УДК 517.977

А.А. ЧИКРИЙ, Г.Ц. ЧИКРИЙ

О МАТРИЧНЫХ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ[1]

Аннотация. Введены матричные разрешающие функции для исследования игровых задач динамики. Установлены достаточные условия сближения траектории конфликтно-управляемого процесса с цилиндрическим терминальным множеством. Рассмотрены случаи использования преследователем квазистратегий и контруправлений. Проведено сравнение гарантированных времен окончания игры для разных схем метода. Теоретические результаты иллюстрируются на модельном примере с простым движением в плоскости.

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, разрешающая функция, многозначное отображение, условие Понтрягина, теорема измеримого выбора, экстремальный селектор, H-выпуклое множество, собственное число, суперпозиционная измеримость, цилиндрическое терминальное множество, интеграл Аумана.

ВВЕДЕНИЕ

Наряду с методами динамических игр [1–5], раскрывающими структуру игры и ориентированными на построение оптимальных стратегий, существуют подходы, нацеленные на гарантированный результат. Последнее обстоятельство, по-видимому, более оправдано с практической точки зрения.

К таким подходам следует отнести, прежде всего, первый прямой метод Понтрягина [1, 6] и метод разрешающих функций [7–9]. Эти методы обеспечивают достаточные условия завершения игры за конечное время из заданных начальных положений. Они базируются на одном и том же принципе построения управления первого игрока, использующем условие Понтрягина, на его основе — теоремы измеримого выбора [10, 11], и тесно связаны между собой. Предпосылкой к появлению метода разрешающих функций была задача Понтрягина–Мищенко [1] об убегании одного игрока от группы из ν преследователей в пространстве R^n и найденная при ее решении минимаксиминная функция $\omega(n,\nu)$ [12, 13], которая послужила базой для формализации ситуации окружения для простых движений [14] и способствовала развитию впоследствии теории группового преследования [7, 15–17]. Со временем было установлено, что метод разрешающих функций дает строгое математическое обоснование правила параллельного сближения, а также способа преследования по лучу [18]. Формализация игровой задачи [19] через представление решения позволила в единой схеме рассмотреть конфликтно-управляемые системы различной природы: процессы, описываемые системами дифференциально-разностных уравнений [20], интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [20], уравнений с дробными производными [19, 21–23], импульсные системы и системы переменной структуры [24]. Вместе с геометрическими ограничениями на управления рассмотрены различные интегральные ограничения [25], а также нестационарные конфликтно-управляемые процессы [26].

Параллельно с расширением сферы применимости данного метода проведены исследования по оптимизации гарантированного времени сближения, связанные с выбором экстремальных селекторов многозначного отображения Понтрягина [27]. В связи с обоснованием метода и закона выбора управлений первого игрока большое значение имеет свойство $L\times B$-измеримости специальных много-

[1]Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф53.1/006).

значных отображений [28], играющих ключевую роль и обеспечивающих в итоге суперпозиционную измеримость функций управления. Привлекательной стороной метода разрешающих функций является также то обстоятельство, что он позволяет эффективно использовать современную технику нелинейного анализа (многозначных отображений и их селекторов) [10, 11, 29, 30] для обоснования игровых конструкций и получения с их помощью необходимых результатов.

Пытаясь понять содержательную суть метода, его геометрию, можно сделать вывод, что разрешающие функции, лежащие в основе метода, осуществляют притяжение сдвинутой телесной части терминального множества к пересечению с некоторым многозначным отображением, связанным с игрой. Это притяжение происходит лишь в конусе, натянутом на упомянутое множество. Последнее обстоятельство ограничивает возможности для маневра первому игроку. По этой причине в данной работе вместо скалярной рассматривается матричная разрешающая функция диагонального вида, с, вообще говоря, различными собственными числами. Тем самым воздействие матрицы по разным направлениям может быть различным. Это дает дополнительные возможности в плане завершения игры, что демонстрируется на примере с простыми движениями в плоскости, когда скалярные разрешающие функции не приводят к результату, а использование матричных позволяет закончить игру за конечное время.

Данная статья примыкает к работам [1–9, 15–17, 19–26, 31–36] и продолжает исследования [8, 27, 28].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс в конечномерном евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$,

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Вектор-функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, $R_+ = \{t : t \geq 0\}$, измерима по Лебегу и почти везде ограниченна, матричная функция $\Omega(t,\tau)$ определена в треугольнике

$$\Delta = \{(t,\tau): t \geq \tau \geq 0\},$$

измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, $U \in K(R^m)$, $V \in K(R^l)$, m, l — натуральные числа.

Допустимые управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, — измеримые функции времени.

Задано терминальное множество M^* цилиндрического вида

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство в R^n, а M — компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в R^n, $M \in K(L)$.

Первый игрок (u) стремится вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество за кратчайшее время, а второй (v) — максимально оттянуть этот момент или вообще избежать встречи траектории с множеством.

Приняв сторону первого игрока, установим достаточные условия для обеспечения ему определенного гарантированного результата. Будем считать, что если игра (1), (2) происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в текущий момент t выбираем на основе информации о $g(T)$ и предыстории $v_t(\cdot)$, $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$, в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ u(t) \in U,\ t \in [0, T], \tag{3}$$

или контруправления [2, 5]

$$u(t) = u(g(T), v(t)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U,$$

предписанного стробоскопической стратегией [37].

Заметим, что представление решения динамической системы в виде (1) позволяет в единой схеме рассмотреть широкий круг функционально-дифференциальных систем, функционирующих в условиях конфликтного взаимодействия. Особенность представления (1) состоит в том, что данные о начальном состоянии процесса и блоке управления отделены и аддитивно входят в правую часть выражения (1). Такая ситуация имеет место, когда справедлива формула Коши, например для квазилинейных процессов [2, 7]. Для систем интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных уравнений, импульсных систем, систем уравнений с дробными производными функция $g(t)$ и матричная функция $\Omega(t, \tau)$ в представлении (1) имеют конкретный вид и отражают соответствующий тип уравнения.

Обозначим π ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\},$$

рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v),\ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно.

Условие Понтрягина. Отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ и замкнутозначно.

В силу свойств параметров конфликтно-управляемого процесса (1), (2) $W(t, \tau, v)$ является измеримым по τ, $\tau \in [0, t]$, многозначным отображением. Тогда $W(t, \tau)$ измеримо по τ, $\tau \in [0, t]$.

Из условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [10] вытекает, что при любом $t > 0$ существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$ такой, что $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$.

Обозначим

$$\Gamma_t = \{\gamma(t, \tau) : \gamma(t, \tau) \in W(t, \tau), \tau \in [0, t]\},\ \Gamma = \bigcup_{t \ge 0} \Gamma_t,$$

выберем некоторый измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$ из Γ_t и введем функцию

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau.$$

В силу исходных предположений селектор $\gamma(t, \tau)$ является суммируемой по τ, $\tau \in [0, t]$, функцией при любом $t > 0$.

