УДК 517.977

К.А. ЧИКРИЙ

ОБ ИГРОВОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ПРИ ВРЕМЕННОМ ОТКАЗЕ УПРАВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Аннотация. Рассмотрена игровая задача о сближении траектории динамической системы с заданным множеством при отказе управляющих устройств на интервале времени заданной длины, но в неизвестный заранее начальный момент. На основе метода разрешающих функций предложено два подхода, позволяющих получить достаточные условия окончания игры из заданных начальных положений за определенное гарантированное время.

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, интеграл Аумана, условие Понтрягина, формула Коши, геометрическая разность Минковского.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается специальная линейная нестационарная игра сближения с заданным цилиндрическим терминальным множеством. Процесс развивается таким образом, что в некоторый априори неизвестный момент времени выходят из строя управляющие устройства первого игрока на время, необходимое для ремонта и заранее известное. Далее процесс продолжается до выхода траектории на терминальное множество. Необходимо определить гарантированное время окончания игры и управление первого игрока, которое обеспечивает этот результат.

На основе техники построения разрешающих функций [1, 2] устанавливаются достаточные условия окончания игры двух типов. При одном варианте на временном промежутке, следующим непосредственно за промежутком отказа управляющих устройств, сразу ликвидируется сдвиг траектории, вызванный поломкой, в предположении, что это возможно, с последующим продолжением процесса и накоплением разрешающей функции. В другом варианте весь пучок траекторий, порожденный всевозможными управлениями второго игрока на аварийном промежутке, приводится на терминальное множество. В этом случае требуется выполнение некоторого условия, связывающего время ликвидации поломки, от которого зависят параметры пучка, и размеры целевого множества.

Аналогичная задача рассматривалась в [3] на основе прямых методов Л.С. Понтрягина [4]. Данная работа примыкает к исследованиям [4–18].

СХЕМА С НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ УСТРАНЕНИЕМ ПОСЛЕДСТВИЙ ПОЛОМКИ

Пусть задан конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z} = A(t)z + \beta_{\Theta}(t)u - v,\ z \in R^n,\ z(t_0) = z_0,\ t \geq t_0 \geq 0,\ u \in U(t),\ v \in V(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ — матричная функция порядка n, элементы которой — измеримые функции, суммируемые на любом конечном интервале, области управления $U(t)$ и $V(t)$, $U(t) \in K(R^p)$, $V(t) \in K(R^q)$, $p, q \in N$, — измеримые компактозначные отображения при $t \in [t_0, +\infty)$, N — множество натуральних чисел. Функция $\beta_{\Theta}(t)$ имеет вид

$$\beta_{\Theta}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\Theta, \Theta + h], \\ 1, & t \,\overline{\in}\, [\Theta, \Theta + h], \end{cases}$$

где $\Theta \geq t_0$ — момент отказа управляющих устройств, h, $h > 0$, — время на устранение поломки, в какой бы момент она ни произошла. Очевидно, что

$$\beta_{\Theta}(t) = \chi(t) - \chi(t - \Theta) + \chi(t - \Theta - h),$$

где $\chi(t-\Theta)=\begin{cases}0, & t<\Theta,\\ 1, & t\geq\Theta,\end{cases}$ — функция Хевисайда.

Терминальное множество $M^*(t)$ имеет цилиндрический вид:

$$M^*(t) = M_0 + M(t),\ t\in[t_0,+\infty)\,, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M(t)$ — измеримое отображение со значениями в $K(L)$, где $L=M_0^{\perp}$.

Цели игроков и их взаимная информированность традиционны [4–7, 11–18]. Перейдем к решению задачи сближения (1), (2) на основе метода разрешающих функций. Введем следующие обозначения: π — ортопроектор, действующий из R^n в L; $\Phi(t,\tau)$ — матрица Коши однородной системы (1); символ $\overset{*}{-}$ — операция геометрической разности Минковского [4].

Рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,\tau,v)=\pi\Phi(t,\tau)U(\tau)-\pi\Phi(t,\tau)v,\ \ v\in V(\tau),$$

$$W(t,\tau)=\pi\Phi(t,\tau)U(\tau)\overset{*}{-}\ \pi\Phi(t,\tau)V(\tau),\ \ t\geq\tau\geq t_0.$$

Условие 1 (условие Понтрягина): $W(t,\tau)\neq\varnothing\ \ \forall\, t\geq\tau\geq t_0$.

