УДК 519.8

Е.Е. КИРИК, А.П. ЯКОВЛЕВА

КОМПЛЕКСНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ДОБЫЧИ, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ХРАНЕНИЯ ГАЗА

Аннотация. Рассмотрены вопросы построения математических моделей распределения потоков в газотранспортных сетях, учитывающих возможности создания резервов ресурсов в подземных хранилищах, и различные стратегии функционирования газодобывающих предприятий. С учетом основных технико-экономических предпосылок проанализированы задачи определения оптимальных темпов добычи для газовых месторождений. Предложенный математический аппарат ориентирован на решение задач долгосрочного планирования, но может применяться и для случаев оперативного управления работой газотранспортных систем.

Ключевые слова: газотранспортные системы, газовые месторождения, комплексы подземного хранения газа, математические модели распределения потоков, задачи оптимизации, методы нелинейного программирования.

ВВЕДЕНИЕ

Топливно-энергетический комплекс Украины является сложной системой материального производства, совокупностью многих подсистем, включающих добычу, распределение, хранение и потребление энергоресурсов. Особое место в этом комплексе занимает газовая отрасль. Система газоснабжения Украины должна оптимальным образом удовлетворять спрос на газ, поставляя потребителям необходимые объемы природного газа при определенных технологических параметрах системы газопроводов.

Геополитическое расположение Украины позволяет ей быть транзитным государством. Перспективным направлением работ по повышению эффективности функционирования газотранспортной системы является разработка математических моделей и численных методов, с помощью которых можно решать совокупность взаимосвязанных оптимизационных задач планирования и оперативного управления, позволяющих согласовать поступающие от газовых промыслов объемы газа с пропускной способностью магистральных газопроводов и компрессорных станций. Надежное функционирование газотранспортных систем невозможно без использования подземных хранилищ газа (ПХГ), являющихся стабилизаторами в данной области.

Один из основных принципов системных исследований в энергетике — учет иерархичности построения сложных систем, требующий использования множества взаимосвязанных математических моделей для описания отдельных элементов и системы в целом [1, 2]. Задачи оптимизации функционирования систем добычи, распределения и подземного хранения газа можно представить следующими иерархическими уровнями:

- макроуровень (оптимизация всей системы, больших ее фрагментов или регионов управления (РУ));
- средний уровень (оптимизация работы отдельных элементов РУ);
- низкий уровень (оптимизация работы отдельных структурных элементов компрессорных станций, газодобывающих предприятий или хранилищ).

Критериями оптимизации функционирования всей системы или отдельных РУ могут быть достижение максимальной производительности при добыче объема газа, не меньшего заранее определенной величины; обеспечение минимальных суммарных эксплуатационных расходов в процессе удовлетворения потребителей с учетом заполнения или опорожнения хранилищ; сохранение максимальной производительности РУ при добыче, отборе или закачке газа в хранилища.

Главным стратегическим направлением процессов транспортировки, хранения и добычи природного газа является повышение надежности и эффективности управления за счет использования адекватных математических моделей и эффективных численных методов.

Цель настоящей статьи — показать принципы построения математических моделей сложных газотранспортных систем, а также взаимосвязи и взаимовлияния их отдельных функциональных элементов.

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ДОБЫЧИ, ТРАНСПОРТИРОВКИ И ПОТРЕБЛЕНИЯ ГАЗА

Рассмотрим сложную систему, основными элементами которой являются газовые промыслы, нити газопроводов, соединяющие их с узлами, где расположены потребители; а также ПХГ, используемые для временного хранения газа. Для такой системы актуальна следующая задача планирования: при заданных ограничениях на объемы добычи газа и на пропускные способности нитей газопровода определить оптимальные объемы его транспортировки от газовых промыслов к потребителям либо в ПХГ при минимальных затратах на транспортировку.

Топологически сеть можно представить в виде связаного графа $G=(N,R)$, где N и R — конечные множества. Элементы i множества N называются вершинами графа G, они отображают расположение потребителей газа, а также его источников и стоков. Элементы r множества R называются дугами (участками), причем каждому $r \in R$ сопоставлена упорядоченная пара вершин (i, j), $i, j \in N$, являющихся соответственно началом и концом дуги $r=(i, j)$.

