УДК 519.6

О.Н. ЛИТВИН, Ю.И. ПЕРШИНА, И.В. СЕРГИЕНКО

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, КОГДА ЛИНИИ РАЗРЫВА НЕИЗВЕСТНЫ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ)

Аннотация. Построены и исследованы разрывные интерполяционные сплайны для приближения разрывных функций. Разработан алгоритм восстановления разрывной функции, неизвестные разрывы которой лежат на прямых, параллельных координатным осям, с помощью приближения ее построенным разрывным интерполяционным сплайном, а также алгоритм нахождения разрывов разрывной функции на основе введенного понятия ε-непрерывности функции двух переменных. Приведены примеры.

Ключевые слова: разрывная функция, разрывные интерпполяционные сплайны двух переменных, разрывная аппроксимация, прямоугольные элементы.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи приближения разрывных функций ставятся значительно чаще, чем задачи приближения непрерывных функций. Например, в компьютерной томографии при анализе внутренней структуры тела полезно учитывать его неоднородность (плотность костей, сердца, желудка, печени и т.д. различна, в следствие чего плотность всего тела является функцией с разрывами первого рода на системе линий или поверхностей); при изучении коры Земли с помощью данных с кернов буровых скважин возникает задача восстановления внутренней структуры коры между скважинами. При этом очевиден тот факт, что плотность грунта в различных точках коры неоднородна и чаще всего имеет разрывы первого рода в точках поверхностей, которые отделяют одну составляющую коры от другой (чернозем, песок, глина, гранит и т.д.).

Таким образом, актуальна разработка и исследование теории приближения разрывных функций с помощью разрывных сплайнов.

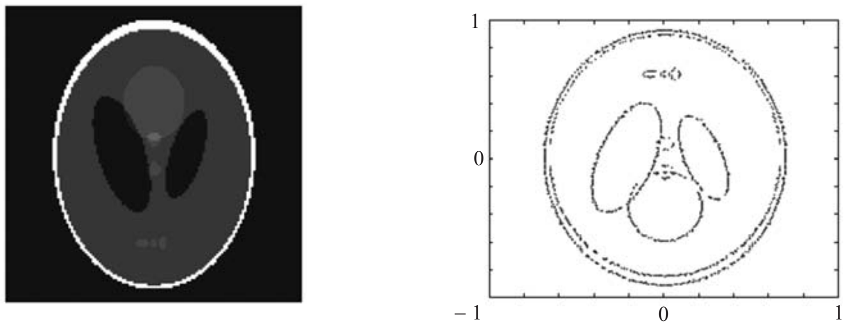
АКТУАЛЬНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Задача приближения непрерывных функций непрерывными сплайнами одной и нескольких переменных описана во многих работах (см. например, [1–4]). На практике использование кусочно-аналитических приближений, заданных различными полиномами соответствующей степени в точках каждого элемента разбиения области приближения, приводит иногда к нахождению большого количества неизвестных параметров и, следовательно, к появлению неконформных элементов в методе конечных элементов [5].

Аналогичную задачу в [6] исследовал Б.А. Попов, который рассматривал приближение непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций с помощью разрывных сплайнов в чебышевской норме (равномерное приближение).

Неравномерная сходимость рядов Фурье для разрывных функций и, в частности, колебательное поведение конечных сумм проанализированы H. Wilbraham в [7]. Спектральные методы Фурье использовались для моделирования сложных гладких физических явлений. Их скорость сходимости зависит от гладкости и периодичности функции в интересующей области. Если функция имеет разрыв хотя бы в одной точке, скорость сходимости ухудшается до первого порядка и колебания развиваются рядом с разрывами. Такое поведение называется явлением Гиббса. Возникновение этого явления описано в [8], где показано, что знание коэффициентов Фурье достаточно для получения значений кусочно-гладкой функции с тем же порядком точности, как и в случае гладкой функции. Это очень хороший способ восстановления значения точки $f(x)$ при условии, что она гладкая и периодическая. Действительно, известно, что для аналитической и периодической функции ряд Фурье сходится экспоненциально быстро. Однако если функция разрывная, то ее ряд Фурье не является хорошим приближением к $f(x)$. Фильтрация — это классический инструмент для снижения влияния явления Гиббса в разложении Фурье. В [9] проанализировано использование фильтров в разложении Фурье разрывных функций и показано, что фильтрация не полностью устраняет явление Гиббса.

В [10] рассмотрена задача выявления кривых, в которых функция двух переменных имеет разрыв, по дискретному набору точек и предложен метод, основанный на вейвлетах, позволяющих отличать точки разрыва от точек экстремума. С помощью этого метода можно определять точки разрыва, используя свойства вейвлетов и ректангуляцию области определения функции. В работе [10] показано приложение изложенной теории на практическом примере, фантоме Шеппа–Логана, который используется в качестве теста в компьютерной томографии (рис. 1): большой эллипс (головной мозг) содержит несколько небольших эллипсов, представляющих различные функции мозга.