Отображение $W(t,\tau)$ замкнутозначно и измеримо по τ [2]. Поэтому существует измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)$, $t\geq\tau\geq t_0$, который суммируем по τ на промежутке $[t_0,t]$ при каждом t. Зафиксируем его и обозначим

$$\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))=\pi\Phi(t,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}\gamma(t,\tau)d\tau.$$

Пусть

$$t^* = t^*(\Theta,t)=$$

$$=\min\left\{s: s\in(\Theta+h,t],\ \int_{\Theta}^{\Theta+h}[\pi\Phi(t,\tau)V(\tau)-\gamma(t,\tau)]d\tau\subset\int_{\Theta+h}^{s}[W(t,\tau)-\gamma(t,\tau)]d\tau\right\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только такие t и Θ, для которых момент t^* конечен.

Введем разрешающую функцию по формуле

$$\alpha_\Theta(t,\tau,v)=$$

$$=\begin{cases}\sup\{\alpha\geq 0: [W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]\cap\alpha[M(t)-\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))]\neq\varnothing\}, & \tau\,\overline{\in}\,[\Theta,t^*],\\ 0, & \tau\in[\Theta,t^*].\end{cases}$$

Иначе говоря, на промежутке отказа управляющих устройств $[\Theta,\Theta+h]$ и на промежутке ликвидации последствий аварии $(\theta+h,t^*]$ разрешающая функция принимает нулевые значения.

Если $t\geq t_0$ и $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\in M(t)$, то $\alpha_\Theta(t,\tau,v)=+\infty$ для всех $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$. В случае $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\,\overline{\in}\,M(t)$ разрешающая функция принимает конечные значения.

Положим

$$T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\geq t_0:\ \min_{\Theta:\,t^*-h\geq\Theta\geq t_0}\int_{t_0}^{t}\inf_{v\in V(\tau)}\alpha_\Theta(t,\tau,v)d\tau\geq 1\right\}$$

и будем считать, что существует

$$t_h = t_h(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \min\{t: t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))\}.$$

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1, $M(t) = \operatorname{co} M(t)$ при $t \geq t_0$, для начального состояния процесса (t_0, z_0) и измеримого по τ селектора $\gamma(t,\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$, отображения $W(t,\tau)$ имеем $t_h < +\infty$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество $M^*(t)$ в момент t_h, $t_h \overline{\in} [\Theta, t^*]$ с помощью некоторой квазистратегии, несмотря на отказ управляющих устройств первого игрока в любой момент на протяжении времени h.

Доказательство. Пусть $v(t)$, $t \geq t_0$, — произвольное допустимое управление второго игрока, а Θ — момент отказа управляющих устройств (аварии), которые априори неизвестны первому игроку. Тогда его управление нужно определить на промежутках $[t_0, \Theta)$, $(\Theta + h, t^*]$, $(t^*, t_h]$, где $t^* = t^*(\Theta, t_h)$. Поскольку Θ — момент аварии, а на ее ликвидацию отпущено время h, то на промежутке $[\Theta, \Theta + h]$ управление первого игрока отсутствует, а на систему (1) действует лишь второй игрок в своих интересах. Это негативное влияние нужно устранить на промежутке $(\Theta + h, t^*]$. Таким образом, накопление разрешающей функции производится лишь на промежутках $[t_0, \Theta)$, $(t^*, t_h]$. Чтобы детализировать этот процесс, рассмотрим контрольную функцию

$$h(t, v(\cdot)) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha_\Theta(t_h, \tau, v(\tau))d\tau.$$

Она непрерывна по t, не возрастает, причем $h(t_0, v(\cdot)) = 1$. Из определения момента t_h вытекает, что существует такой момент t_*, $t_* \leq t_h$, что $h(t_*, v(\cdot)) = 0$. Тогда возможны лишь два случая: $t_* \in [t_0, \Theta)$ и $t_* \in (t^*, t_h]$.

В каждом из этих случаев точка t_* разделяет множество $[t_0, \Theta) \cup (t^*, t_h]$ на активный и пассивный участки: на активном разрешающая функция накапливается, а на пассивном она равна нулю.

Пусть $t_* \in [t_0, \Theta)$, а $\xi(t_0, z_0, t_h, \gamma(t_h, \cdot)) \overline{\in} M(t_h)$. При $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_*)$ рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \{u \in U(\tau): \pi\Phi(t_h, \tau)(u - v) - \gamma(t_h, \tau) \in \alpha_\Theta(t_h, \tau, v) \times \\ \times [M(t_h) - \xi(t_0, z_0, t_h, \gamma(t_h, \cdot))]\}. \qquad (3)$$

Согласно [2] оно $L \times B$-измеримо и замкнутозначно. Поэтому по теореме об измеримом выборе в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u(\tau, v)$, являющийся суперпозиционно измеримой функцией.

