УДК 519.21

А.Г. МОРОЗ, В.В. ТОМАШИК

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ И МОМЕНТОВ ВЫХОДА РЕШЕНИЙ ИЗ ПОЛОСЫ В ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ СО СКАЧКАМИ

Аннотация. Рассматривается диффузионная модель со скачками, заданная стохастическим дифференциальным уравнением с конечной пуассоновской мерой, коэффициенты которого зависят от параметра. Доказано, что при сходимости коэффициентов сходятся как решения, так и моменты их выхода из полосы.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, моменты выхода, сходимость процессов, условие Ямада, пуассонова мера.

ВВЕДЕНИЕ

Диффузионные модели со скачками имеют достаточно широкое применение, причем особо важную роль они играют в моделировании ценовых процессов на фондовом рынке. Именно поэтому исследования, связанные с подобными моделями, в частности задаваемыми стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), довольно актуальны. В диффузионных моделях со скачками часто встречается ситуация, когда оптимальная стратегия для инвестора задается моментами выхода ценового процесса за некоторый уровень (см., например, [1, 2]).

На практике часто коэффициенты уравнения, моделирующего некий процесс, неизвестны и оцениваются с помощью некоторых приближенных методов. В таком случае получаем уравнения, коэффициенты которых близки к коэффициентам уравнения, задающего моделируемый процесс. Таким образом, хотелось бы гарантировать, во-первых, близость в некотором смысле решений приближенных уравнений к решению начального уравнения и, во-вторых, близость оптимальных стратегий, которые задаются моментами выхода процессов за пределы полосы.

Учитывая сказанное выше, в данной работе сформированы условия, гарантирующие сходимость решений уравнений со скачками и моментов выхода этих решений за пределы полосы в случае сходимости коэффициентов уравнений. Как вспомогательный результат получена устойчивость моментов выхода по отношению к границам полосы. Данный результат представляет особый интерес, так как уравнения, задающие границы полосы, выход из которой является оптимальной стратегией для инвестора, очень редко подлежат точному решению.

Вопрос сходимости решений уравнений со скачками рассматривался в [3, 4] и во многих монографиях, например в [5, 6]. Новизна данной работы заключается в том, что на коэффициент диффузии вместо условия Липшица накладывается более слабое условий Ямада. Это, в частности, дает возможность рассматривать уравнения Кокса–Ингерсолла–Росса, которые часто используются в финансовом моделировании.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 определяется основной объект исследования и описываются все предположения. В разд. 2 представлены результаты для уравнений без скачков, которые используются для доказательства основных результатов. В разд. 3 установлена сходимость решений СДУ со скачками, в разд. 4 — сходимость моментов выхода из полосы.

1. ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющей обычным условиям.

Рассмотрим последовательность стохастический дифференциальных уравнений
$$X_n(t)=X_n(0)+\int_0^t b_n(s,X_n(s))\,ds+\int_0^t \sigma_n(s,X_n(s))\,dW(s)+$$
$$+\int_0^t\int f_n(s,X_n(s),\theta)\mu(d\theta,ds),\ \ n\ge 0,\ \ t\ge 0, \qquad (1)$$
где начальные условия $X_n(0)$ являются F_0-измеримыми случайными величинами, коэффициенты $b_n, \sigma_n: \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ измеримы, $\{W(t), t\ge 0\}$ — винеровский процесс относительно фильтрации $\{F_t, t\ge 0\}$, $\mu(d\theta, dt)$ — пуассоновская мера, для которой $E\mu(d\theta, dt)=\nu(d\theta)dt$, причем $\nu(\mathbb{R})<\infty$.