а *б*

Рис. 1. Фантом Шеппа–Логана (*а*) и результат алгоритма определения разрывов (*б*)

Однако указанный метод, во первых, трудоемок, а во-вторых, находит только точки разрывов функции, но не восстанавливает ее во всей области.

Таким образом, в перечисленных работах исследовалось приближение непрерывных функций с помощью непрерывных и разрывных сплайнов. Но общей теории таких приближений, а также общей теории приближения разрывных функций разрывными сплайнами не существует. В [11] предложена общая теория построения разрывных сплайнов, множество которых, как частный случай, включает множество непрерывных и непрерывно-дифференцируемых до заданного порядка сплайнов, имеющих разрывы первого рода или разрывные частные производные в заданных точках или на заданном множестве линий — границ элементов. Вследствие того, что в каждом элементе разбиения построенные разрывные сплайны по определению могут приближать функцию $f(x, y)$ независимо один от другого (это могут быть операторы интерполяции или аппроксимации), появляется возможность найти оценки погрешности (в некоторых случаях точные) приближения функций как непрерывных, так и разрывных. При этом если приближаемая функция имеет разрывы первого рода на линиях между элементами, то предложенный метод приближения позволяет получить наилучшие приближения в норме L_2 или L_∞. Если приближаемая функция имеет разрывы в точках или на линиях, пересекающих один или несколько элементов, то точные оценки погрешности пока неизвестны.

В работах [11–13] построены и исследованы интерполяционные, аппроксимационные, а также интерлинационные разрывные сплайны для приближения разрывных функций от двух переменных с областью определения, которая разбивается на прямоугольные и треугольные элементы, причем считается, что линии разрыва известны. В работе [14] предложен метод восстановления разрывной функции одной переменной по известным ее значениям в точках заданной сетки с использованием разрывныго аппроксимационного сплайна, т.е. точки разрыва заданной функции заранее неизвестны.

Таким образом, актуальны задачи восстановления разрывной функции и выявления разрывов заданной разрывной функции.

В настоящей работе предложен метод восстановления разрывной функции двух переменных по известным значениям этой функции в заданной сетке узлов, не лежащих на линиях разрыва. Для этого используется приближение разрывной функции двух переменных разрывным билинейным интерполяционным сплайном на прямоугольных элементах. Методы допускают обобщение на случай, когда в каждом элементе используются полиномы более высокой степени.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы разрывная функция двух переменных $f(x, y)$ в области $G=[0,1]\subset \subset R^2$ и некоторое разбиение на прямоугольные элементы $\Pi_{i,j}=[x_i, x_{i+1}]\times \times [y_j, y_{j+1}]$, $0=x_0<x_1<\ldots<x_m=1$, $0=y_0<y_1<\ldots<y_n=1$. Известны значения этой функции в узлах заданной сетки, причем в каждой точке (x_i, y_j) задано четыре значения приближаемой функции (односторонние значения):

$$C_{i,j}^{++}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x, y),\; C_{i,j}^{-+}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x, y),$$

$$C_{i,j}^{+-}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x, y),\; C_{i,j}^{--}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j-0}} f(x, y).$$

Целью работы является построение и исследование разрывного билинейного интерполяционного сплайна по значениям матрицы C разрывной функции и определение линий разрывов.

ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СПЛАЙНА

С помощью заданных односторонних значений функций построим разрывный интерполяционный билинейный полином в виде

$$P(x, y)=p_{ij}(x, y)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+\right.$$

$$+C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+$$

$$\left.+C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\right),\; (x, y)\in\Pi_{i,j}, \qquad (1)$$

который в каждом прямоугольном элементе $\Pi_{i,j}$ является непрерывным интерполяционным билинейным полиномом.

Лемма. Разрывная, билинейная в каждом элементе разбиения функция $P(x, y)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\lim_{x\to x_{i+1}-0} P(x, y) = p_{ij}(x_{i+1}, y), \quad \lim_{x\to x_i+0} P(x, y) = p_{ij}(x_i, y),$$

$$\lim_{y\to y_{i+1}-0} P(x, y) = p_{ij}(x, y_{j+1}), \quad \lim_{y\to y_j+0} P(x, y) = p_{ij}(x, y_j), (x, y)\in \Pi_{i,j}.$$

Доказательство вытекает из представления функции $P(x, y)$.

Определение 1. Функцию $P(x, y)$ будем называть разрывным билинейным сплайном на прямоугольной сетке.

