УДК 517.988

Ю.В. МАЛИЦКИЙ, В.В. СЕМЕНОВ

ВАРИАНТ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ МОНОТОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

Аннотация. Предлагается новый итерационный алгоритм решения вариационного неравенства с монотонным и липшицевым оператором, действующим в гильбертовом пространстве. Алгоритм основан на двух известных методах: алгоритме Попова и так называемом субградиентном экстраградиентном алгоритме. Привлекательной чертой алгоритма является вычисление только одного значения оператора неравенства и одной проекции на допустимое множество при выполнении итерационного шага. Доказана теорема о слабой сходимости для последовательностей, порожденных предложенным алгоритмом.

Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный оператор, экстраградиентный метод, сходимость.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть C — непустое подмножество действительного гильбертова пространства H, A — оператор, действующий в H. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C : (Ax,\ y-x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C\,. \qquad (1)$$

Множество решений вариационного неравенства (1) обозначим $VI(A,C)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: H \to H$ монотонный и липшицевый с константой $L > 0$;
- $VI(A,C) \neq \varnothing$.

Многие задачи исследования операций (поиск седловых точек, поиск равновесия Нэша в некооперативных играх, минимизация) и математической физики

[1]Настоящая работа финансировалась Верховной Радой Украины (именная стипендия Верховной Рады Украины для молодых ученых, 2013) и ГФФИ Украины (проект GP/F49/061).

могут быть записаны в форме вариационных неравенств [1–6], для решения которых к настоящему времени предложено большое количество методов [7–23], в частности градиентного типа. Известно, что в случае неоптимизационных постановок для сходимости наиболее простых градиентных методов необходимо выполнение усиленных условий монотонности [7]. Для преодоления этой трудности существует несколько подходов. Один из них — регуляризация исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство [8, 21]. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в итерационных методах экстраградиентного типа, впервые предложенных А.С. Антипиным [24] и Г.М. Корпелевич [25].

Для вариационного неравенства (1) экстраградиентный алгоритм Корпелевич имеет вид

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где $\lambda \in (0, 1/L)$, P_C — оператор метрического проектирования на множество C. Известно, что последовательности (x_n) и (y_n) слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A, C)$. Обобщению и исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций [26–30 и др.].

К недостаткам алгоритма Корпелевич можно отнести вычисление значений оператора A в двух разных точках (выходит на первый план в моделях оптимального управления, особенно системами с распределенными параметрами [6]) и необходимость двух проектирований на допустимое множество C (ресурсоемких в случае множества C сложной структуры) для перехода к следующей итерации.

От первого недостатка свободен экстраградиентный алгоритм Попова [31], предложенный как модификация алгоритма Эрроу–Гурвица поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций. Для вариационного неравенства (1) алгоритм Попова примет вид

$$\begin{cases} x_0,\ y_0 \in C, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где $\lambda \in (0, 1/3L)$. В [31] для случая $H = \mathbb{R}^d$ доказана сходимость порожденных этим методом последовательностей (x_n), (y_n).

Для вариационных неравенств [32] и задач равновесного программирования [33] были предложены модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество. В этих так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах первый этап итерации совпадает с первым этапом итерации в алгоритме Корпелевич, а далее для получения x_{n+1} вместо проектирования точки $x_n - \lambda A y_n$ на допустимое множество C точку $x_n - \lambda A y_n$ проектируют на некоторое опорное для C полупространство. Для вариационного неравенства (1) субградиентный экстраградиентный алгоритм имеет вид

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ H_n = \{ z \in H : (x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n) \le 0 \}, \\ x_{n+1} = P_{H_n}(x_n - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где $\lambda \in (0, 1/L)$. В работах [32, 33] доказана слабая сходимость порожденных этим алгоритмом последовательностей (x_n) и (y_n) к некоторой точке $z \in VI(A, C)$.