Обозначим $\nu = \dim L$ и рассмотрим произвольную квадратную диагональную матрицу A порядка ν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_\nu \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\},\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, \nu, \tag{4}$$

которую называют матрицей собственных значений [38]. Учитывая диагональный вид матрицы A, ее можно отождествить с вектором $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu)$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v) = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu), \alpha_i \geq 0 : [W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] \bigcap$$
$$\bigcap A[M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))] \neq \varnothing\},$$
$$\mathfrak{A}_\nu : \Delta \times V \to 2^{R_+^\nu}, \; R_+^\nu = \underbrace{R_+ \times \cdots \times R_+}_{\nu}. \tag{5}$$

Функцию $g(t)$ и выбранный селектор $\gamma(t,\cdot)$ считаем фиксированными. Поскольку выполнено условие Понтрягина, в силу предположений о параметрах процесса (1), (2) отображение $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$ замкнутозначно [8, 28] и всегда содержит ν-мерный нуль, так как $0 \in W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau) \;\; \forall (t,\tau) \in \Delta, \; v \in V$.

Матричная функция

$$A(t,\tau,v) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t,\tau,v) & & & 0 \\ & \alpha_2(t,\tau,v) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_\nu(t,\tau,v) \end{pmatrix}, \; \alpha_i : \Delta \times V \to R_+,$$

фигурирующая в пересечении из (5), зависит от $(t,\tau) \in \Delta, \; v \in V$ и однозначно определяется своими диагональными элементами, образующими селектор $\alpha(t,\tau,v) = (\alpha_1(t,\tau,v), \ldots, \alpha_\nu(t,\tau,v))$ многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$. В то же время вектор-функция $\alpha(t,\tau,v)$ представляет собой набор из ν собственных чисел матрицы $A(t,\tau,v)$, определенных на множестве $\Delta \times V$.

Если в некоторый момент t имеем $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \in M$, то $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v) = \underbrace{([0,+\infty) \times \cdots \times [0,+\infty))}_{\nu}$ при любых $\tau \in [0,t], \; v \in V$.

Образуем скалярную функцию

$$\widetilde{\alpha}(t,\tau,v) = \sup_{\alpha(t,\tau,v) \in \mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)} \min_{i=\overline{1,\nu}} \alpha_i(t,\tau,v), \; \widetilde{\alpha} : \Delta \times V \to R_+. \tag{6}$$

В предположении, что точная верхняя грань достигается, обозначим

$$\mathfrak{M}(t,\tau,v) = \{\alpha(t,\tau,v) : \min_{i=\overline{1,\nu}} \alpha_i(t,\tau,v) = \widetilde{\alpha}(t,\tau,v)\}$$

маргинальное множество селекторов из отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$.

Из [28] следует, что при сделанных предположениях отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$ и $\mathfrak{M}(t,\tau,v)$ $L \times B$-измеримы по совокупности (τ,v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, и замкнутозначны при любом t. Селекторы отображения $\mathfrak{M}(t,\tau,v)$ назовем экстремальными. Среди них по теореме измеримого выбора [10] существует хотя бы один, являющийся $L \times B$-измеримым по (τ,v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, при любом t. Зафиксируем его для дальнейшего и обозначим $\alpha^*(t,\tau,v)$, $\alpha^* : \Delta \times V \to R_+^\nu$

Рассмотрим множество

$$T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \geq 0 : \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \widetilde{\alpha}(t,\tau,v(\tau)) d\tau \geq 1\} \tag{7}$$

и функцию $t_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Точная нижняя грань интеграла берется по всем допустимым управлениям второго игрока. Заметим, что поскольку $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$ — $L \times B$-измеримое отображение по совокупности (τ,v), то

$L \times B$-измеримой по (τ, v) будет и функция $\widetilde{\alpha}(t, \tau, v)$, а следовательно, она суперпозиционно измерима [8]. Поэтому интеграл в соотношении (7) имеет смысл.

Из предыдущего следует, что если $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то $\widetilde{\alpha}(t, \tau, v) = +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, и в этом случае значение интеграла в (7) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в выражении (7) не выполняется для $t > 0$, полагаем $T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Условие 1. Если $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$, то для экстремального селектора $\alpha^*(T, \tau, v)$ его усеченные селекторы $\beta(T, \tau, v) = (\beta_1(T, \tau, v), \ldots, \beta_\nu(T, \tau, v))$,

$$\beta_i(T, \tau, v) = \begin{cases} \alpha_i^*(T, \tau, v), & \tau \in [0, t_i), \\ 0, & \tau \in [t_i, T], \end{cases}$$

являются селекторами многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, для любых $t_i \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, \nu$.

Замечание 1. Для $t_i = 0$ или $t_i = T$, $i = 1, \ldots, \nu$, условие 1 выполняется автоматически в силу условия Понтрягина и построений. Следовательно, оно касается лишь внутренних точек отрезка $[0, T]$.

Обозначим $x_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, \nu$, причем единица стоит на *i*-м месте, единичные собственные векторы диагональной матрицы *A*. Они образуют базис в пространстве *L*. Положим

$$H = \{\pm x_i,\ i = 1, \ldots, \nu\}$$

и будем говорить, что множество M, $M \subset L$, является H-выпуклым множеством [39], если

$$M = \bigcap_{x_i \in H} \{x \in L : (x, x_i) \le W_M(x_i)\}$$

есть пересечение 2ν полупространств, т.е. является параллелепипедом, где $W_M(x_i) = \sup\limits_{x \in M}(x, x_i)$ — опорная функция множества M [40], которая, в частности, может принимать значения $\pm\infty$. Из выпуклого анализа известно, что если H — не конечное множество векторов, а единичная сфера в *L*, то H-выпуклость становится обычной выпуклостью.

Условие 2. Множество M является H-выпуклым.

Отметим, что если множество M H-выпукло, то его относительная внутренность в L не пуста.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАВЕРШЕНИЯ ИГРЫ

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, а также условия 1 и 2. Кроме того, для заданной функции $g(\cdot)$ и выбранного селектора $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ множество $T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$ и $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot\,,\,\cdot))$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество (2) в момент T с помощью управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v : [0, T] \to V$, — произвольная измеримая функция. Исследуем сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \,\overline{\in}\, M$. Для этого рассмотрим $L \times B$-измеримый экстремальный селектор $\alpha^*(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, многозначного отображения $\mathfrak{M}(T, \tau, v)$. Для его скалярных компонент имеет место неравенство

$$\alpha_i^*(T, \tau, v) \ge \min_{i=1,\ldots,\nu} \alpha_i^*(T, \tau, v) \ \ \forall\, i = 1, \ldots, \nu,\ \ v \in V.$$

Поэтому из неравенства в соотношении (7) получим

$$\int_0^T \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau))d\tau \geq 1 \ \ \forall\, i=1,\ldots,\nu,\ \ v(\cdot). \tag{8}$$

Введем набор контрольных функций

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau))d\tau,\ \ i=\overline{1,\nu}.$$

Все функции $\alpha_i^*(T,\tau,v)$, $i=\overline{1,\nu}$, $L\times B$-измеримы по совокупности (τ,v), а поэтому суперпозиционно измеримы. Функции $h_i(t)$, $i=\overline{1,\nu}$, абсолютно непрерывны, они не возрастают, так как $\alpha_i^*(T,\tau,v)$ неотрицательны. К тому же $h_i(0)=1$. Но поскольку $h_i(T)\leq 0$ в силу неравенства (8), существуют такие моменты t_i^*, $0\leq t_i^*\leq T$, $i=1,\ldots,\nu$, что $h_i(t_i^*)=0$, $i=\overline{1,\nu}$. Очевидно, что $t_i^* = t_i^*(v(\cdot))$.