Замечание. Если $C_{i,j}^{++} = C_{i,j}^{-+}, C_{i,j}^{+-} = C_{i,j}^{--}$, $i=\overline{1, m-1}$, $j=\overline{1, n-1}$, то в точке (x_i, y_j) сплайн $P(x, y)$ является непрерывной функцией. Если эти равенства выполняются для всех точек (x_i, y_j), то $P(x, y)\in C(G)$ будет классическим билинейным сплайном на указанной сетке узлов.

Теорема 1. Если $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода в некоторых точках (x_i, y_j) и $f(x, y)\in C^{(r,r)}(\Pi_{i,j})$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, $r=1, 2$, то остаток приближения функции $f(x, y)$ билинейным разрывным сплайном вида (1) в каждом прямоугольнике $\Pi_{i,j}$ будет иметь вид:

$$RP(x, y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f^{(r,r)}(\xi, \eta) G_1(x, \xi) G_2(y, \eta) d\xi d\eta, \quad (x, y)\in \Pi_{i,j}, \tag{2}$$

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\dfrac{(x_i-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \le \xi \le x \le x_{i+1}, \\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \le x \le \xi \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$$G_2(y, \eta) = \begin{cases} \dfrac{y-y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}\dfrac{(y_j-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \le \eta \le y \le y_{j+1}, \\ -\dfrac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\dfrac{(y_{j+1}-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \le y \le \eta \le y_{j+1}. \end{cases}$$

Доказательство приведено в работе [11].

Теорема 2. Если $f(x, y)\in C^{(r,r)}(\Pi_{i,j})$ и имеет разрывы первого рода в некоторых (или во всех) точках (x_i, y_j), то существуют такие значения $C_{i,j}^{++}$, $C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j}^{+-}, C_{i,j}^{--}$, что

$$\| f(x, y) - P(x, y)\|_{C(G)} = O(\Delta_1^r + \Delta_2^r), \quad \Delta_1 = \max_{0\le i< m}(x_{i+1}-x_i),$$

$$\Delta_2 = \max_{0\le j<n}(y_{j+1}-y_j) \quad \forall f(x, y)\in C^{(r,r)}(\Pi_{i,j}), \ \forall \Pi_{i,j}\subset G, \ \Delta_1\to 0, \ \Delta_2\to 0, \ r=1, 2.$$

Доказательство. Положим в формуле (1) для $p_{ij}(x, y)$

$$C_{i,j}^{++} = f(x_i+0, y_j+0), \quad C_{i,j}^{+-} = f(x_i+0, y_j-0),$$

$$C_{i,j}^{-+} = f(x_i-0, y_j+0), \quad C_{i,j}^{--} = f(x_i-0, y_j-0).$$

Отметим, что оператор $p_{ij}(x, y)$ можно представить в этом случае в виде

$$p_{ij}(x, y) = p_{ij} f(x, y) = E1_i E2_j f(x, y),$$

$$E1 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}, y),$$

$$E2 f(x, y) = \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} f(x, y_{j+1}).$$

Поэтому

$$f(x, y) - p_{ij} f(x, y) = (I - E1_i E2_j) f(x, y) =$$

$$= ((I - E1_i) + (I - E2_j) - (I - E1_i)(I - E2_j)) f(x, y) =$$

$$= (R1 + R2 - R1R2) f(x, y),$$

$$R1 f(x, y) = (I - E1_i) f(x, y), \; R2 f(x, y) = (I - E2_j) f(x, y).$$

Найдем погрешность приближения в норме $C(G)$ с помощью оценки в $C(\Pi_{i,j})$:

$$\| f(x, y) - p_{ij} f(x, y) \|_{C(G)} = \| R1 f(x, y) + R2 f(x, y) - R1R2 f(x, y) \|_{C(G)} =$$

$$= O(\Delta_1^r) + O(\Delta_2^r) + O(\Delta_1^r \Delta_2^r),$$

$$\Delta_1 = \max_{0 \le i < m} (x_{i+1} - x_i), \; \Delta_2 = \max_{0 \le j < n} (y_{j+1} - y_j).$$

При малых Δ_1 и Δ_2 последним слагаемым можно пренебречь.

Теорема 2 доказана.

Для поиска неизвестных $C_{i,j}^{++}$, $C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i,j+1}^{--}$ используем метод наименьших квадратов, согласно которому все неизвестные определяются из условия

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset G} \iint_{\Pi_{i,j}} [f(x, y) - p_{ij}(x, y, C)]^2 \, dxdy \to \min_C. \tag{3}$$

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ И НАХОЖДЕНИЯ ЕЕ РАЗРЫВОВ

Введем понятие ε-непрерывности функции двух переменных.

Определение 2. Если $\left| \lim\limits_{x \to x_q + 0} f(x, y) - \lim\limits_{x \to x_q - 0} f(x, y) \right| < \varepsilon \;\; \forall y$, то функцию $f(x, y)$ будем называть ε-непрерывной на линии $x = x_q$, аналогично, если $\left| \lim\limits_{y \to y_s + 0} f(x, y) - \lim\limits_{y \to y_s - 0} f(x, y) \right| < \varepsilon \;\; \forall x$, то функцию $f(x, y)$ будем называть ε-непрерывной на линии $y = y_s$.