Предполагаем выполнение следующих условий относительно коэффициентов и начальных условий уравнения (1):

У1_n) для всех $\gamma>0$ выполняется $\sup\limits_{n\ge 1} E[|X_n(0)|^\gamma]<\infty$;

У2_n) коэффициенты b_n и σ_n непрерывны по всем переменным;

У3_n) линейный рост коэффициентов
$$|b_n(t,x)|+|\sigma_n(t,x)|\le L(1+|x|^2),\ \ t\ge 0,\ \ x\in\mathbb{R};$$

У4_n) условие Липшица на коэффициент b_n:
$$|b_n(t,x)-b_n(t,y)|\le L|x-y|,\ \ t\ge 0,\ \ x,\ y\in\mathbb{R};$$

У5_n) условие Ямада: существует такая строго возрастающая функция ρ_n: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, что $\int_{0^+}\rho_n^{-2}(u)du=\infty$ и выполняется неравенство
$$|\sigma_n(t,x)-\sigma_n(t,y)|\le \rho_n(|x-y|),\ \ t\ge 0,\ \ x,\ y\in\mathbb{R};$$

У6_n) коэффициент $f_n(s,x,\theta)$ непрерывен по x для всех s и почти всех θ по мере $\nu(d\theta)$;

У7_n) коэффициент f_n ограничен: $|f_n(t,x,\theta)|<L$;

У8_n) $\int_{\mathbb{R}}|f_n(t,x,\theta)-f_n(t,x,\theta)|^2\nu(d\theta)\le L|x_1-x_2|^2$.

Относительно сходимости предположим следующее:

U1_n) для всех $\gamma>0$ имеет место сходимость начальных условий
$$E[X_n(0)-X_0(0)]^\gamma\to 0,\ \ n\to\infty;$$

U2_n) для всех $t>0, x\in\mathbb{R}$ имеет место сходимость коэффициентов
$$b_n(t,x)\to b_0(t,x),\ \ \sigma_n(t,x)\to\sigma_0(t,x),\ \ n\to\infty;$$

U3_n) для всех $t>0,\ x\in\mathbb{R},\ \theta\in\mathbb{R}$ имеет место сходимость
$$f_n(t,X_n(s),\theta)\to f_0(t,X_n(s),\theta),\ \ n\to\infty.$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЗ СКАЧКОВ

Приведем результаты для уравнений без скачков:
$$Z_n(t)=Z_n(0)+\int_0^t b_n(s,Z_n(s))ds+\int_0^t \sigma_n(s,Z_n(s))dW(s),\ \ n\ge 0,\ \ t\ge 0. \qquad (2)$$

Следующий результат относительно решений СДУ (2) без пуассоновской меры является обобщением результата, полученного в [7], для процессов со случайными начальными условиями.

Теорема 1. Пусть для последовательности дифференциальных уравнений (2) выполняются условия У1_n)–У5_n) и U1_n), U2_n). Тогда $E[|Z_n(t)-Z_0(t)|]\to 0$, $n\to\infty$, причем сходимость имеет место равномерно на конечных промежутках.

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1 из [7].

Также аналогично тому, как это сделано в [8], можно доказать следующий результат относительно равномерной сходимости по вероятности решений СДУ (2) без пуассоновской меры к граничному процессу.

Теорема 2. Пусть выполнены условия У1_n)–У5_n) и U1_n), U2_n). Тогда для $T>0, \varepsilon>0$ имеет место сходимость

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}|Z_n(t)-Z_0(t)|>\varepsilon\right)\to 0,\ n\to\infty.$$

Следствие 1. Если выполнены предположения предыдущей теоремы, то для любого $\gamma>0$

$$E(|Z_n(t)-Z_0(t)|)^\gamma\to 0,\ n\to\infty.$$

Доказательство вытекает из равномерной интегрируемости последовательности $\{|Z_n(t)-Z_0(t)|\}$, $n\ge 1$.

Под моментами выхода из полосы $[l,r]$: $l, r\in\mathbb{R}$, $l<r$, процессов $Z_n(t)$ и $Z_0(t)$ будем понимать моменты выхода

$$\tau_{Z_n}^{[l,r]}=\inf\{t\in[0,\infty): Z_n(t)\notin[l,r]\},\ n\ge 0.$$

Имеет место следующее утверждение [9].

