, e^{3l^2(\Delta^2+1)\Delta} e^{\Lambda(\Delta^2+1)\Delta} l^2 (\Delta^2 + 1). \qquad (51)$$

В момент скачка при $x(t_k) = \bar{x}(t_k) = x$ имеем

$$|x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})| \le |x(t_{k+1}-) + g_0(t_{k+1}-, x_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}) +$$

$$+ g_1(t_{k+1}-, x_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1}) -$$

$$-g_0(t_{k+1}-, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1})| + |g_1(t_{k+1}-, \bar{x}_{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1})|. \quad (52)$$

С учетом (50) можно повторить вышеприведенные выкладки, в результате получим

$$\mathbf{E}_{x,y,h}^{(t_k)} \{\| x(t_{k+1}, t_k, \varphi, y, h) - \bar{x}(t_{k+1}, t_k, \varphi, y, h) \|^2\} \le$$

$$\le l^2(\Delta^2 + 1) 12\Delta e^{3l^2(\Delta^2+1)\Delta} e^{\Lambda(\Delta^2+1)\Delta} (1 + \Delta(1 + \Delta + l)) \|\varphi\|^2. \quad (53)$$

Поэтому при достаточно малой константе $0 < l << 1$, учитывая (53), из неравенства (45) вытекает неравенство

$$\mathcal{L}_1 v_k(x, y, h) \le -\frac{c_3}{2} \|\varphi\|,$$

что и доказывает теорему 5. ■

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ В ЦЕЛОМ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И С ВНЕШНИМИ МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Одномерную линейную стохастическую диффузионную динамическую систему случайной структуры с внешними марковскими переключениями запишем в виде стохастического дифференциально-функционального уравнения (СДФУ) [17]

$$dx(t) = a(\xi(t)) x_t dt + b(\xi(t)) x_t dw(t) \quad (54)$$

с внешними марковскими переключениями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)) \quad (55)$$

и с начальным условием

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y} \equiv \{1, 2, \ldots, k\}, \quad x_{t_0} = \varphi \in \mathbf{D}, \quad \eta_{k_0} = h, \quad (56)$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^1$ — сильное решение СДФУ (54) с непрерывными реализациями; $\xi(t)$ — простая марковский цепь с конечным числом состояний $\mathbf{Y} \equiv \{1, 2, \ldots, k\}$ и переходными вероятностями (14), (15); $w(t)$ — скалярный винеровский процесс; η_k — дискретная цепь Маркова, для которой $\overline{\mathbf{P}}_k(h, \Gamma)$ — переходная вероятность на k-м шаге.

Получим достаточные условия устойчивости системы (54)–(56) по вероятности в целом.

Выберем функцию Ляпунова в виде [12]

$$v(\xi(t), \eta_k, x) = \gamma \xi(t) |x|^\beta, \; \gamma > 0. \quad (57)$$

Пусть функции $a(i) \equiv a_i$, $b(i) \equiv b_i$ такие, что

$$a_i - \frac{b_i^2}{2} < -\varepsilon \text{ при всех } i = \overline{1, k}. \quad (58)$$

Тогда в (57)

$$\beta = \varepsilon b^{-2}, \; b \equiv \max\{b_i \mid i = \overline{1, k}\}. \quad (59)$$

Покажем, каким ограничениям должны удовлетворять переходные вероятности q_{ij} марковской цепи $\xi(t)$ и дискретной цепи Маркова η_k, $k \in N$, чтобы выполнялись условия утверждения, т.е. система была устойчивой по вероятности в целом, где v является положительно-определенным функционалом Ляпунова–Красовского.

Вычисляя lv на решениях (54)–(56), получаем

$$lv(t_k, x_t, y, h) = \gamma ||x_t||^{\beta} \{\beta_i (a_i + \frac{\beta - 1}{2} b_i) + \sum_{j \neq i}^{k} (j-i) q_{ij}\} +$$

$$+ \int_{\mathbf{H}} \gamma i |x + g(t_k, x_t, y, h)|^{\beta} \overline{\mathbf{P}}_k (h, dz) - \gamma i |x|^{\beta} . \quad (60)$$

С учетом (57)–(59) имеем в точке x_i $(\xi(t) = i)$

$$lv(t_k, x_t, y, h) =$$

$$= \gamma \| x_t \|^{\beta} \left[-\frac{\beta i \varepsilon}{2} + a_i \right] + i\gamma \left[\int_{\mathbf{H}} |x + g(t_k, x_t, y, h)|^{\beta} \overline{\mathbf{P}}_k (h, dz) - \| x_t \|^{\beta} \right], \quad (61)$$

где $a_i \equiv \sum_{j > i}^{k} (j - i) q_{ij}$, $a_k = 0$.