Пусть x_{ij} — величина потока от вершины i в вершину j вдоль дуги $(i, j) \in R$, d_i — количество газа, потребляемого ($d_i < 0$) или подаваемого в сеть ($d_i \geq 0$) в вершине i. Числа r_{ij}^{+} и r_{ij}^{-} определяют верхнее и нижнее технологические ограничения на поток вдоль дуги (i, j) и позволяют фиксировать определенное направление потоков.

Если функция $f_{ij}(x_{ij})$ отражает условную стоимость прохождения потока вдоль дуги (i, j), то задача нахождения наилучшего распределения потоков вдоль сети состоит в минимизации функции

$$F=\sum_{(i,j)\in R}\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)\,dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j:(i,j)\in R} x_{ij}-\sum_{j:(j,i)\in R} x_{ji}=d_i, \quad i\in N, \tag{2}$$

$$r_{ij}^{-}\leq x_{ij}\leq r_{ij}^{+}, \quad (i,j)\in R. \tag{3}$$

Предположим, что выполняется условие сбалансированности системы (2), т.е. соответствия объемов подаваемого в сеть и потребляемого газа

$$\sum_{i\in N} d_i=0. \tag{4}$$

Предположим также, что для каждого ребра (i, j) функция $f_{ij}(x_{ij})$ является непрерывной, строго монотонно возрастающей и существует такое $\bar{x}_{ij}$, что $f_{ij}(\bar{x}_{ij})=0$. В [3] показано, что эти предположения гарантируют существование минимума поставленной задачи.

Будем считать, что выделено некоторое подмножество вершин $\overline{N}\subseteq N$, в которых величина d_i не является фиксированной. В [3] построены алгоритмы для задачи минимизации стоимости транспортировки газа при условии, что d_i, $i\in\overline{N}$, представляются как неизвестные, т.е. оптимизация происходит не только за счет минимизации стоимости доставки газа потребителям, но и вследствие эффективного перераспределения нагрузки источников и стоков.

Каждому *i*-у соотношению (2) ставится в соответствие множитель Лагранжа u_i, а соотношению (4) — множитель u_0. Условия оптимальности формулируются следующим образом [3]. Если в задаче распределения потоков параметры подачи газа в сеть в узлах $i \in \bar{N}$ не фиксированы и не ограничены, то для того, чтобы потоки x_{ij}, $(i, j) \in R$, были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие u_i, $i \in N \setminus \bar{N}$, для которых выполняются следующие условия: если $x_{ij} = r_{ij}^-$, то $f_{ij}(x_{ij}) \geq u_j - u_i$; если $x_{ij} = r_{ij}^+$, то $f_{ij}(x_{ij}) \leq u_j - u_i$; если $r_{ij}^- < x_{ij} < r_{ij}^+$, то $f_{ij}(x_{ij}) = u_j - u_i$. Кроме того, $u_i = u_0$ для $i \in \bar{N}$, причем величину u_0 можно выбрать произвольно.

Доказательство получаем, применяя теорему Куна–Таккера [4] к задаче (1)–(4), с учетом того, что условия, наложенные на функции $f_{ij}(x_{ij})$, гарантируют выпуклость слагаемых функции Лагранжа:

$$L = \sum_{(i,j)\in R} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt + \sum_{i\in N} u_i \left(\sum_{j:(i,j)\in R} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in R} x_{ji} - d_i \right) + u_0 \sum_{i\in N} d_i =$$

$$= \sum_{(i,j)\in R} \left(\int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt - x_{ij}(u_j - u_i) \right) + \sum_{i\in N} (u_0 - u_i) d_i \qquad (5)$$

для любых значений двойственных переменных.

Двойственные переменные являются некоторыми ценовыми параметрами. Если на узловые переменные не наложены ограничения, то предполагается, что источники (стоки) равноценны и тогда соответствующие им переменные двойственной задачи совпадают.