Промежутки времени $[0,t_i^*)$ и $[t_i^*,T]$ назовем активными и пассивными соответственно.

Опишем способ управления первым игроком. Для этого введем усеченные функции

$$\beta_i(T,\tau,v) = \begin{cases} \alpha_i^*(T,\tau,v), & \tau\in[0,t_i^*), \\ 0, & \tau\in[t_i^*,T], \end{cases} \qquad i=1,\ldots,\nu,$$

и рассмотрим компактозначное отображение

$$U(\tau,v) = \{u\in U : \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in \mathrm{B}(T,\tau,v)[M-\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\}, \tag{9}$$

$$\tau\in[0,T],\ \ v\in V,$$

где матричная функция $\mathrm{B}(T,\tau,v)$ имеет вид

$$\mathrm{B}(t,\tau,v) = \begin{pmatrix} \beta_1(T,\tau,v) & & & 0 \\ & \beta_2(T,\tau,v) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_\nu(T,\tau,v) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

причем ее диагональные элементы обладают свойством $\int_0^T \beta_i(T,\tau,v(\tau))d\tau = 1$, $i=1,\ldots,\nu$. В силу условия 1 вектор-функция $\beta(T,\tau,v) = (\beta_1(T,\tau,v),\ldots,\beta_\nu(T,\tau,v))$ является $L\times B$-измеримым селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T,\tau,v)$, поэтому отображение $U(\tau,v)$ имеет непустые образы и $L\times B$-измеримо [28]. По теореме измеримого выбора [10] в нем существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией.

Обозначим $u(\tau)=u(\tau,v(\tau))$ и положим управление первого игрока на интервале $[0,T]$ равным $u(\tau)$.

В случае $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ управление первого игрока выберем аналогично предыдущей ситуации с той лишь разницей, что матричную функцию $\mathrm{B}(T,\tau,v)$ в соотношении (9) положим равной нуль-матрице.

Далее покажем, что при выборе управлений первым игроком по указанным правилам траектория системы (1) будет приведена на терминальное множество в момент T при любых допустимых управлениях второго игрока.

Если $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \,\overline{\in}\, M$, то из представления (1) имеем

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \pi \Omega(T, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau. \tag{11}$$

Используя соотношения (9)–(11), получаем включение

$$\pi z(T) \in \left(E - \int_0^T \mathrm{B}(T, \tau, v(\tau))\, d\tau \right) \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) + \int_0^T \mathrm{B}(T, \tau, v(\tau)) M d\tau, \tag{12}$$

где E — единичная матрица.

Поскольку M является H-выпуклым множеством и $\int_0^T \mathrm{B}(T, \tau, v(\tau)) d\tau = E$, из [39] следует

$$\int_0^T \mathrm{B}(T, \tau, v(\tau)) M d\tau = M,$$

а значит, $\pi z(T) \in M$ и поэтому $z(T) \in M^*$.

Пусть $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$. Тогда из включения (12) при нуль-матрице $\mathrm{B}(T, \tau, v(\tau))$ получим

$$\pi z(T) = \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M.$$

Замечание 2. Если вместо условия 2 имеем включение

$$\int_0^T \mathrm{B}(T, \tau, v(\tau)) M d\tau \subset M \quad \forall\, v(\cdot)\,, \tag{13}$$

где $\mathrm{B}(T, \tau, v)$ задается выражением (10), то теорема 1 остается справедливой. При этом множество $M \in K(L)$, вообще говоря, не является H-выпуклым.

Включение (13) выполнено и переходит в поточечное равенство, если терминальное множество M^* является аффинным многообразием ($M = \{m\}$), а при $m = 0$ — линейным подпространством. Последняя ситуация чаще всего рассматривается в игровых задачах преследования–убегания и соответствует точному совпадению координат игроков. В частности, если $M^* = \{0\}$, то полагаем $M_0 = M = \{0\}$. Тогда $L = R^n$, а π — оператор тождественного преобразования. Включение (13) выполнено автоматически.

Замечание 3. В дифференциальных играх представляет интерес задача об ε-захвате по геометрическим координатам. Она соответствует случаю, когда M является шаром радиуса ε. Для применения теоремы 1 к анализу игры достаточно использовать любой параллелепипед M_p, $M_p \subset M$, в качестве вспомогательного множества и приводить траекторию процесса на множество $M_0 + M_p$, автоматически решив при этом исходную задачу.

Замечание 4. Рассматриваемый в работах [7–9] метод разрешающих функций является частным случаем предлагаемой схемы и соответствует случаю, когда матрица A в (4) простая, т.е. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\nu = \alpha$ и $A = \alpha E$. Содержательно данный метод на примере формулы (5), где $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\nu = \alpha$, означает, что множество $M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$ притягивается к пересечению с множеством $W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)$, находясь в конусе, натянутом на $M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$. В случае матрицы A с различными диагональными элементами в методике заложены более широкие возможности.

Замечание 5. Поскольку любая квадратная матрица может быть приведена преобразованием подобия к треугольному виду, диагональные элементы которого являются собственными числами исходной матрицы, а любая нормальная матрица ($AA^* = A^* A$) — к диагональному виду [38], рассмотренная ситуация открывает путь для существенных обобщений с использованием в (5) более сложных по структуре притягивающих матриц. Так как речь идет о вещественных матрицах, в частности, к диагональному виду могут быть приведены любые симметричные и ортогональные матрицы [38].

ЗАВЕРШЕНИЕ ИГРЫ В КЛАССЕ КОНТРУПРАВЛЕНИЙ

Рассмотренная ранее схема сближения с диагональной матричной функцией $A(t, \tau, v)$ является обобщением основной схемы метода разрешающих функций [7, 8]. Как видно из доказательства теоремы 1, преследователь в момент t использует информацию о предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего, что предписывается квазистратегией [5].

Данная информация необходима для определения моментов переключения t_i^*, $i = 1, \ldots, \nu$, прерывающих накопление функций $\alpha_i^*(t, \tau, v)$ и разделяющих соответственно активные и пассивные участки сближения. На этих же промежутках преследователь применяет контруправления, определяемые стробоскопической стратегией [37]. Далее найдем условия на параметры процесса (1), (2), при которых сближение можно реализовать в классе контруправлений, не используя предысторию управления убегающего.

Условия формулируются для некоторого фиксированного момента времени T, $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$.

Условие 3. Если $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M$, а $\alpha^*(T, \tau, v)$ — экстремальный селектор отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$, то любая $L \times B$-измеримая вектор-функция $\alpha(T, \tau, v)$, компоненты которой удовлетворяют условию

$$0 \leq \alpha_i(T, \tau, v) \leq \alpha_i^*(T, \tau, v), \ \tau \in [0, T], \ v \in V, \ i = 1, \ldots, \nu,$$

является селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)$.