Лемма 1. Пусть для процессов $Z_n(t)$ выполнены условия У1_n)–У5_n):

а) если $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\int_0^y\frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}dz\right)dy=\infty$, то

$$P\left(\sup_{t>0}Z_n(t)=+\infty\right)=1,\ n\ge 0.$$

б) если $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\int_0^y\frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}dz\right)dy=\infty$, то

$$P\left(\inf_{t>0}Z_n(t)=-\infty\right)=1,\ n\ge 0.$$

Таким образом, при выполнении одного из условий леммы 1 $\tau_{Z_n}^{[l,r]}<\infty$ почти наверное для каждого $n\ge 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия У1_n)–У5_n) и одно из условий леммы 1. Тогда имеет место сходимость

$$\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}\xrightarrow{P}\tau_{Z_0}^{[l,r]},\ \delta\to 0+,\qquad \tau_{Z_0}^{[l+\delta,r-\delta]}\xrightarrow{P}\tau_{Z_0}^{[l,r]},\ \delta\to 0+.$$

Доказательство. Не умаляя общности, доказательство проведем только для первой сходимости. Вторую сходимость можно доказать аналогично. Очевидно, что $\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}\ge\tau_{Z_0}^{[l,r]}$. Тогда для всех $\varepsilon>0$ имеем

$$P(|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{Z_0}^{[l,r]}|>\varepsilon)\le$$

$$\le P(|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{Z_0}^{[l,r]}|>\varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]})=l)+P(|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{Z_0}^{[l,r]}|>\varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]})=r).$$

Рассмотрим первое неравенство

$$P(|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{Z_0}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]})=l)=P(\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]}>\tau_{Z_0}^{[l,r]}+\varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]})=l)\le$$

$$\le P\left(\min_{t\in[\tau_{Z_0}^{[l,r]},\tau_{Z_0}^{[l,r]}+\varepsilon]} Z_0(t)\ge l-\delta, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]})=l\right)=$$

$$=P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t)\ge l-\delta, Z_0(0)=l\right),$$

где использовано строгое марковское свойство.

Из монотонности вероятности можем записать, что

$$\lim_{\delta\to 0+} P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t)\ge l-\delta, Z_0(0)=l\right)=P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t)\ge l, Z_0(0)=l\right).$$

Поскольку коэффициент диффузии в точке l положителен, то из свойств диффузионных процессов $P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t)\ge l,\ Z_0(0)=l\right)=0$.

Теорема доказана.

3. СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ СДУ СО СКАЧКАМИ

Вернемся к рассмотрению СДУ (1) с конечными пуассоновскими мерами. Для $i>0$ обозначим через τ_i i-й момент скачков пуассоновской меры $\mu(\Theta,[0,t])$.

Следующий результат касается интегрируемости процесса X_n.

Лемма 2. Пусть коэффициенты СДУ (1) удовлетворяют условиям У1_n)–У7_n). Тогда существует такая постоянная C, независимая от n, что для всех $t\ge 0$ и $\gamma>0$

$$E|X_n(t)|^{\gamma}<[E|X_n(0)|^{\gamma}+C\cdot t]\cdot\exp[C\cdot t].$$

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать лемму для всех $\gamma=2p$, $p\in N$.

Пусть $R>0$ фиксированное. Введем такие обозначения:

$$A_{R,t}:=\left\{\sup_{[0,t]}|X_n(s)|\le R\right\},\ 1_t:=1_{A_{R,t}}.$$

Запишем оценки

$$E[X_n(t)^{2p}1_t]\le C_p\left(E[X_n(0)^{2p}]+E\left[\left(\int_0^t b_n(X_n(s))ds\right)^{2p}1_t\right]+\right.$$

$$+E\left[\left(\int_0^t \sigma_n(X_n(s))dW(s)\right)^{2p}1_t\right]+E\left[\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f_n(s,X_n(s),\theta)\tilde\mu(d\theta,ds)\right)^{2p}1_t\right]+$$

$$\left.+E\left[\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f_n(s,X_n(s),\theta)\nu(d\theta)ds\right)^{2p}1_t\right]\right)=C_p(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5),$$

где C_p — некоторая постоянная, зависимая только от p, а $\tilde\mu(d\theta,ds)=$ $=\mu(d\theta,ds)-\nu(d\theta)ds$ — компенсированная пуассоновская мера.