Положим управление первого игрока на активном промежутке

$$u(\tau) = u(\tau, v(\tau)), \ \tau \in [t_0, t_*). \qquad (4)$$

При $\tau \in [t_*, \Theta) \cup (t^*, t_h]$ положим в соотношении (3) $\alpha_\Theta(t_h, \tau, v) \equiv 0$, $v \in V(\tau)$, и выберем $u_0(\tau, v)$ в виде $L \times B$-измеримого селектора соответствующего многозначного отображения $U_0(\tau, v)$. Тогда управление первого игрока на пассивном промежутке

$$u(\tau) = u_0(\tau, v(\tau)), \ \tau \in [t_0, \Theta) \cup (t^*, t_h]. \qquad (5)$$

Пусть $t_* \in (t^*, t_h]$, а $\xi(t_0, z_0, t_h, \gamma(t_h, \cdot)) \overline{\in} M(t_h)$. Тогда на активном промежутке $[t_0, \Theta) \cup (t^*, t_*)$ управление первого игрока определяется соотношением (4), где $u(\tau, v)$ — $L \times B$-измеримый селектор многозначного отображения $U(t, \tau)$. На пассивном промежутке $[t_*, t_h]$ управление первого игрока определяется выражением (5), где $u_0(\tau, v)$ — $L \times B$-измеримый селектор отображения $U_0(t,\tau)$.

Если $\xi(t_0, z_0, t_h, \gamma(t_h, \cdot)) \in M(t_h)$, то управление первого игрока на всем множестве $[t_0, \Theta) \cup (t^*, t_h]$ дается выражением (5), где $u_0(t,\tau)$ — селектор многозначного отображения $U_0(t,\tau)$, соответствующего нулевой разрешающей функции в (3).

Таким образом, осталось указать закон управления первого игрока на промежутке ликвидации последствий аварии $(\Theta + h, t^*]$. Согласно предыдущим выкладкам имеет место включение

$$\int_{\Theta}^{\Theta+h} [\pi\Phi(t_h,\tau)V(\tau) - \gamma(t_h,\tau)]d\tau \subset \int_{\Theta+h}^{t^*}[W(t_h,\tau) - \gamma(t_h,\tau)]d\tau.$$

Поскольку управление второго игрока на промежутке $[\Theta, \Theta + h]$ становится известным первому игроку в момент $\Theta + h$, ему известна и величина

$$\int_{\Theta}^{\Theta+h}[\pi\Phi(t_h,\tau)v(\tau) - \gamma(t_h,\tau)]d\tau = \omega.$$

В результате имеем включение

$$\omega \in \int_{\Theta+h}^{t^*}[W(t_h,\tau) - \gamma(t_h,\tau)]d\tau.$$

По определению интеграла Аумана [8] существует такой измеримый селектор $\omega(\tau)$ многозначного отображения $W(t_h,\tau) - \gamma(t_h,\tau)$, что

$$\omega = \int_{\Theta+h}^{t^*}\omega(\tau)d\tau.$$

Введем многозначное отображение

$$U_h(\tau, v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Phi(t_h,\tau)(u - v) - \gamma(t_h,\tau) - \omega(\tau) = 0\}, \;\; v \in V(\tau), \;\; \tau \in [\Theta + h, t^*].$$

В нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u_h(\tau, v)$, определяющий управление первого игрока

$$u(\tau) = u_h(\tau, v(\tau)), \;\; \tau \in [\Theta + h, t^*]$$

как измеримую функцию.

Покажем, что указанные законы управления первого игрока обеспечивают нужный результат при любом противодействии второго игрока.

Воспользовавшись формулой Коши, получим в случае $t_* \in (t^*, t_h]$ выражение

$$\pi z(t_h) = \pi\Phi(t_h, t_0)z_0 + \int_{[t_0,\Theta)\cup(t^*, t_*]} \pi\Phi(t_h,\tau)(u(\tau) - v(\tau))d\tau +$$

$$+ \int_{\Theta}^{\Theta+h}\pi\Phi(t_h,\tau)v(\tau)d\tau + \int_{\Theta+h}^{t^*}\pi\Phi(t_h,\tau)(u(\tau) - v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{t_h}\pi\Phi(t_h,\tau)(u(\tau) - v(\tau))d\tau. \quad (6)$$

Прибавим и вычтем от правой части соотношения (6) величину $\int_{t_0}^{t_h}\gamma(t_h,\tau)d\tau.$