Нетрудно видеть, что условие 3 — существенно более жесткое предположение, чем условие 1. Оно является аналогом условия выпуклозначности в методе разрешающих функций [8].

Условие 4. При $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M$ функция $\inf\limits_{v \in V} \widetilde{\alpha}(T, \tau, v)$ измерима по $\tau \in [0, T]$ и справедливо равенство

$$\inf_{v(\cdot)} \int_0^T \widetilde{\alpha}(T, \tau, v(\tau)) d\tau = \int_0^T \inf_{v \in V} \widetilde{\alpha}(T, \tau, v) d\tau.$$

Теорема 2. Пусть для игровой задачи сближения (1), (2) выполнено условие Понтрягина и множество M является выпуклым, причем для заданной функции $g(\cdot)$ и селектора $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ существует число $T > 0$, $T \in T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$, такое, что выполнены условия 3 и 4.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество (2) в момент T с помощью некоторого контруправления.

Доказательство. Рассмотрим случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M$. С учетом условия 4 обозначим

$$\alpha(T) = \int_0^T \alpha_*(T, \tau) d\tau, \ \alpha_*(T, \tau) = \inf_{v \in V} \widetilde{\alpha}(T, \tau, v),$$

$$\widetilde{\alpha}(T, \tau, v) = \sup_{\alpha(T, \tau, v) \in \mathfrak{A}_\nu(T, \tau, v)} \min_{i = \overline{1, \nu}} \alpha_i(T, \tau, v),$$

и положим $\overline{\alpha}(T, \tau) = {}^1\!/_{\alpha(T)} \cdot \alpha_*(T, \tau)$.

Поскольку $\alpha(T) \geq 1$ по определению,

$$\overline{\alpha}(T,\tau) \leq \alpha_*(T,\tau) \leq \alpha_i^*(T,\tau,v) \ \ \forall v \in V, \ i = 1, \ldots, \nu,$$

$\alpha_i^*(T,\tau,v)$ — координаты экстремального селектора $\alpha^*(T,\tau,v)$, в силу условия 3 вектор-функция $\alpha_0(T,\tau) = \underbrace{(\overline{\alpha}(T,\tau), \ldots, \overline{\alpha}(T,\tau))}_{\nu}$ является селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(T,\tau,v)$ при любом $v \in V$. Введем многозначное отображение

$$U^*(\tau,v) = \{u \in U : \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v) - \gamma(T,\tau) \in A(T,\tau)[M - \xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\}, \tag{14}$$

где

$$A(T,\tau) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}(T,\tau) & & & 0 \\ & \overline{\alpha}(T,\tau) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overline{\alpha}(T,\tau) \end{pmatrix} = \overline{\alpha}(T,\tau)E.$$

Так как $\alpha_0(T,\tau) \in \mathfrak{A}_\nu(T,\tau,v)$, $v \in V$, $\tau \in [0,T]$, отображение $U^*(\tau,v)$ принимает непустые значения. Оно замкнутозначно и $L \times B$-измеримо по совокупности (τ,v) [28]. Следовательно, по теореме об измеримом выборе в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u^*(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией.

Положим управление преследователя равным

$$u^*(\tau) = u^*(\tau, v(\tau)), \ \tau \in [0,T],$$

где $v(\tau)$, $\tau \in [0,T]$, — произвольное допустимое управление убегающего.

В случае $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot)) \in M$ выберем управление первого игрока на промежутке $[0,T]$ в виде $u_0^*(\tau) = u_0^*(\tau, v(\tau))$, где $u_0^*(\tau,v)$ — некоторый измеримый селектор отображения $U^*(\tau,v)$ с нулевой матричной функцией $A(T,\tau)$.

Исследуем поведение траектории системы (1) при указанных правилах выбора управления первым игроком.

Если $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot)) \overline{\in} M$, то из равенства (11), учитывая (14), получаем включение

$$\pi z(T) \in \left[1 - \int_0^T \overline{\alpha}(T,\tau)d\tau\right]\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot)) + \int_0^T \overline{\alpha}(T,\tau)Md\tau. \tag{15}$$

Так как $M \in \operatorname{co}K(L)$, а $\overline{\alpha}(T,\tau)$, $\tau \in [0,T]$, — неотрицательная функция и $\int_0^T \overline{\alpha}(T,\tau)d\tau = 1$, имеем $\int_0^T \overline{\alpha}(T,\tau)Md\tau = M$ и, следовательно, $\pi z(T) \in M$.

Следствие 1. В условиях теоремы 2 метод можно реализовать с помощью скалярной разрешающей функции. Более того, одним из экстремальных селекторов является функция, не зависящая от v.

Пример с простыми движениями. Проиллюстрируем теорему 1 с учетом замечания 2.

Пусть динамика объекта задается выражением

$$\dot{z} = u - v, \ z \in R^2, \ u \in U, \ v \in V,$$

где

$$U = \left\{ (x,\, y) \in R^2 : y = 2x,\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\},$$

$$V = \left\{ (x,\, y) \in R^2 : y = 2x,\ x \in \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] \right\},\ \ z = (x,\, y),$$

а терминальное множество M^* — начало координат. Ограничимся рассмотрением начальных положений z_0 таких, что

$$-z_0 \in \{(x,\, y) : x \ge 0,\ y \ge 0\} = R_+^2 .$$

Применим схему метода разрешающих функций. Траекторию исходного конфликтно-управляемого процесса можно представить в виде

$$z(t) = z_0 + \int_0^t (u(\tau) - v(\tau))\, d\tau.$$

Следовательно, $g(t) = z_0$, $\Omega(t, \tau) = E$, а $\varphi(u, v) = u - v$, $n = \nu = 2$. Кроме того, $M^* = M_0 = M = \{0\}$. Поэтому $L = R^2$, а ортопроектор $\pi = E$. Условие Понтрягина:

$$W(t, \tau) = U \overset{*}{-} V = \{(x,\, y) \in R^2,\ \ y = 2x,\ x \in [0, 1/2]\} \ne \varnothing,\ U \overset{*}{-} V = \{z : z + V \subset U\},$$

и имеет место полное выметание [1, 7]: $U \overset{*}{-} V + V = U$. Поскольку множество $U \overset{*}{-} V$ содержит нуль, для простоты селектор $\gamma(t, \tau)$ выберем тождественно равным нулю: $\gamma(t, \tau) \equiv 0$. Тогда $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = z_0$, а многозначное отображение $\mathfrak{A}_2(t, \tau, v)$ имеет вид

$$\mathfrak{A}_2(t, \tau, v) = \mathfrak{A}_2(v) = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2),\, \alpha_i \ge 0 : -\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} z_0 \in U - v \right\}. \tag{16}$$

В данном примере все отображения не зависят от t и τ.

Для того чтобы лучше представить действие матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, заметим, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. осуществляется проектирование на оси абсцисс и ординат с последующим умножением соответственно на числа α_1, α_2 и сложением.