Оценим каждое слагаемое отдельно:

$$A_1\le C_p\int_0^t E((1+X_n(s)^{2p})1_s)\,ds\le C_p\left(t+\int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds\right),$$

здесь использовано неравенство Иенсена и линейный рост коэффициента сноса. Далее,

$$A_2 \le E\left[\left(\int_0^t \sigma_n(X_n(s))1_s dW(s)\right)^{2p}\right] \le$$

$$\le C_p \int_0^t E((1+X_n(s)^{2p})1_s)ds \le C_p\left(t+\int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds\right),$$

где применяются неравенства Буркхольдера и Иенсена. Для слагаемого A_4 используем оценку [11, § 3.4, теорема 9]:

$$A_4 \le C_p E\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_n(s, X_n(s), \theta)^2 1_s \nu(d\theta)ds\right)^p + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_n(s, X_n(s), \theta)^2 1_s \nu(d\theta)ds\right] \le C_p t.$$

Наконец, применив ограниченность функции f_n, получим $A_5 \le C_p t$. Таким образом приходим к оценке

$$E(X_n(t)^{2p}1_t) \le C_p\left[E(X_n(0)^{2p}) + t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds\right].$$

Применяя лемму Гронуолла, имеем

$$E(X_n(t)^{2p}1_t) \le C_p[E(X_n(0)^{2p}) + t]\exp[C_p \cdot t],$$

откуда, устремив R к бесконечности, получим результат леммы 2.

Теперь результаты теоремы 2 распространим на случай процессов $\{X_n, n \ge 0\}$ со скачками, являющимися решениями СДУ (1).

Теорема 4. Пусть выполнены условия У1$_n$)–У8$_n$) и U1$_n$)–U3$_n$). Тогда для $T > 0, \varepsilon > 0$ имеет место сходимость

$$P\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) \to 0, \ n \to \infty.$$

Доказательство. Поскольку $P\left(\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty\right) = 1$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что при всех k

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0 \le t < \tau_k \wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Для доказательства этого соотношения применим индукцию по k. На промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ процесс $X_n(t)$ совпадает с вырожденным процессом $X_n^*(t)$ без скачков

$$X_n^*(t) = X_n^*(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t b_n(s, X_n^*(s))ds + \int_{\tau_k}^t \sigma_n(s, X_n^*(s))dW(s). \tag{3}$$

База индукции. Она обеспечивается тем, что на промежутке $[0, \tau_1 \wedge T)$ из теоремы 2 следует равномерная сходимость по вероятности процессов X_n^*, которые на данном промежутке совпадают с процессами X_n.

Предположение индукции. Пусть $X_n(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0(t), n \to \infty$, на $[0, \tau_k \wedge T)$.

Индуктивный шаг. Можно записать следующее равенство для некоторого $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\sup_{0 \le t < \tau_{k+1} \wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{0 \le t < \tau_{k+1} \wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon, \tau_k \le T\right) +$$

$$+ P\left(\sup_{0 \le t < \tau_{k+1} \wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon,\ \tau_k > T\right).$$

Последнее слагаемое по предположению индукции стремится к нулю, когда $n \to \infty$, поэтому сосредоточимся на первом слагаемом. Пусть $\tau_k \le T$. Из предположения индукции следует, что для всех $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n(\tau_k -) - X_0(\tau_k -)| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

В момент скачка τ_k значение процесса X_n равно

$$X_n(\tau_k) = X_n(\tau_k -) + f_n(\tau_k, X_n(\tau_k -), \theta_k).$$

Таким образом, можно записать неравенство

$$|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)| \le |X_n(\tau_k -) - X_0(\tau_k -)| +$$

$$+ |f_n(\tau_k, X_n(\tau_k -), \theta_k) - f_0(\tau_k, X_0(\tau_k -), \theta_k)|.$$