В данной работе предлагается новый алгоритм решения вариационных неравенств (1) с монотонным и липшицевым оператором, совмещающий в себе положительные черты экстраградиентного алгоритма Попова и субградиентного экстраградиентного алгоритма. Доказывается теорема о слабой сходимости алгоритма.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$, $C \subseteq H$ — непустое выпуклое и замкнутое множество. Пусть P_C — оператор метрического проектирования на множество C, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством $\| P_C x - x \| = \min_{z \in C} \| z - x \|$. Полезны следующие характеризации элемента $P_C x$ [2, 34]:

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C, \ (y - x, z - y) \geq 0 \ \ \forall z \in C, \tag{2}$$

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C, \ \| y - z \|^2 \leq \| x - z \|^2 - \| y - x \|^2 \ \ \forall z \in C. \tag{3}$$

Из неравенства (2) следует, что $x \in VI(A, C)$ тогда и только тогда, когда $x = P_C(x - \lambda A x)$, где $\lambda > 0$ [2, 34].

Если оператор $A : H \to H$ монотонный и непрерывный, а множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое, то $x \in VI(A, C)$ тогда и только тогда, когда $x \in C$ и $(Ay, y - x) \geq 0$ для всех $y \in C$ [1, 2, 34]. В частности, множество $VI(A, C)$ выпуклое и замкнутое.

При доказательстве сходимости последовательностей элементов гильбертова пространства используем известную лемму Опяла.

Лемма 1 [35]. Пусть последовательность (x_n) элементов гильбертова пространства H слабо сходится к элементу $x \in H$. Тогда для всех $y \in H \setminus \{x\}$ имеем $\varliminf_{n \to \infty} \| x_n - x \| < \varliminf_{n \to \infty} \| x_n - y \|$.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Для решения задачи (1) предлагаем следующий алгоритм.

Алгоритм 1

1. Задаем $x_0, y_0 \in C$ и $\lambda > 0$.

2. Вычисляем
$$\begin{cases} x_1 = P_C(x_0 - \lambda A y_0), \\ y_1 = P_C(x_1 - \lambda A y_0). \end{cases}$$

3. Имея x_n, y_n и y_{n-1}, строим полупространство

$$H_n = \{ z \in H : (x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, z - y_n) \leq 0 \}$$

и вычисляем
$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{H_n}(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n). \end{cases}$$

4. Если $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n = y_{n-1}$, то заканчиваем вычисление, иначе полагаем $n := n+1$ и переходим на шаг 3.

Прежде всего отметим, что $C \subseteq H_n$. Действительно, если предположить существование элемента $z \in C \setminus H_n$, то неравенство $(x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, z - y_n) > 0$ будет противоречить факту $y_n = P_C(x_n - \lambda A y_{n-1})$.

Покажем, что остановка алгоритма 1 приводит к решению вариационного неравенства (1).

Лемма 2. Если $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n = y_{n-1}$ в алгоритме 1, то $y_n \in VI(A, C)$.

Доказательство. Если в алгоритме 1 имеет место $x_{n+1} = x_n$, то из (2) следует

$$(A y_n, x - x_n) \geq 0 \ \ \forall x \in H_n. \tag{4}$$

Учитывая $x_{n+1} \in H_n$ и $y_n = y_{n-1}$, получаем $(x_n - \lambda A y_n - y_n, x_n - y_n) \leq 0$, откуда делаем вывод, что $(A y_n, x_n - y_n) \geq 0$. Далее представим (4) в виде $(A y_n, x - y_n) - (A y_n, x_n - y_n) \geq 0 \ \ \forall x \in H_n$. Следовательно, $(A y_n, x - y_n) \geq (A y_n, x_n - y_n) \geq 0$ $\forall x \in H_n$. Поскольку $y_n \in C \subseteq H_n$, то $y_n \in VI(A, C)$.

Перейдем к доказательству слабой сходимости алгоритма.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сначала докажем важное неравенство, связывающее расстояния от порожденных алгоритмом точек до множества $VI(A, C)$.