Рассмотрим отображение (16).

Для того чтобы провести вычисления до конца, зафиксируем $-z_0 = (3, 3)$. Тогда

$$\mathfrak{A}_2(v^0) = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_2 = 2\alpha_1,\, \alpha_1 \in [0, 1/6]\},\ \ v^0 = (0, 0),$$

$$\mathfrak{A}_2(v^1) = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_2 = 2\alpha_1,\, \alpha_1 \in [0, 1/3]\},\ \ v^1 = (-1/2, -1).$$

Экстремальными селекторами отображений $\mathfrak{M}(v^0)$ и $\mathfrak{M}(v^1)$, где $\mathfrak{M}(t, \tau, v) = \mathfrak{M}(v)$, являются векторы

$$\alpha^*(v^0) = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right),\ \ \alpha^*(v^1) = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

где $\alpha^*(t, \tau, v) = \alpha^*(v)$.

Соответственно, учитывая $\widetilde{\alpha}(t,\tau,v)=\widetilde{\alpha}(v)$, получаем $\widetilde{\alpha}(v^0)=\frac{1}{6}$, $\widetilde{\alpha}(v^1)=\frac{1}{3}$.

Минимум по $v(\cdot)$ в соотношении (7) для данного примера достигается на постоянных управлениях убегающего, а именно при $v=(0,0)$, поэтому

$$\inf_{v(\cdot)}\int_0^t \widetilde{\alpha}(t,\tau,v(\tau))d\tau=\frac{t}{6},$$

а следовательно, минимальное гарантированное время $t_2(z_0,0)=6$.

Для любой другой начальной позиции z_0 в плоскости легко посчитать, аналогично предыдущему, минимальное гарантированное время сближения.

Формально условие 1 для данного примера не выполнено, оно имеет место лишь при $t_1=t_2$. Это более слабое предположение, но его достаточно для решения задачи в силу специфики областей управления. Условие 2 также не имеет места, но справедливо включение (13), которое приведено в замечании 2. Условие 3 не выполняется в силу связующего соотношения $\alpha_2=2\alpha_1$, и теорема 2 не имеет места для начальной точки, у которой координаты связаны соотношением $y_0\neq 2x_0$. Однако если начальная точка z_0 не лежит на прямой $y=2x$, то скалярная разрешающая функция, соответствующая простой матрице $A=\alpha E$ (равные диагональные элементы), равна нулю. Следовательно, в этом случае использование матричных разрешающих функций дает выигрыш в гарантированном времени. Если z_0 лежит на прямой $y=2x$, то компоненты экстремальных селекторов равны и, следовательно, матричная разрешающая функция имеет равные диагональные элементы и соответствует простой матрице. В этой ситуации матричный метод совпадает с методом скалярных разрешающих функций [8] и использование матричных не дает выигрыша в гарантированном времени.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ СХЕМА С МАТРИЧНЫМИ РАЗРЕШАЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим отдельно схему метода, которая дает достаточные условия завершения игры в классе контруправлений, несколько модифицировав исходную конструкцию.

Для этого при условии Понтрягина, фиксированном селекторе $\gamma(t,\tau)$ и матричной притягивающей функции рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v),\ \ t\geq\tau\geq 0.$$

При любых $(t,\tau)\in\Delta$ оно имеет непустой образ, так как, по крайней мере, $0\in\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$ при любых $(t,\tau)\in\Delta$, $v\in V$. Аналогично предыдущему, если $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\in M$ для некоторого t, то

$$\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)=\underbrace{[0,+\infty)\times\ldots\times[0,+\infty)}_{\nu},\ \ \tau\in[0,t].$$

Если $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\,\overline{\in}\,M$, то отображение $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)$ замкнутозначно. Селекторы отображения $\mathfrak{A}_\nu(\tau,t)$ — вектор-функции

$$\alpha(t,\tau)=(\alpha_1(t,\tau),\ldots,\alpha_\nu(t,\tau)),$$

где $\alpha_i(t,\tau)$ — скалярные функции.

По аналогии с общей схемой рассмотрим функцию

$$\widetilde{\alpha}(t,\tau)=\sup_{\alpha(t,\tau)\in\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)}\ \min_{i=\overline{1,\nu}}\alpha_i(t,\tau)$$

и маргинальное множество селекторов из отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)$

$$\mathfrak{M}(t,\tau)=\{\alpha(t,\tau):\widetilde{\alpha}(t,\tau)=\min_{i=\overline{1,\nu}}\alpha_i(t,\tau)\}.$$

Многозначные отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)$, $\mathfrak{M}(t,\tau)$ измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$, и замкнутозначны. Поэтому среди экстремальных селекторов отображения $\mathfrak{M}(t,\tau)$ существует хотя бы один измеримый по τ. Зафиксируем его и обозначим $\alpha^*(t,\tau)$.

Рассмотрим множество

$$\Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \tilde{\alpha}(t,\tau)d\tau \ge 1 \right\} \tag{17}$$

и функцию $\Theta_\nu^0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\{t : t \in \Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\}$.

Если $\alpha(t,\tau)$ — измеримый по τ селектор отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau)$, то $\tilde{\alpha}(t,\tau)$ — измеримая по τ функция и интеграл в (17) имеет смысл. При этом, если для некоторого t имеем $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \in M$, то $\tilde{\alpha}(t,\tau) = +\infty$ при $\tau \in [0,t]$.

Условие 5. Если $\Theta \in \Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$, то для экстремального селектора $\alpha^*(\Theta,\tau)$ его усеченный селектор $\beta(\Theta,\tau) = (\beta_1(\Theta,\tau),\ldots,\beta_\nu(\Theta,\tau))$,

$$\beta_i(\Theta,\tau) = \begin{cases} \alpha^*(\Theta,\tau), & \tau \in [t_i,\Theta], \\ 0, & \tau \in [t_i,\Theta], \end{cases}$$

$$\int_0^{t_i} \alpha_i^*(\Theta,\tau)d\tau = 1, \; i = 1,\ldots,\nu, \tag{18}$$

является измеримым селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(\Theta,\tau)$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, а также условия 2 и 5. При этом для заданной функции $g(\cdot)$ и выбранного селектора $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ множество $\Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$ и $\Theta \in \Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество (2) в момент Θ с помощью контруправлений.

Доказательство. Пусть $\xi(\Theta,g(\Theta),\gamma(\Theta,\cdot)) \overline{\in} M$. Рассмотрим экстремальный селектор $\alpha^*(\Theta,\tau)$ отображения $\mathfrak{M}(\Theta,\tau)$. Справедливо неравенство

$$\alpha_i^*(\Theta,\tau) \ge \min_{i=1,\ldots,\nu} \alpha_i^*(\Theta,\tau) \;\; \forall\, i = 1,\ldots,\nu, \;\; \tau \in [0,\Theta].$$

Из неравенства в соотношении (17) получим

$$\int_0^\Theta \alpha_i^*(\Theta,\tau)d\tau \ge 1, \; i = 1,\ldots,\nu.$$

Введем контрольные функции

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \alpha_i^*(\Theta,\tau)d\tau \ge 1, \; i = \overline{1,\nu}.$$

Они непрерывны по t, не возрастают и $h_i(0) = 1$. Но поскольку из (17) вытекает, что $h_i(\Theta) \le 0$, существуют такие моменты t_i, $t_i \in [0,\Theta]$, что $h_i(t_i) = 0$.