Из равномерной сходимости по вероятности $X_n(\tau_k -)$ к $X_0(\tau_k -)$, непрерывности коэффициентов f_n и сходимости U3$_n$) вытекает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

Прибавив к предыдущему результату неравенство $\sup\limits_{n \ge 0,\, t \in [0, T]} E|X_n(t)|^{2p} < \infty$, $p > 1$, являющееся следствием леммы 2, получим сходимость

$$E[|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)|] \to 0,\ n \to \infty,$$

и оценку $\sup\limits_{n \ge 0} E[|X_n(\tau_k)|^{2p}] < \infty$ для всех $p > 1$. Применив теорему 2 на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1} \wedge T)$, получим, что $X_n^*(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0^*(t)$, $n \to \infty$, на $[\tau_k, \tau_{k+1} \wedge T)$. Вместе с предположением индукции имеем сходимость $X_n(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0(t)$, $n \to \infty$, на $[0, \tau_{k+1} \wedge T)$.

Теорема доказана.

4. СХОДИМОСТЬ МОМЕНТОВ ВЫХОДА ИЗ ПОЛОСЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО СКАЧКАМИ

Получим результаты, аналогичные результатам работы [8], для случаев процессов X_n, являющихся решениями СДУ с пуассоновской мерой и нелипшицевой диффузией.

Определение 1. Введем, как и ранее, следующие моменты выхода:

$$\tau_{X_n, T}^{[l, r]} = \inf\{t \ge 0 : X_n(t) \notin [l, r]\} \wedge T,\ n \ge 0.$$

Определение 2. Моментами выхода из полосы $[l, r] : l, r \in \mathbb{R}, l < r$, процессов $X_n(t)$ и $X_0(t)$ назовем моменты остановки:

$$\tau_{X_n}^{[l, r]} = \inf\{t \in [0, \infty) : X_n(t) \notin [l, r]\},\ n \ge 0.$$

Для доказательства сходимости моментов выхода допредельных процессов из полосы к моменту выхода предельного процесса из этой же полосы сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. Для произвольных моментов, заданных в определении 1, справедлива сходимость

$$\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} \to \tau_{X_0,T}^{[l,r]},\ \delta \to 0+ \text{ по вероятности.}$$

Если дополнительно для любых $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\nu(h_{t,x}^{-1}(\{l\},\{r\}))=0$, где $h_{t,x}(y)=x+f(t,x,y)$, то имеет место сходимость

$$\tau_{X_0,T}^{[l+\delta,r-\delta]} \to \tau_{X_0,T}^{[l,r]},\ \ \delta \to 0+ \ \text{ по вероятности.}$$

Доказательство. Докажем первую сходимость. Сначала докажем, что

$$P(\exists\, k \ge 1 : \tau_k \le T \ \text{ и } \ X_0(\tau_k) \in [l-\delta,\ l) \cup (r,\ r+\delta]) \to 0,\ \ \delta \to \infty\,.$$

Введем событие

$$A_{k,\delta} = \{X_0(\tau_k) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]\} =$$
$$= \{X_0(\tau_k -) + f(\tau_k, X_0(\tau_k -), \xi_k) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]\}\,.$$

Поскольку ξ_k не зависит от

$$F_{\tau_k -} = \sigma\{\{X_t \in B\} \cap \{\tau_k < t\},\, B \in B(\mathbb{R}),\, t \ge 0\},$$

а $X_0(\tau_k -)$ и τ_k измеримы относительно $\mathcal{F}_{\tau_k -}$, то

$$P(A_{k,\delta}) = E[E[1_{A_{k,\delta}} \mid F_{\tau_k -}]] =$$
$$= E\left[\int\limits_{\mathbb{R}} 1\,\{X_0(\tau_k -) + f(\tau_k, X_0(\tau_k -),\, y) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]\}\, F_\xi(dy)\right].$$