Решать задачу (1)–(4) удобно путем перехода к двойственной задаче безусловной максимизации некоторой нелинейной непрерывно дифференцируемой аддитивно-сепарабельной функции Ф. Конкретизация вида этой неявно заданной целевой функции и определение ее производных по формуле [3]

$$\frac{d\Phi}{du_i} = \sum_{j:(i,j)\in R} x_{ij}(u_j - u_i) - \sum_{j:(j,i)\in R} x_{ji}(u_i - u_j) - d_i, \quad i \in N,$$

дает возможность использовать различные методы нелинейного программирования.

Предложенный подход позволяет не только перейти от задачи с большим числом ограничений к задаче без ограничений, но и повысить эффективность процесса нахождения решения, учитывая совпадение двойственных переменных в соответствующих точках и исключая при реализации алгоритмов ненужные вычисления. Зная оптимальные значения двойственных переменных u_i, $i \in N \setminus \bar{N}$, с учетом приведенных выше условий оптимальности можно определить оптимальное значение потоков x_{ij}, $(i, j) \in R$, для всех участков сети.

В [3, 5, 6] подробно исследованы особенности применения для решения задачи (1)–(4) методов покоординатного спуска и сопряженных градиентов, а также различных модификаций метода линеаризации.

Предположим, что в процессе решения задачи эксперты определили различный желаемый плановый вклад источников подачи газа, который составляет $\hat{d}_i$ для узлов $i \in \bar{N}$. Учет экспертных оценок можно осуществить введением штрафов за большие отклонения от плановых значений в виде квадратичной добавки $\frac{1}{2} \sum_{i\in\bar{N}} (d_i - \hat{d}_i)^2$ в целевую функцию. Кроме того, существуют определенные технологические ограничения на производительность источников $d_i^- \le d_i \le d_i^+$, $i \in \overline{N}$.

При данной постановке задачи условия оптимальности для узлов $i \in \overline{N}$ имеют следующий вид: если $d_i = d_i^-$, то $d_i - \hat{d}_i \ge u_i - u_0$; если $d_i = d_i^+$, то $d_i - \hat{d}_i \le u_i - u_0$; если $d_i^- < d_i < d_i^+$, то $d_i - \hat{d}_i = u_i - u_0$.

ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ В ПРОЦЕССЕ ЗАПОЛНЕНИЯ И ОПОРОЖНЕНИЯ ПХГ

Подземные хранилища газа предназначены для регулирования сезонных неравномерностей газоснабжения, создания государственных запасов газа, повышения надежности работы газотранспортных систем, гарантированной равномерности экспортной поставки и транзита газа [7].

Пусть в вершинах $i \in N_0$ сети G расположены хранилища, причем y_i — удельное количество газа, который заполняет *i*-е хранилище, s_i^- и s_i^+ — минимальный и максимальный объемы заполнения *i*-го хранилища, $h_i(y_i)$ — его эксплуатационные затраты. Соответственно эксплуатационные затраты комплекса хранилищ представляются в виде функции [8]

$$H = \sum_{i \in N_0} \int_0^{y_i} h_i(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

а общие расходы на транспортировку газа с учетом его отбора (закачки) в ПХГ можно представить в виде суммы функций (1) и (6).

Сформулируем задачу оптимизации функционирования сети при минимизации эксплуатационных расходов в процессе заполнения или опорожнения хранилищ

$$\min\,(F + H),$$

$$\sum_{j:(i,j)\in R} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in R} x_{ji} = d_i, \ \ i \in N \setminus N_0,$$

$$\sum_{j:(i,j)\in R} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in R} x_{ji} = y_i, \ \ i \in N_0,$$

$$r_{ij}^- \le x_{ij} \le r_{ij}^+, \ \ (i,j) \in R, \ \ s_i^- \le y_i \le s_i^+, \ \ i \in N_0.$$

В процессе решения задачи происходит не только нахождение оптимальной величины, но и определение направления потоков, которое либо совпадает (величина потока со знаком плюс (+)), либо противоположно (величина потока со знаком минус (–)) предварительно заданной ориентации дуг графа. Аналогично фиксируется и направление подачи газа в ПХГ. Происходит опорожнение хранилищ, если $y_i > 0$, и их заполнение, если $y_i < 0$, $i \in N_0$.