Лемма 3. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) порождены алгоритмом 1, $z \in VI(A, C)$. Тогда справедливо неравенство

$$\| x_{n+1} - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - (1-2\lambda L) \| x_{n+1} - y_n \|^2 -$$
$$- (1-\lambda L) \| x_n - y_n \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $z \in VI(A, C) \subseteq H_n$, то из $x_{n+1} = P_{H_n}(x_n - \lambda A y_n)$ и (3) следует

$$\| x_{n+1} - z \|^2 \le \| x_n - \lambda A y_n - z \|^2 - \| x_n - \lambda A y_n - x_{n+1} \|^2 =$$
$$= \| x_n - z \|^2 - \| x_n - x_{n+1} \|^2 - 2\lambda (A y_n, x_{n+1} - z). \tag{6}$$

Из монотонности A и включения $z \in VI(A, C)$ вытекает $(Ay_n, y_n - z) \ge 0$. Добавив неотрицательное слагаемое $2\lambda(Ay_n, y_n - z)$ к правой части неравенства (6), получим

$$\| x_{n+1} - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - \| x_n - x_{n+1} \|^2 - 2\lambda (A y_n, x_{n+1} - y_n) =$$
$$= \| x_n - z \|^2 - \| x_n - y_n \|^2 - \| x_{n+1} - y_n \|^2 - 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) -$$
$$- 2\lambda (A y_n, x_{n+1} - y_n) = \| x_n - z \|^2 - \| x_n - y_n \|^2 - \| x_{n+1} - y_n \|^2 +$$
$$+ 2\lambda (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) + 2(x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, x_{n+1} - y_n). \tag{7}$$

Из включения $x_{n+1} \in H_n$ следует неравенство $(x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, x_{n+1} - y_n) \le 0$. Слагаемое $2\lambda (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n)$ в (7) оценим так:

$$2\lambda (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) \le 2\lambda L \| y_{n-1} - y_n \| \| x_{n+1} - y_n \| \le$$
$$\le 2\lambda L (\| y_{n-1} - x_n \| + \| x_n - y_n \|) \| x_{n+1} - y_n \| \le$$
$$\le \lambda L (\| y_{n-1} - x_n \|^2 + 2 \| x_{n+1} - y_n \|^2 + \| x_n - y_n \|^2).$$

С учетом предыдущих выкладок приходим к неравенству (5).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое, оператор $A : H \to H$ монотонный и липшицевый с константой $L > 0$, $VI(A, C) \ne \varnothing$ и $\lambda \in \left(0, \frac{1}{3L}\right)$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A, C)$.

Доказательство. Сначала покажем ограниченность последовательности (x_n). Зафиксируем номер $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим неравенства (5) для всех номеров N, $N+1$, …, M, где $M > N$. Сложив их, получим

$$\| x_{M+1} - z \|^2 \le \| x_N - z \|^2 - (1-3\lambda L) \sum_{n=N}^{M} \| x_{n+1} - y_n \|^2 -$$
$$- (1-\lambda L) \sum_{n=N}^{M} \| x_n - y_n \|^2 + \lambda L \| x_N - y_{N-1} \|^2. \tag{8}$$

Отсюда следует ограниченность последовательности (x_n).

Из неравенства (8) получаем сходимость рядов $\sum_n \| x_{n+1} - y_n \|^2$ и $\sum_n \| x_n - y_n \|^2$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - y_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in H$. Тогда $y_{n_k} \to z$ слабо и $z \in C$. Покажем, что $z \in VI(A, C)$. Имеем

$$(y_{n_k+1} - x_{n_k+1} + \lambda A y_{n_k}, x - y_{n_k+1}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Используя монотонность оператора A, выводим

$$0 \leq (y_{n_k+1} - x_{n_k+1} + \lambda A y_{n_k}, x - y_{n_k+1}) = (y_{n_k+1} - x_{n_k+1}, x - y_{n_k+1}) +$$
$$+ \lambda(A y_{n_k}, y_{n_k} - y_{n_k+1}) + \lambda(A y_{n_k}, x - y_{n_k}) \leq (y_{n_k+1} - x_{n_k+1}, x - y_{n_k+1}) +$$
$$+ \lambda(A y_{n_k}, y_{n_k} - y_{n_k+1}) + \lambda(Ax, x - y_{n_k}).$$

Совершив предельный переход с учетом (9), получим $(Ax, x - z) \geq 0$ $\forall x \in C$. Следовательно, $z \in VI(A, C)$.