Рассмотрим случай выбора переходной вероятности $\overline{\mathbf{P}}_k (h, \Gamma)$ цепи Маркова $\{\eta_k\}$, $k \in N$, с учетом конструкции g в (55) такой, что

$$\int_{\mathbf{H}} |x + g(t_k, x, z, h)|^{\beta} \overline{\mathbf{P}}_k (h, dz) \leq 2 \| x_t \|^{\beta} . \quad (62)$$

Тогда правая часть (61) примет вид

$$lv(t_k, x_t, y, h) = \gamma \| x_t \|^{\beta} \left[-\frac{\beta i \varepsilon}{2} + a_i + i \right] = \gamma \| x_t \|^{\beta} \left[-\frac{i(\beta \varepsilon + 2)}{2} + a_i \right]. \quad (63)$$

Функция (57) удовлетворяет условию $lv < 0$, если выражение в квадратных скобках (63) является отрицательным. Тогда согласно теореме 2 получим утверждение.

Теорема 6. Если выполняется условие (62) и

$$a_i < \frac{i(\beta \varepsilon + 2)}{2}, \quad i = \overline{1, k+1},$$

тогда решение системы (54)–(56) устойчиво по вероятности в целом при каждом фиксированном значении $\xi(t) = i$.

Замечание 3. При $\beta < 1$ функционал (57) не имеет производной по φ при $\varphi \equiv 0$, но в этом нет необходимости, поскольку для исследования устойчивости важны свойства функции в произвольной окрестности $\varphi \equiv 0$, а не в самой точке. Важным требованием является существование производной lv при $\varphi \neq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$.

Замечание 4. Условие (58) означает, что устойчивость по вероятности может быть обеспечена за счет больших значений коэффициентов и выполнении условия (62) даже при неустойчивости системы $dx(t) = a_i x_t dt$.

Установлено в [23], что если СФДУ (54) рассматривать не как уравнение Ито, а как уравнение Стратановича, то такой эффект невозможен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чрезвычайно важное место в настоящей статье занимает алгоритм вычисления инфинитезимального оператора в силу рассматриваемой системы по первому приближению. Это дает возможность выписывать достаточные условия устойчивости в целом системы случайной структуры, а именно устойчивости по вероятности в целом, асимптотической стохастической устойчивости в целом, экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуб Дж. Вероятностные процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 605 с.
2. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
3. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: в 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
4. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: в 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 473 с.
5. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем. — Рига: РТУ, 1994. — 300 с.
6. Свердан М.Л., Царьков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. — Снятин: Над Прутом, 1996. — 448 с.
7. Свердан М.Л., Царьков Є.Ф., Ясинський В.К. Стохастичні динамічні системи із скінченною післядією. — Чернівці: Зелена Буковина, 2000. — 560 с.
8. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости. — Харьков: Харьк. мат. общество, 1892. — 250 с.
9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.
10. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1997. — 304 с.
11. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
12. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: УГАПС, 1998. — 222 с.
13. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
14. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. — К.: Изд-во Киев. ун-та, 1961. — 216 с.
15. Королюк В.С., Ясинський В.К. Теорія ймовірностей. — Чернівці.: Золоті литаври, 2011. — 487 с.
16. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.
17. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
18. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — К.: ТВіМС, 2005. — 580 с.
19. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Наука, 1969. — 212 с.
20. Borovkov K. On a piace — wise deterministic Markov processes model // Statist probab. lett, 2001. — **53**. — P. 421–428.
21. Chung K.L. Lectures from Markov processes to brownian. — New York: Springer, 1982. — 241 p.
22. Friedlin M.I. Markov processes and differential equations: asymptotic problems. Lectures in mathematics. — Zurich.: Birkhauser, 1998. — 303 p.
23. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — London–Singapore–Hong Kong: World Scientific, 2005. — 332 p.
24. Mizel V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. Integral Equations. — 1984. — **7**. — P. 1–72.
25. Shurenkov V.M. On the theory of Markov renewal // Theor. Probab. Appl. — 1984. — **19**(2). — P. 247–265.
26. Yasinsky V., Bereza V. The asymptotic uniform stability of solutions of neutral stochastic differential-functional equations with Poisson switchingsy // Theory of Stochastic Processes. — 2003. — **29**, N 3–4. — P. 211–217.

Поступила 06.03.2013