Необходимо, чтобы соблюдался баланс между суммарным спросом потребителей газа и его подачей в сеть, в частности, суммарной производительностью хранилищ

$$\sum_{i \in N \setminus N_0} d_i + \sum_{i \in N_0} y_i = 0.$$

Будем считать, что на функции стоимости закачки (отбора) газа в хранилища $h_i(\cdot)$ наложены условия, аналогичные приведенным выше для функций его транспортировки $f_{ij}(\cdot,\cdot)$. Условия оптимальности для узлов $i \in N_0$, в которых расположены хранилища, формулируются следующим образом: если $y_i = s_i^-$, то $h_i(y_i) \ge u_i - u_0$; если $y_i = s_i^+$, то $h_i(y_i) \le u_i - u_0$; если $s_i^- < y_i < s_i^+$, то $h_i(y_i) = u_i - u_0$.

Для решения оптимизационных задач для комплексов ПХГ создан программный продукт [9], в основе которого лежит численный метод линеаризации.

С помощью разработанных программ можно решать задачи оптимизации работы комплексов ПХГ трех уровней, вводить различные целевые функции и ограничения для каждого уровня, определять результаты, необходимые для использования на следующих (высших) уровнях, и т.д. Программа содержит схему всех ПХГ Украины, которую пользователь может активизировать, т.е. выбрать газохранилища непосредственно на схеме, чтобы сформулировать для них задачу оптимизации.

УВЕЛИЧЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ РАБОТЫ ГАЗОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В сфере развития газовой промышленности актуален вопрос роста производительности газодобывающих предприятий для уменьшения затрат и увеличения отдачи от вложенных в эту отрасль средств. Критериями оптимизации функционирования газодобывающего предприятия могут быть: достижение максимальной прибыли; обеспечение минимальных эксплуатационных расходов в процессе отбора газа из месторождения; сохранение при отборе газа максимального потенциала продуктивности.

Рассмотрим проблему определения оптимальной интенсивности функционирования газодобывающего предприятия по критерию максимизации его прибыли.

Годовая прибыль газодобывающего предприятия вычисляется с помощью соотношения [10]

$$P=\left[W-\left(C+\frac{1}{T}K\right)\right]Q,$$

где W — цена за 1 тыс. м^3 газа ; C — текущие затраты на добычу 1 тыс. м^3 газа; K — удельные капиталовложения на добычу 1 тыс. м^3 газа; T — срок эксплуатации месторождения; Q — объем годовой добычи газа (в тыс. м^3).

При математическом описании модели функционирования газодобывающих предприятий исходят из следующих технолого-экономических показателей:

1) годовая добыча постоянна и не зависит от количества капиталовложений;

2) годовая добыча постоянна и не зависит от количества капиталовложений, но цена на газ повышается;

3) годовая добыча со временем уменьшается без дополнительных капиталовложений;

4) годовая добыча поддерживается на постоянном уровне за счет дополнительных капиталовложений.

Если предположить, что предприятие функционирует в условиях полной определенности относительно промышленных запасов газа, то согласно четырем перечисленным показателям можно построить четыре соответствующие математические модели [11].