Покажем, что $x_n \to z$ слабо (тогда из $\| x_n - y_n \| \to 0$ будет следовать $y_n \to z$ слабо). Рассуждаем от противного. Предположим, что существует подпоследовательность (x_{m_k}) такая, что $x_{m_k} \to z'$ слабо и $z \neq z'$. Из неравенства (5) и $0 < 3\lambda L < 1$ следует

$$\| x_{n+1} - x \|^2 + \lambda L \| x_{n+1} - y_n \|^2 \leq \| x_n - x \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2 \quad \forall x \in VI(A, C).$$

Таким образом, для всех $x \in VI(A, C)$ существует

$$\lim_{n \to \infty} (\| x_n - x \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2) \in \mathbb{R}.$$

Применив дважды лемму Опяла:

$$\lim_{n \to \infty} (\| x_n - z \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2) = \lim_{k \to \infty} (\| x_{n_k} - z \|^2 + \lambda L \| x_{n_k} - y_{n_k-1} \|^2) =$$
$$= \varliminf_{k \to \infty} \| x_{n_k} - z \|^2 < \varliminf_{k \to \infty} \| x_{n_k} - z' \|^2 = \lim_{k \to \infty} (\| x_{n_k} - z' \|^2 + \lambda L \| x_{n_k} - y_{n_k-1} \|^2) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} (\| x_n - z' \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2) =$$
$$= \lim_{k \to \infty} (\| x_{m_k} - z' \|^2 + \lambda L \| x_{m_k} - y_{m_k-1} \|^2) =$$
$$= \varliminf_{k \to \infty} \| x_{m_k} - z' \|^2 < \varliminf_{k \to \infty} \| x_{m_k} - z \|^2 =$$
$$= \lim_{k \to \infty} (\| x_{m_k} - z \|^2 + \lambda L \| x_{m_k} - y_{m_k-1} \|^2) = \lim_{n \to \infty} (\| x_n - z \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2),$$

получим противоречивое неравенство. Таким образом, $z = z'$.

Заметим, что слабый предел $z \in VI(A, C)$ порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) обладает свойством

$$P_{VI(A,C)} x_n \to z \text{ сильно.} \tag{10}$$

Действительно, имеет место $(P_{VI(A,C)} x_n - x_n, z - P_{VI(A,C)} x_n) \geq 0$. Если доказать, что $P_{VI(A,C)} x_n \to \bar{z}$ сильно, то после предельного перехода получим $(\bar{z} - z, z - \bar{z}) \geq 0$, т.е. $z = \bar{z}$ и верно (10). Докажем сильную сходимость $(P_{VI(A,C)} x_n)$. Имеем

$$\| x_{n+1} - P_{VI(A,C)} x_{n+1} \|^2 \leq \| x_{n+1} - P_{VI(A,C)} x_n \|^2 \leq$$
$$\leq \| x_n - P_{VI(A,C)} x_n \|^2 + \lambda L \| x_n - y_{n-1} \|^2.$$

Из суммируемости ряда $\sum_n \| x_{n+1} - y_n \|^2$ следует существование $\lim_{n \to \infty} \| x_n - P_{VI(A,C)} x_n \| \in \mathbb{R}$. Применив неравенство (3) и лемму 2, получим

$$\| P_{VI(A,C)} x_m - P_{VI(A,C)} x_n \|^2 \leq \| x_m - P_{VI(A,C)} x_n \|^2 - \| P_{VI(A,C)} x_m - x_m \|^2 \leq$$

$$\leq \| x_{m-1} - P_{VI(A,C)} x_n \|^2 - \| P_{VI(A,C)} x_m - x_m \|^2 + \lambda L \| x_{m-1} - y_{m-2} \|^2 \leq \ldots$$

$$\ldots \leq \| x_n - P_{VI(A,C)} x_n \|^2 - \| P_{VI(A,C)} x_m - x_m \|^2 + \lambda L \sum_{k=n}^{m} \| x_{k-1} - y_{k-2} \|^2, \; m > n.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $(P_{VI(A,C)} x_n)$.