Очевидно,

$$\{X_0(\tau_k -) + f(\tau_k, X_0(\tau_k -),\, y) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]\} \downarrow \varnothing,\ \ \delta \to 0+,$$

и по теореме Лебега о мажорированной сходимости имеем $P(A_{k,\delta}) \to 0$, $\delta \to 0+$. Тогда для любого $m \ge 1$

$$P\,(\exists\, k \ge 1 : \tau_k \le T,\ \ X_0(\tau_k) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]) \le$$
$$\le P(\exists\, k = 1, 2, \ldots, m : X_0(\tau_k) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]) + P(\tau_m \le T) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} P(A_{k,\delta}) + P(\tau_m \le T)\,.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{\delta \to 0+}}\ P(\exists\, k \ge 1 : \tau_k \le T,\, X_0(\tau_k) \in [l-\delta, l) \cup (r, r+\delta]) \le P(\tau_m \le T)\,.$$

Устремляя $m \to \infty$, получаем желаемую сходимость.

Обозначим

$$A_\delta = \{\exists\, k \ge 1 : \tau_k \le T,\, X_0(\tau_k) \in [l-\delta) \cup (r, r+\delta]\} = \bigcup_{k \ge 1} A_{k,\delta}\,.$$

Докажем по индукции, что

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,\, r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\, \overline{A}_\delta,\, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_k) \to 0,\ \ \delta \to 0+\,.$$

Для $k = 1$ из теоремы 3 имеем

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,\, r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_1) \to 0,\ \ \delta \to 0+\,.$$

Осуществим индуктивный переход от $k-1$ до k. Имеем

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,\, r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\, \overline{A}_\delta,\, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_{k-1}) \to 0,\ \ \delta \to 0+\,.$$

Необходимо доказать, что

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \overline{A}_\delta,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in[\tau_{k-1},\tau_k])\to 0,\ \ \delta\to 0+. \tag{4}$$

На событии $\overline{A}_\delta\cap\{\tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in[\tau_{k-1},\tau_k]\}$ выполняется или

$$\tau_{X_0,T}^{[l,r]}=\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}=\tau_{k-1},$$

или

$$\tau_{k-1}<\tau_{X_0,T}^{[l,r]}\le\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}.$$

Следовательно,

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \overline{A}_\delta,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in[\tau_{k-1},\tau_k])\le$$

$$\le P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}=\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]})+$$

$$+P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in(\tau_{k-1},\tau_k)).$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства равно нулю. Для второго слагаемого по теореме 3 имеем

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in(\tau_{k-1},\tau_k))\to 0,\ \ \delta\to 0+.$$

Итак, мы доказали (4).

Теперь для произвольного $k>1$ запишем

$$P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon)\le$$

$$\le P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \overline{A}_\delta,\ \tau_{X_0,T}^{l,r}<\tau_k)+P(A_\delta)+P(\tau_k\le T).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{\delta\to 0+}}\,P(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon)\le P(\tau_k\le T).$$

Устремив $k\to\infty$, получим нужное утверждение.

Для второй сходимости единственным отличием в доказательстве является то, что при $\delta\to 0+$

$$\{X(\tau_k-)+f(\tau_k,X_0(\tau_k-),y)\in[l,l+\delta)\cup(r-\delta,r]\}\to$$

$$\to\{X(\tau_k-)+f(\tau_k,X_0(\tau_k-),y)\in\{l\},\{r\}\}=\{h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(\xi_k)\in\{l\},\{r\}\}\ne\varnothing.$$

Запишем

$$P(h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(\xi_k)\in\{l\},\{r\})=$$

$$=E(E(1\{h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(\xi_k)\in\{l\},\{r\}\}\,|\,F_{\tau_k-}))=E\left(\int_{\mathbb{R}}h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(y)\nu(dy)\right)=0.$$

Теорема доказана.

Докажем основную теорему сходимости моментов выхода из полосы.