Модель 1. Если объем годовой добычи $Q=\text{const}$, то время разработки определяется из соотношения

$$T=\frac{V}{Q}, \tag{7}$$

где V — объем запасов месторождения. В целом уровень добычи газа зависит от величины капиталовложений. Рассмотрим случай, когда не предусмотрены вложения дополнительных средств для поддержания добычи на одном уровне. Тогда годовые затраты предприятия составят

$$CQ+\frac{1}{T}KQ=\left(C+\frac{K}{T}\right)Q.$$

Если газодобывающее предприятие будет функционировать T лет, то расходы за этот период с учетом дисконтирования составят

$$\sum_{i=1}^{T}\left[\frac{C}{(1+E)^{i}}+\frac{1}{T}K\right]Q, \qquad (8)$$

где E — отраслевой нормативный коэффициент эффективности. Выразив $\frac{1}{1+E}$ через e^{-k}, где k — показатель эффективности функционирования газодобывающего предприятия, приведем (8) к интегральной форме

$$Z=Q\int_{0}^{T}\left(C+\frac{1}{T}Ke^{kt}\right)e^{-kt}dt.$$

Прибыль предприятия за период T с учетом последнего соотношения составит

$$P=Q\int_{0}^{T}\left(W-C-\frac{1}{T}Ke^{kt}\right)e^{-kt}dt.$$

Очевидно, что прибыль P с учетом (7) имеет вид

$$P=\frac{W-C}{k}\left(1-e^{-k\frac{V}{Q}}\right)Q-KQ. \qquad (9)$$

Задача формулируется следующим образом: найти такие оптимальные темпы добычи газа и время разработки месторождения, которые обеспечат максимум прибыли газодобывающего предприятия.

Для исследования функции (9) на выпуклость найдем вторую производную

$$\frac{d^2P}{dQ^2}=-k(W-C)\frac{V^2}{Q^3}e^{-\frac{V}{Q}}.$$

Поскольку $k=\ln\frac{1}{1+E}$, где $E>0$, то $k<0$ и можно сделать вывод, что $\frac{d^2P}{dQ}<0$ для $Q>0$. Это означает, что функция прибыли является строго вогнутой, а следовательно, имеет единственную точку максимума.

Из условий оптимальности получаем соотношение, которое определяет оптимальные темпы добычи

$$\frac{kK}{W-C}=1-e^{-k\frac{V}{Q}}\left(1+k\frac{V}{Q}\right).$$

Зная оптимальный объем добычи Q_{opt}, находим оптимальный срок эксплуатации месторождения T_{opt} и максимальную прибыль с помощью соотношения (9).

Модель 2. Величина прибыли газодабывающего предприятия зависит от цены на газ, которая имеет тенденцию к повышению в связи с ростом потребительского спроса и уменьшением мировых запасов.

Повышение цены в этом случае происходит по экспоненциальному закону $W=W_0e^{\alpha t}$, где W_0 — цена за 1 тыс. м^3 газа на начало периода T, α — показатель повышения стоимости. Кроме того, если учесть квадратичный закон зависимости капитальных вложений от величины годовой добычи Q (в соответствии с практикой разработки газовых месторождений), то окончательное выражение для прибыли будет иметь вид

$$P = \frac{W_0 Q}{k-\alpha}(1-e^{(\alpha-k)T}) - \frac{CQ}{k}(1-e^{-kT}) - (aQ^2 + bQ), \tag{10}$$

где a и b — коэффициенты квадратичной зависимости.

Как и в первой модели, функция прибыли является строго вогнутой и имеет единственную точку максимума. Дифференцируя (10) по Q, найдем уравнение, которое определяет оптимальные темпы добычи газа при разработке месторождения

$$\frac{W_0}{k-\alpha}\{1-e^{(\alpha-k)T}[1+(k-\alpha)T]\} - \frac{C}{k}[1-e^{-kT}(1+kT)] - a\frac{V}{T} - b = 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) является наиболее общим и приемлемым для оценки прибыли за период времени T.

Модель 3. Объем годовой добычи газа согласно этой модели определяется с помощью соотношения

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}, \tag{12}$$

где Q_0 — начальный объем годовой добычи, λ — технологический параметр, определяющийся отдельно для каждого месторождения. Требуется найти такой объем годовой добычи газа, при котором прибыль предприятия будет максимальной.

Для интеграла прибыли, учитывая (12), получаем соотношение

$$P = Q_0 \int_0^T \left(W - C - \frac{1}{T} K e^{kt} \right) e^{-(k+\lambda)t} dt.$$

Таким образом, срок эксплуатации месторождения составит

$$T = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{V\lambda}{Q_0}\right).$$

В итоге имеем параметры, которые дают величину максимальной прибыли в случае уменьшения объема годовой добычи газа.