Замечание 1. Аналогичное теореме 1 утверждение о сходимости будет иметь место и для итерационного процесса

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{H_n}(x_n - \lambda_n A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

где $H_n = \{z \in H \colon (x_n - \lambda_{n-1} A y_{n-1} - y_n, z - y_n) \leq 0\}$, при условии, что $0 < \inf \lambda_n \leq \leq \sup \lambda_n < \dfrac{1}{3L}$.

Замечание 2. Очевидным недостатком изученного алгоритма является предположение о том, что константа Липшица L известна. Необходимо разработать вариант алгоритма без использования этой информации с регулировкий шага, подобной известному правилу Армихо [9, 10].

В данной работе рассмотрена проблема приближенного решения вариационных неравенств с монотонными и липшицевыми операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Предложен новый итерационный алгоритм, основанный на двух методах: алгоритме Попова [31] и субградиентном экстраградиентном алгоритме [32, 33]. Доказана теорема о слабой сходимости для последовательностей, порожденных алгоритмом. Отметим, что вычислительные затраты, необходимые для выполнения итерационного шага алгоритма 1, почти равны затратам для реализации шага в классическом методе проекции градиента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983. — 256 с.
3. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
4. Коннов И.В. О системах вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 12. — С. 79–88.
5. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1999. — 325 p.
6. Семенов В.В., Семенова Н.В. О задаче векторного управления в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 2. — С. 117–130.
7. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
8. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
9. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2001. — 181 p.
10. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problem. V. 2. — New York: Springer, 2003. — 666 p.
11. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
12. Пшеничный Б.Н., Калжанов М.У. Метод решения вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 6. — С. 48–55.

13. Калашников В.В., Калашникова Н.И. Решение двухуровневого вариационного неравенства // Там же. — 1994. — № 4. — С. 178–180.

14. Панин В.М., Скопецкий В.В., Лаврина Т.В. Модели и методы конечномерных вариационных неравенств // Там же. — 2000. — № 6. — С. 47–64.

15. Xiu N., Zhang J. Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — **152**. — P. 559–585.

16. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — **16**, N 4. — P. 1230–1241.

17. Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings // J. Optim. Theory and Appl. — 2006. — **128**. — P. 191–201.

18. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2008. — **48**, № 12. — С. 2121–2128.

19. Семенов В.В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 2. — С. 42–46.

20. Маліцький Ю.В., Семенов В.В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2010. — № 3 (102). — С. 79–88.

21. Семенов В.В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Там же. — 2010. — № 2 (101). — С. 120–128.

22. Денисов С.В., Семенов В.В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Там же. — 2011. — № 3 (106). — С. 27–32.

23. Семенов В.В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Там же. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.

24. Антипин А.С. О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа // Экономика и мат. методы. — 1976. — **12**, № 6. — С. 1164–1173.

25. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Там же. — 1976. — **12**, № 4. — С. 747–756.

26. Хоботов Е.Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1987. — **27**, № 10. — С. 1462–1473.

27. Зыкина А.В., Меленьчук Н.В. Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 9. — С. 82–85.

28. Запорожец Д.Н., Зыкина А.В., Меленьчук Н.В. Сравнительный анализ экстраградиентных методов решения вариационных неравенств для некоторых задач // Автомататика и телемеханика. — 2012. — № 4. — С. 32–46.

29. Войтова Т.А., Денисов С.В., Семенов В.В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2011. — № 1 (104). — С. 10–23.

30. Апостол Р.Я., Гриненко А.А., Семенов В.В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Там же. — 2012. — № 1 (107). — С. 3–14.

31. Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу–Гурвица поиска седловых точек // Мат. заметки. — 1980. — **28**, № 5. — С. 777–784.

32. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // J. Optim. Theory and Appl. — 2011. — **148**. — P. 318–335.

33. Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 146–154.

34. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2011. — 408 p.

35. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — **73**. — P. 591–597.

Поступила 24.04.2013