Теорема 5. Пусть выполняются условия У1$_n$)–У8$_n$) и U1$_n$)–U3$_n$). Тогда для произвольного $T>0$ справедливы следующие утверждения:

а) для моментов выхода $\tau_{X_n,T}^{[l,r]},\ n\ge 0$, имеет место сходимость

$$\forall\,\varepsilon>0: P(|\tau_{X_n,T}^{[l,r]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon)\to 0,\ \ n\to\infty;$$

б) для моментов выхода $\tau_{X_n,T}^{[-\infty,r]},\ n\ge 0$, имеет место сходимость

$$\forall\,\varepsilon>0: P(|\tau_{X_n,T}^{[-\infty,r]}-\tau_{X_0,T}^{[-\infty,r]}|>\varepsilon)\to 0,\ \ n\to\infty.$$

Доказательство п. а). Пункт б) доказывается аналогично.

Пусть $\delta \in (0, (r-l)/2)$. Обозначим

$$A_{\varepsilon,\delta} = \{|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta, r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| \le \varepsilon\} \cap \{|\tau_{X_0,T}^{[l+\delta, r-\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| \le \varepsilon\},$$

$$B_{n,\delta} = \left\{ \sup_{t \in [0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| \le \delta \right\}.$$

На событии $B_{n,\delta}$ выполняется

$$\tau_{X_0,T}^{[l+\delta, r-\delta]} \le \tau_{X_n,T}^{[l,r]} \le \tau_{X_0,T}^{[l-\delta, r+\delta]}.$$

Тогда $B_{n,\delta} \cap A_{\varepsilon,\delta} \subset \{|\tau_{X_n,T}^{[l,r]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| \le \varepsilon\}$. Следовательно, $P(|\tau_{X_n,T}^{[l,r]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon) \le$ $\le P(\overline{B}_{n,\delta}) + P(\overline{A}_{\varepsilon,\delta})$. Согласно теореме 1 имеем $P(\overline{B}_{n,\delta}) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $\overline{\lim_{n\to\infty}} P(|\tau_{X_n,T}^{[l,r]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon) \le P(\overline{A}_{\varepsilon,\delta})$. Устремив $\delta \to 0+$ и используя лемму 3, приходим к желаемому утверждению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены следующие результаты:

- равномерная сходимость по вероятности решений СДУ со скачками при условиях сходимости коэффициентов;
- сходимость решений СДУ со скачками в среднем любого порядка $\gamma > 0$ при условиях сходимости коэффициентов;
- непрерывность по границам полосы моментов выхода из полосы решений СДУ со скачками;
- сходимость моментов выхода из полосы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Novikov A.S. On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments // Stochastics. — 2007. — **79**. — P. 393–406.
2. Мороз А.Г., Шевченко Г.М. Задача оптимальної зупинки для процесів із незалежними приростами // Укр. мат. вісник. — 2009. — **6**. — С. 126–134.
3. Li C.W. Almost sure convergence of stochastic differential equations of jump-diffusion type // Seminar on stochastic analysis, random fields and applications. — Progress in Probability. — 1995. — **36**. — P. 187–197.
4. Gal'chuk L.I. Strong uniqueness of solution of stochastic integral equations for semimartingale components // Math. Notes. — 1984. — **35**. — P. 157–161.
5. Protter P. Stochastic integration and differential equations. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2003. — 436 p.
6. Oksendal B., Sulem A. Applied stochastic control of jump diffusions. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2005. — 281 p.
7. Мішура Ю.С., Посашкова С.В., Шевченко Г.М. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неоднорідними коефіцієнтами та неліпшицевою дифузією // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2008. — **79**. — С. 105–113.
8. Мішура Ю.С., Томашик В.В. Збіжність моментів виходу дифузійних процесів зі смуги // Там же. — 2013. — **88**. — С. 95–105.
9. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
10. Kiyosi Ito, McKean H.P. Diffusion processes and their sample paths. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1965. — 321 p.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.

Поступила 25.09.2013