Модель 4. Постоянный уровень добычи на газодобывающем предприятии в этом случае поддерживается за счет выделения дополнительных средств. Для получения единицы установленного объема газа в t-й год нужно затратить $\frac{K}{T} e^{\mu}$, где μ — коэффициент, определяемый статистически для каждого месторождения. Величина прибыли имеет вид

$$P = Q\left[\frac{W-C}{k}(1-e^{-kT}) - \frac{K}{\mu T}(e^{\mu T} - 1)\right],$$

где T определяется из соотношения (7). Уравнения для вычисления параметров оптимального функционирования газодобывающего предприятия по критерию максимума прибыли в случае поддержания объема годовой добычи на постоянном уровне за счет дополнительных капиталовложений определяется с учетом условий оптимальности.

Для описанных четырех моделей величина Q_{opt} находится с помощью численных методов оптимизации, поскольку уравнения, связывающие величину прибыли с объемами добычи и временем эксплуатации газовых месторождений, не разрешимы аналитически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные модели позволяют решать комплекс взаимосвязанных задач оптимизации эксплуатации газотранспортной системы. Если общую модель распределения потоков можно использовать для расчета всей сетевой распределительной системы, то модель функционирования комплекса подземных хранилищ — это задача среднего иерархического уровня. Проблема определения оптимальных темпов добычи для газовых месторождений относится к низшему иерархическому уровню. Решив задачи низшего уровня и подставив полученные значения в модель (1)–(3), можно рассчитать оптимальные транспортные потоки газа с учетом ввода новых месторождений или использования подземных хранилищ в случае непредвиденных ситуаций.

Несмотря на достаточно высокую степень идеализации при построении моделей, они позволяют провести оценку эффективности системы при проектировании сетей, рассчитать предварительный план подачи газа в сеть при сезонной смене потребностей пользователей, гарантировать удовлетворение потребителей при аварийных отказах некоторых узлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Системные исследования в энергетике / Под ред. Н.И. Воропая. — Новосибирск: Наука, 2010. — 686 с.
2. Остапенко В.В., Скопецький В.В., Фінін Г.С. Розподіл ресурсів у просторі та часі. — Київ: Наук. думка, 2003. — 323 с.
3. Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е. Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 67–77.
4. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
5. Кірік О.Є. Розподіл потоків в мережах складної кільцевої топології // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 2. — С. 18–26.
6. Кірік О.Є. Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків // Там же. — 2007. — № 3. — С. 67–73.
7. Савків Б.П. Задачі оптимізації функціонування комплексів підземного зберігання газу в Україні // Нафтова і газова промисловість. — 1997. — № 6. — С. 36–39.
8. Кірік О.Є. Оптимізація заповнення сховищ в задачах розподілу потоків для розподільчих мереж // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2010. — № 1. — С. 28–35.
9. Яковлева А.П., Парфенюк О.В. Оптимізація функціонування комплексів підземного зберігання газу в Україні // XV Міжнар. наук.-техн. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2008», Одеса, 23–26 вересня 2008 г.: Тез. докл. — Одеса: ОНМА, 2008. — С. 49.
10. Стан і перспективи розвитку нафтогазового комплексу України / І.М. Карп, Д.О. Єгер, Ю.О. Зарубін, Л.М. Уніговський та ін. — Київ: Наук. думка, 2006. — 310 с.
11. Яковлева А.П., Гонцовський А.Л. Задача підвищення ефективності функціонування газовидобувного підприємства та її розв‘язання за допомогою системного аналізу моделей оптимальної розробки газових родовищ // XV Міжнар. конф. «Інвестування в енергетику, енергозбереження та екологію», Місхор, 5–9 червня 2012 г.: Тез. докл. — Київ: Підприємство «Електромеханіка», 2012. — С.113–120.

Поступила 12.09.2013