Опишем процесс управления первым игроком.

Введем матричную функцию

$$\mathrm{B}(\Theta,\tau) = \begin{pmatrix} \beta_1(\Theta,\tau) & & & 0 \\ & \beta_2(\Theta,\tau) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_\nu(\Theta,\tau) \end{pmatrix},$$

заметив, что диагональные элементы обладают свойством

$$\int_0^{\Theta} \beta_i(\Theta,\tau)d\tau = 1, \quad i = 1,\ldots,\nu,$$

и рассмотрим компактозначное отображение

$$U_1(\tau,v) = \{u \in U : \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(u,v) - \gamma(\Theta,\tau) \in \mathrm{B}(\Theta,\tau)[M - \xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot))]\}. \quad (19)$$

В силу условия 5 вектор-функция $\beta(\Theta,\tau) = (\beta_1(\Theta,\tau),\ldots,\beta_\nu(\Theta,\tau))$ является измеримым селектором многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(\Theta,\tau)$, поэтому отображение $U_1(\tau,v)$ имеет непустые образы и $L\times B$-измеримо по совокупности (τ,v) [28]. В силу теоремы измеримого выбора в нем существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u_1(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [8]. Если $v(\tau)$, $v:[0,\Theta]\to V$, — произвольная измеримая функция, допустимое управление убегающего, то управление первого игрока положим равным $u(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0,\Theta]$.

Если $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot)) \in M$, то управление первого игрока выберем аналогично предыдущему случаю, где в соотношении (19) матричная функция $\mathrm{B}(\Theta,\tau)$ задается нуль-матрицей.

Таким образом, если $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot)) \,\overline{\in}\, M$, то из представления (11) имеем

$$\pi z(\Theta) = \pi g(\Theta) + \int_0^{\Theta} \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau,$$

а с учетом (19) отсюда получим включение

$$\pi z(\Theta) \in \left(E - \int_0^{\Theta} \mathrm{B}(\Theta,\tau)d\tau \right) \xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot)) + \int_0^{\Theta} \mathrm{B}(\Theta,\tau)Md\tau. \quad (20)$$

Поскольку выполнено условие 2 и $\int_0^{\Theta} \mathrm{B}(\Theta,\tau)d\tau = E$, имеем

$$\int_0^{\Theta} \mathrm{B}(\Theta,\tau)Md\tau = M,$$

а следовательно, $\pi z(\Theta) \in M$.

Если $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot)) \in M$, то из включения (20) при нуль-матрице $\mathrm{B}(\Theta,\tau)$ автоматически следует $\pi z(\Theta) \in M$.

Замечание 6. Вместо условия 2 достаточно включения

$$\int_0^{\Theta} \mathrm{B}(\Theta,\tau)Md\tau \subset M.$$

При этом остаются справедливыми все утверждения замечаний 2 и 3.

СХЕМА С ФИКСИРОВАННЫМИ ТОЧКАМИ ТЕЛЕСНОЙ ЧАСТИ ТЕРМИНАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

В методе разрешающих функций [7, 8], как видно из выражения (5) для многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(t,\tau,v)$, притягивание множества $M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))$ к пересечению с многозначным отображением $W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)$ осуществлялось с помощью простой матричной функции $\alpha(t,\tau,v)E$ в конусе, натянутом на данное множество. В предложенной схеме расширены возможности притягивания. Эту процедуру осуществляет матричная функция $A(t,\tau,v)$ с различными диагональными элементами. При этом касание множеств происходит, вообще говоря, в различных точках многозначных отображений в зависимости от их аргументов. Достаточными условиями сближения, кроме условия Понтрягина и конечности числа T, являются в случае скалярных разрешающих функций — выпуклость множества M ($M = \mathrm{co} M$), а матричных функций — более жесткое условие — H-выпуклость множества M.

Для того чтобы избавиться от этих ограничительных условий и эффективно использовать матричные разрешающие функции, рассмотрим схему, ориентированную на сближение с некоторой фиксированной на всю игру точкой множества M, выбор которой определяется первым игроком. Однако при этом возможно увеличение гарантированного времени.

Пусть $m \in M$, причем

$$\eta(t, m) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) - m, \ \gamma(t, \cdot) \in \Gamma_t. \tag{21}$$

Введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m) =$$

$$= \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu); \ \alpha_i \geq 0 : - \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_\nu \end{pmatrix} \eta(t, m) \in W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau) \right\}.$$

Предполагается выполненным условие Понтрягина и, следовательно,

$$\mathrm{dom}\, \mathfrak{A}_\nu = \Delta \times V \times M.$$

При этом отображение $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m)$ принимает значения из 2^{R^ν}. Заметим, что при $\eta(t, m) = 0$ имеем

$$\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m) = \underbrace{[0, +\infty) \times \cdots \times [0, +\infty)}_{\nu}$$

при любых $\tau \in [0, t]$, $v \in V$.

Многозначное отображение $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m)$ является замкнутозначным, $L \times B$-измеримым по совокупности (τ, v) [8] и содержит ν-мерный нуль при $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, $m \in M$.

Матричная функция

$$A(t, \tau, v, m) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t, \tau, v, m) & & & 0 \\ & \alpha_2(t, \tau, v, m) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_\nu(t, \tau, v, m) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_i : \Delta \times V \times M \to R_+, \ i = 1, \ldots, \nu,$$

входящая в соотношение (21), имеет диагональный вид, и ее элементы $\alpha(t, \tau, v, m) = (\alpha_1(t, \tau, v, m), \ldots, \alpha_\nu(t, \tau, v, m))$ образуют селектор многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m)$, одновременно являясь ее собственными числами.

Построим на их основе скалярную функцию

$$\tilde{\alpha}(t, \tau, v, m) = \sup_{\alpha(t, \tau, v, m) \in \mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m)} \min_{i = \overline{1, \nu}} \alpha_i(t, \tau, v, m),$$

действующую из $\Delta \times V \times M$ в R_+.

Если точная верхняя грань достигается в выражении для $\tilde{\alpha}(t, \tau, v, m)$, то обозначим

$$\mathfrak{M}(t, \tau, v, m) = \{\alpha(t, \tau, v, m) \in \mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m) : \min_{i = \overline{1, \nu}} \alpha_i(t, \tau, v, m) = \tilde{\alpha}(t, \tau, v, m)\}.$$

Это отображение $L \times B$-измеримо по совокупности (τ, v) и замкнутозначно. Поэтому в силу теоремы измеримого выбора в нем существует хотя бы один экстремальный $L \times B$-измеримый по совокупности (τ, v) селектор. Зафиксируем его и обозначим $\alpha^*(t, \tau, v, m)$.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{T}_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot), m) = \{t \geq 0: \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \widetilde{\alpha}(t, \tau, v(\tau), m) d\tau \geq 1\} \tag{22}$$

и его наименьший элемент

$$\tau_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot), m) = \inf \mathfrak{T}_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot), m).$$

В силу свойств многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(t, \tau, v, m)$ функция $\widetilde{\alpha}(t, \tau, v, m)$ $L \times B$-измерима по совокупности (τ, v), так как она составлена на основе компонент селектора $\alpha^*(t, \tau, v, m)$ и, следовательно, суперпозиционно измерима. А значит, интеграл в соотношении (22) корректно определен.