Тогда, учитывая законы выбора управлений в каждом случае и равенство нулю разрешающей функции $\alpha_\Theta(t_h, \tau, v)$ на соответствующих промежутках, получим из формулы (6)

$$\pi z(t_h) = \xi(t_0, z_0, t_h, \gamma(t_h, \cdot))\left[1 - \int_{t_0}^{t_h} \alpha_\Theta(t_h, \tau, v(\tau))d\tau\right] + \int_{t_0}^{t_h} \alpha_\Theta(t_h, \tau, v(\tau))M(t_h)d\tau.$$

Поскольку $\int_{t_0}^{t_h} \alpha_\Theta(t_h, \tau, v(\tau))d\tau = 1$ при любых $v(\tau)$ по построению разрешающей функции, $M(t_h) = \mathrm{co}\, M(t_h)$, имеем $\pi z(t_h) \in M(t_h)$. Аналогичное включение следует из формулы Коши при $\xi(t_0, z_0, t_h, \gamma(t_h, \cdot)) \in M(t_h)$.

ПРИВЕДЕНИЕ ПУЧКА ТРАЕКТОРИЙ НА ТЕРМИНАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО

Рассмотрим другой способ решения задачи (1), (2). Для этого введем многозначное отображение

$$M(t, \Theta) = \begin{cases} M(t) \overset{*}{-} \int_{\Theta}^{\Theta+h} [\pi\Phi(t,\tau)V(\tau) - \gamma(t,\tau)]d\tau, & t > \Theta + h \geq t_0 \geq 0, \\ M(t), & t_0 \leq t < \Theta. \end{cases} \tag{7}$$

Полагаем, что все обозначения предыдущего раздела сохраняются, а $\gamma(t, \tau)$ — фиксированный измеримый по τ селектор многозначного отображения $W(t, \tau)$, для которого выполнено условие 1. Очевидно, что $M(t, \Theta)$ отображает пару (t, Θ), $t \in [t_0, +\infty) \setminus (\Theta, \Theta + h)$, в $K(L)$.

Условие 2: $M(t, \Theta) \neq \varnothing$ для $t > \Theta + h$.

Считая условия 1 и 2 выполненными, введем разрешающую функцию

$$\alpha^*_\Theta(t, \tau, v) =$$

$$= \begin{cases} = \sup\{\alpha \geq 0 : [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M(t, \Theta) - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot))] \neq \varnothing, \\ \qquad \tau \,\overline{\in}\, [\Theta, \Theta + h], \\ 0, \qquad \tau \in [\Theta, \Theta + h]. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что на аварийном участке $[\Theta, \Theta + h]$ отображение $M(t, \Theta)$ не определено, поскольку имеет место отказ управляющих устройств первого игрока и система им не управляема. Движение происходит за счет собственных ресурсов (однородная система (1)) и влияния второго игрока, что на момент устранения неисправностей $\Theta + h$ создает целое множество положений системы (1) и в дальнейшем целый пучок траекторий. Соответственно разрешающая функция на промежутке $[\Theta, \Theta + h]$ равна нулю. Отсюда, в частности, вытекает, что на этом промежутке можно положить $M(t, \Theta)$ равным $M(t)$ или любому другому компактнозначному отображению.

Обозначим

$$t_h^* = t_h^*(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \min\left\{ t \geq t_0 : \min_{\Theta: t - h \geq \Theta \geq t_0} \int_{t_0}^{t} \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*_\Theta(t, \tau, v)d\tau \geq 1 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что если поломка отсутствует ($h = 0$), то обе схемы переходят в обычный метод разрешающих функций [2, 9].

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1 и 2, многозначное отображение $M(t)$, $t \geq t_0$, выпуклозначно, для начального состояния (t_0, z_0) и некоторого измеримого по τ селектора $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$, величина $t_h^* < +\infty$.

Тогда траектория процесса может быть приведена на терминальное множество в момент t_h^*, $t_h^* \overline{\in} [\Theta, \Theta + h]$, с помощью некоторой квазистратегии при отказе управляющих устройств первого игрока в любой момент Θ, $\Theta \in [t_0, t_h^* - h)$, где h — время ликвидации поломки.

Доказательство. Пусть $v(t)$, $t \in [t_0, t_h^*]$, — управление второго игрока, Θ — момент отказа управляющих устройств первого игрока.