Заметим, что если $\eta(t, m) = 0$, то $\widetilde{\alpha}(t, \tau, v, m) = +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, и значение интеграла в (22) следует положить равным $+\infty$. Если неравенство в (22) не имеет места при $t > 0$, то положим $\mathfrak{T}_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot), m) = \varnothing$.

Условие 6. Если для фиксированной точки $m \in M$ имеем

$$\mathfrak{T} \in \mathfrak{T}_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot), m) \neq \varnothing,$$

то для экстремального селектора $\alpha^*(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$ его усеченные селекторы $\beta(\mathfrak{T}, \tau, v, m) = (\beta_1(\mathfrak{T}, \tau, v, m), \ldots, \beta_\nu(\mathfrak{T}, \tau, v, m))$

$$\beta(\mathfrak{T}, \tau, v, m) = \begin{cases} (\beta_1(\mathfrak{T}, \tau, v, m), & \tau \in [0, t_i), \\ \quad 0, & \tau \in [t_i, \mathfrak{T}], \end{cases} \tag{23}$$

являются селекторами многозначного отображения $\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$, $\tau \in [0, \mathfrak{T}]$, $v \in V$, для любых $t_i \in [0, \mathfrak{T}]$, $i = 1, \ldots, \nu$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Кроме того, для заданной функции $g(\cdot)$, выбранного селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$ и фиксированной точки $m \in M$ имеем

$$\mathfrak{T} \in \mathfrak{T}_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot), m) \neq \varnothing,$$

причем выполнено условие 6.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на аффинное многообразие $M_0 + m$ в момент $\mathfrak{T}$ с помощью управления вида (3).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\eta(\mathfrak{T}, m) \neq 0$. Для компонент $L \times B$-измеримого экстремального селектора $\alpha^*(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$ имеет место очевидное неравенство

$$\alpha_i^*(\mathfrak{T}, \tau, v, m) \geq \min_{i=1,\ldots,\nu} \alpha_i^*(\mathfrak{T}, \tau, v, m).$$

Если $v(\tau)$, $\tau \in [0, \mathfrak{T}]$, — произвольное допустимое управление убегающего, то из неравенства в соотношении (22) получим

$$\int_0^{\mathfrak{T}} \alpha_i^*(\mathfrak{T}, \tau, v(\tau), m) d\tau \geq 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, \nu.$$

Контрольные функции

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \alpha_i^*(\mathfrak{T}, \tau, v(\tau), m) d\tau, \quad i = \overline{1, \nu},$$

абсолютно непрерывны, не возрастают и $h_i(0) = 1$, $h_i(\mathfrak{T}) \leq 0$. Поэтому существует такой момент t_i^*, что $h_i(t_i^*) = 0$, причем $t_i^* = t_i^*(v(\cdot))$.

Введем усеченные функции (23) $\beta_i(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$ с $t_i = t_i^*$ и рассмотрим отображение

$$U_2(\tau, v) = \{u \in U : -\mathrm{B}(\mathfrak{T}, \tau, v, m)\eta(\mathfrak{T}, m) \in \pi\Omega(\mathfrak{T}, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(\mathfrak{T}, \tau)\}, \quad (24)$$

где

$$\mathrm{B}(\mathfrak{T}, \tau, v, m) = \begin{pmatrix} \beta_1(\mathfrak{T}, \tau, v, m) & & 0 \\ & \beta_2(\mathfrak{T}, \tau, v, m) & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_\nu(\mathfrak{T}, \tau, v, m) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\int_0^{t_i^*} \beta_1(\mathfrak{T}\tau, v(\tau), m)d\tau = 1,\ i = 1, \ldots, \nu.$

В силу условия 6 вектор-функция $\beta(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$ является $L \times B$-измеримым по совокупности (τ, v) селектором отображения $\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$, поэтому отображение $U_2(\tau, v)$ $L \times B$-измеримо. Согласно теореме измеримого выбора в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u_2(\tau, v)$, являющийся суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление преследователя равным $u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau)),\ \tau \in [0, \mathfrak{T}]$. При $\eta(\mathfrak{T}, m) = 0$ управление первого игрока выберем аналогично (24), но с нулевой матрицей $\mathrm{B}(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$.

Проследим за траекторией процесса (1), соответствующей произвольному допустимому управлению убегающего и указанному управлению преследователя. Если $\eta(\mathfrak{T}, m) \neq 0$, то, имея представление проекции траектории

$$\pi z(\mathfrak{T}) = \pi g(\mathfrak{T}) + \int_0^{\mathfrak{T}} \pi\Omega(\mathfrak{T}, \tau)\,\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau,$$

прибавив и вычтя из правой части векторы $\int_0^{\mathfrak{T}} \gamma(\mathfrak{T}, \tau)d\tau,\ m$ и использовав выражение (24), получим

$$\pi z(\mathfrak{T}) = \left(E - \int_0^{\mathfrak{T}} \mathrm{B}(\mathfrak{T}, \tau, v, m)d\tau \right) \eta(\mathfrak{T}, m) + m. \quad (25)$$

Следовательно, $\pi z(\mathfrak{T}) = m$ с учетом равенства

$$\int_0^{\mathfrak{T}} \mathrm{B}(\mathfrak{T}, \tau, v(\tau), m)\, d\tau = E.$$

Последнее означает выход траектории на аффинное многообразие $M_0 + m$ в момент $\mathfrak{T}$.

Если $\eta(\mathfrak{T}, m) = 0$, то из (25) автоматически следует $\pi z(\mathfrak{T}) = m$.

Условие 7. Функция $\tau_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m)$ полунепрерывна снизу по $m,\ m \in M$.

Обозначим

$$\tau_\nu = \tau_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \min_{m \in M} \tau_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m)$$

и рассмотрим многозначное отображение, состоящее из экстремальных элементов:

$$\mathfrak{M}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{m \in M : \tau_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \tau_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot), m)\}.$$

Следствие 2. В предположениях теоремы 4 при дополнительном условии 7 траектория системы (1) может быть приведена в любую точку множества $M_0 + \mathfrak{M}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ в момент τ_ν с помощью управления вида (3).

Для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) при условии Понтрягина рассмотрим гарантированные времена первого прямого метода Понтрягина [1, 6–8]

$$\mathrm{P}(g(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 \colon \pi g(t) \in M - \int_0^t W(t,\tau)d\tau \right\} \qquad (26)$$

и минимальное гарантированное время

$$p(g(\cdot)) = \inf\{t \geq 0 : t \in \mathrm{P}(g(\cdot))\}.$$

Интегралом от многозначного отображения является интеграл Аумана. Как показано в [8] в терминах разрешающих функций, соотношение (26) можно выразить в виде так называемой функциональной формы первого прямого метода [7].

Сохранив все предыдущие обозначения, рассмотрим многозначное отображение

$$C(t,\tau) = \{c \geq 0 : [W(t,\tau) - \gamma(t,\tau)] \cap c[M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))] \neq \varnothing\} \qquad (27)$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$c(t,\tau) = \sup\{c : c \in C(t,\tau)\}, \;\; t \geq \tau \geq 0.$$

Введем множество гарантированных времен

$$\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t c(t,\tau)d\tau \geq 1 \right\}$$

и минимальное гарантированное время

$$p(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\{t \geq 0 : t \in \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))\}.$$

Имеет место включение

$$\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot) \subset \mathrm{P}(g(\cdot)) \quad \forall \gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma, g(\cdot),$$

а при некоторых дополнительных предположениях [8, теорема 6]

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma} p(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = p(g(\cdot)) \;\; \forall g(\cdot).$$

Связь первого прямого метода с разрешающими функциями частично проясняет следующее утверждение [7, 8].

Для того чтобы

$$\pi g(t) \in M - \int_0^t W(t,\tau)d\tau,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал такой селектор $\gamma(t,\cdot) \in \Gamma_t$, что

$$\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \in M.$$

Из построений предыдущих разделов, касающихся различных схем метода разрешающих функций, вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда:

- существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$, что

$$\mathrm{P}(g(\cdot)) \subset T_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \;\; \forall g(\cdot)$$

и, следовательно, $t_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \leq p(g(\cdot)) \;\; \forall g(\cdot)$;

- существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$, что

$$\mathrm{P}(g(\cdot)) \subset \Theta_\nu(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \;\; \forall g(\cdot)$$

и, следовательно,

$$\Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \le \mathrm{P}(g(\cdot)) \ \ \forall g(\cdot)\,;$$

• существуют такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ и точка $m\in M$, что

$$\mathrm{P}(g(\cdot)) \subset \mathfrak{T}_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot),m),$$

а значит, $\tau_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot),m) \le p(g(\cdot)) \ \ \forall g(\cdot)$.

Утверждение 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда:

• имеет место включение

$$\Theta_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \subset T_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \ \ \forall g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$$

и, следовательно,

$$t_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \le \Theta_\nu^0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \ \ \forall g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma;$$

• справедливы соотношение

$$\mathfrak{T}_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot),m) \subset T_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$$

и соответственно

$$t_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot),m) \ge t_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \ \ \forall m\in M, \gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma, g(\cdot).$$

Утверждение 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда:

• если терминальное множество M^* является аффинным многообразием ($M=\{m\}$), то

$$T_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \mathfrak{T}_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot),m),$$

$$t_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \tau_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot),m) \ \ \forall g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma;$$

• если терминальное множество — аффинное многообразие и выполнено условие 3, то

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} t_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = p(g(\cdot)) \ \ \forall g(\cdot);$$

• если терминальное множество является аффинным многообразием, то

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} \Theta_\nu^0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = p(g(\cdot)) \ \ \forall g(\cdot).$$

Из утверждения 3, в частности, следует, что все рассмотренные минимальные гарантированные времена совпадают, если выполнено условие 3, а терминальное множество — аффинное многообразие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе введены матричные разрешающие функции для решения игровых задач сближения. С их помощью установлены достаточные условия сближения траектории процесса за конечное время с цилиндрическим терминальным множеством в случае специального представления решения. Отдельно рассмотрены ситуации сближения в классе квази- и стробоскопических стратегий. Управляющие функции выбираются в виде контруправлений на основе теорем измеримого выбора селекторов из $L\times B$-измеримых замкнутозначных отображений, при этом обеспечивается их суперпозиционная измеримость. Проведен сравнительный анализ гарантированных времен.

Результаты теоретических исследований иллюстрируются на простом модельном примере, показывающем преимущество матричных разрешающих функций над скалярными, открывающих новые возможности в изучении игровых задач динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
3. Pschenitchny B.N. ε-strategies in differential games // Topics in Differential Games. — New York; London; Amsterdam: North Holland Publ. Co, 1973. — P. 45–99.
4. Isaacs R. Differential games. — New York: John Wiley, 1965. — 480 p.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
6. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
7. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
8. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИ РАН им. В.А. Стеклова. — 2010. — **271**. — С. 76–92.
9. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict, dynamical systems. 2 // J. Math. Sci. — 1996. — **80**, N 1. — P. 1489–1518.
10. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
12. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Math. Game Theory and Algebra. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
13. Сергиенко И.В., Чикрий А.А. О развитии научных идей Б.Н. Пшеничного в области оптимизации и математической теории управления // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 2. — С. 3–28.
14. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
15. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: МГУ, 1980. — 198 с.
16. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во «Удмурт. ун-т», 2009. — 266 с.
17. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. Центра им. С. Банаха (Варшава). — 1985. — **14**. — С. 81–107.
18. Локк А.С. Управление снарядами. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. — 775 с.
19. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д., Руренко А.Г. Линейные интегро-дифференциальные игры // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 2. — С. 3–18.
21. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // Int. J. Optim. Methods and Software. — 2008. — **23**, N 1. — P. 39–72.
22. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria. — New York: Springer, 2008. — **17**. — P. 349–387.
23. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Gromaszek K., Smolarz A. Control of fractional-order dynamic systems under uncertainty // Modelling and Optimization / Ed. by J. Sikora. — Lublin (Poland): Publ. Lublin Univ. of Technol., 2011. — P. 3–56.
24. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — К.: Наук. думка, 2005. — 220 с.

25. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики Ур. О РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.

26. Онопчук Ю.Н., Чикрий Ал.А. Аналитический метод решения нестационарных дифференциальных игр сближения // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 4. — С. 137–152.

27. Chikrii A.A., Khomin A.V. Extremal selectors in differential pursuit games // Sybernetics and System Analysis. — P. I, 1988. — N 6. — P. 746–754; P. II, 1989. — N 2. — P. 193–203.

28. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 4. — С. 40–64.

29. Mordukhovich B. S. Variational analysis and generalized differentiation. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006, I — Basic Theory, **330**. — 582 p., II — Applications, **331**, — 612 p.

30. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком, 2010. — 226 с.

31. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 5. — С. 802–810.

32. Чикрий Г.Ц. Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 90–105.

33. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

34. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

35. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. — Basel: Gordon and Breach, 1995. — 625 p.

36. Matychyn I., Chikrii A., Gromaszek K. Dynamic games involving impulses // Book Current Problems in Information and Computational Technologies, 2 / Ed. by W. Wojcik and J. Sikora. — Lublin (Poland): Publ. Lublin Univ. of Technology, 2012. — P. 51–106.

37. Hajek O. Pursuit games. — New York: Acad. press, 1975. — **12**. — 266 p.

38. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

39. Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В. Выпуклый анализ и дифференциальные игры. — Алматы: Науч.-издат. центр «Ғылым», 2005. — 392 с.

40. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 470 с.

Поступила 05.06.2013