Рассмотрим контрольную функцию

$$h^*(t, v(\cdot)) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha_\Theta^*(t_h^*, \tau, v(\tau))\, d\tau.$$

Она непрерывна, не возрастает и $h^*(t_0, v(\cdot)) = 1$. Поэтому по теореме Коши существует такой момент t_*^0, что $h^*(t_*^0, v(\cdot)) = 0$. Поскольку $t_*^0 \in (t_0, \Theta) \cup \cup (\Theta + h, t_h^*) = \Delta^*$, рассмотрим многозначное отображение

$$U^*(\tau, v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Phi(t_h^*, \tau)(u - v) - \gamma(t_h^*, \tau) \in \alpha(\tau, v) \times \times [M(t_h^*, \Theta) - \xi(t_0, z_0, t_h^*, \gamma(t_h^*, \cdot))]\}, \tag{9}$$

где

$$\alpha(\tau, v) = \begin{cases} \alpha_\Theta^*(t_h^*, \tau, v), & \tau \le t_*^0, \tau \in \Delta^*, \xi(t_0, z_0, t_h^*, \gamma(t_h^*, \cdot)) \overline{\in} M(t_h^*, \Theta), \\ 0, & \tau > t_*^0, \tau \in \Delta^*, \xi(t_0, z_0, t_h^*, \gamma(t_h^*, \cdot)) \overline{\in} M(t_h^*, \Theta), \\ 0, & \xi(t_0, z_0, t_h^*, \gamma(t_h^*, \cdot)) \in M(t_h^*, \Theta), \end{cases}$$

а $v \in V(\tau)$. Его $L \times B$-измеримый селектор $u^*(\tau, v)$ определяет управление первого игрока

$$u(\tau) = u^*(\tau, v(\tau)). \tag{10}$$

Из формулы Коши и закона выбора управления первого игрока (10), учитывая выражения (7), (8), условия теоремы и условие 2, получаем включение

$$\pi z(t_h^*) \in M^*(t_h^*).$$

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс с простым движением

$$\dot z = \beta_\Theta(t) u - v, \quad z \in R^n, \quad ||u|| \le a > 1,\ ||v|| \le 1,\ t_0 = 0,\ z(0) = z_0,$$

и терминальным множеством — ε-окрестностью начала координат

$$M^*(t) = M^* = \{z : ||z|| \le \varepsilon\},$$

h — время, отпущенное на устранение поломки.

Очевидно, что $M_0 = \{0\}$, а $M(t) = M = M^*$. Поэтому $L = M_0^\perp = R^n$, а ортопроектор π является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей E. Поскольку $A(t) = 0$, то $\Phi(t, t_0) = E$.

Условие 1 выполнено автоматически, поскольку $a > 1$, а для выполнения условия 2 достаточно, чтобы $\varepsilon \ge h$. Применив схему метода разрешающих функций и вычислив разрешающие функции, получим гарантированные времена завершения игры каждым из двух описанных способов. В рассматриваемом случае простого движения

$$t_h = t_h^*(0, z_0, 0) = \frac{||z_0|| - \varepsilon + h}{a-1} + h,$$

однако условия существования гарантированных времен различны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода разрешающих функций получено два типа достаточных условий приведения траектории нестационарного конфликтно-управляемого процесса на переменное цилиндрическое множество при временном отказе управляющих устройств на интервале фиксированной длины с заранее неизвестным начальным моментом отказа. Результаты иллюстрируются на модельном примере игровой задачи с простым движением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
2. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. Мат. ин-та РАН им. В.А. Стеклова. — 2010. — **271**. — С. 76–92.
3. Никольский М.С. Об одной задаче управления с нарушениями в динамике // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **185**. — С. 181–186.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — **2**. — 576 с.
5. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
6. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.
7. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — К.: Наук. думка, 1992. — 264 с.
8. Aumann R.J. Integrals of set valued functions // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — **12**. — P. 1–12.
9. EIdelman S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations // Ukr. Math. J. — 2000. — **52**, N 11. — P. 1787–1806.
10. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
11. Pschenitchnyi B.N., Chikrii A.A., Rappoport J.S. Group pursuit in differential games // J. Leipzig Techn. High School (Germany). — 1982. — P. 13–27.
12. Chikrii A.A. Multi-valued mappings and their selections in game control problems // J. Autom. and Inform. Sci. — 1995. — **27**, N 1. — P. 27–39.
13. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Math., Game Theory and Algebra. — 1997. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
14. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно управляемые процессы // Прикл. математика и механика. — 1993. — **57**. — № 3. — С. 3–14.
15. Chikrii A.A., Rappoport J.S., Chikrii K.A. Multi-valued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — **43**, N 5. — P. 719–730.
16. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 1. — С. 92–107.
17. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — **44**, N 7. — P. 835–851.
18. Chikrii A.A., Rappoport J.S. Guaranteed result in differential games with terminal payoff // Ann. Intern. Sci. Dyn. Games, New Trends Dyn. Games Appl. — Boston: Birkhauser, 1995. — **3**. — P. 323–330.

Поступила 02.09.2013