Определение 3. Если выполняются все четыре неравенства в точке (x_q, y_s):

$$\left| \lim_{\substack{x \to x_q + 0 \\ y \to y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \to x_q - 0 \\ y \to y_s + 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \left| \lim_{\substack{x \to x_q + 0 \\ y \to y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \to x_q + 0 \\ y \to y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \lim_{\substack{x \to x_q - 0 \\ y \to y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \to x_q - 0 \\ y \to y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \left| \lim_{\substack{x \to x_q - 0 \\ y \to y_s - 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \to x_q + 0 \\ y \to y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

то функцию $f(x, y)$ будем называть ε-непрерывной в точке (x_q, y_s).

Определение 4. Если $f(x, y)$ является ε-непрерывной $\forall (x, y) \in \Pi_{i,j}$, то будем ее называть ε-непрерывной во всем прямоугольном элементе $\Pi_{i,j}$.

Перенумеруем заданные значения матрицы C, как показано на рис. 2. Здесь в качестве входных данных использована матрица значений $C_{p,\ell}$, $p=\overline{1, n\cdot m}$, $\ell=\overline{1,4}$, разрывной функции $f(x, y)$, где p — номер прямоугольного элемента.

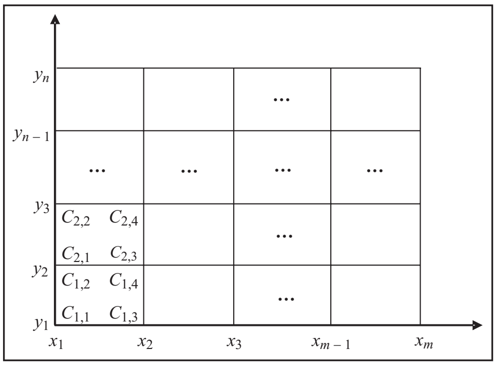


Рис. 2. Формирование матрицы известных значений разрывной функции в каждом прямоугольном элементе

Изложим алгоритм нахождения разрывов по шагам для данного разбиения элементов.

Шаг 1. Строим разрывный аппроксимационный сплайн на заданных узлах (x_i, y_j), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, по формуле (1), который в каждом элементе разбиения может иметь различный аналитический вид $p_{ij}(x, y, C)$ с неизвестными $C_{p,\ell}$, $p=\overline{1, n\cdot m}$, $\ell=\overline{1,4}$.

Шаг 2. Находим матрицу C неизвестных коэффициентов сплайна из условия (2). После подстановки найденных коэффициентов в сплайн (1) получим разрывный сплайн, состоящий из функций $p_{ij}(x, y)$, $i=\overline{1, m-1}$, $j=\overline{1, n-1}$.

Шаг 3. На каждом прямоугольном элементе разбиения $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1, m-1}$, $j=\overline{1, n-1}$, вычисляем значения

$$J_{ij}^* = \max_{x_i\le x\le x_{i+1}\; y_j\le y\le y_{j+1}} J_{ij}(x, y),\;\; J_{ij}(x, y)=|\,f(x, y)-p_{ij}(x, y)\,|\,.$$

Шаг 4. Удаляем из рассмотрения прямоугольные элементы, на которых построенный билинейный сплайн является ε-непрерывным. Оставшиеся прямоугольные элементы $\Pi_{k,\ell}$, $k=\overline{1, n1}$, $\ell=\overline{1, n2}$, делим на равные четыре прямоугольника, вводя новые линии внутри выбранного прямоугольного элемента. Например, если делим $\Pi_{u,v}$, $u< m, v< n$, то вводим в рассмотрение линии внутри $\Pi_{u,v}$:

$$x=x^*,\;\; y_v< y< y_{v+1};\;\; y=y^*,\;\; x_u< x< x_{u+1}, \tag{4}$$

$$x^* = x_u+\frac{x_{u+1}-x_u}{2},\;\; y^* = y_v+\frac{y_{v+1}-y_v}{2}.$$

Шаг 5. Для полученного набора $\Pi_{k,\ell}$, $k\in\{1,\ldots, n1\}$, $\ell\in\{1,\ldots, n1\}$, разделенных прямоугольных элементов снова строим аппроксимационные сплайны по формуле (1) и находим матрицу неопределенных коэффициентов C по формуле (3). Далее проверяем выполнение условия $\max\limits_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]}} |\,f\;(x, y)-P(x, y)\,|<\varepsilon$, где ε — заданная точность приближения. Если это условие выполняется, то получим набор отрезков прямых вида (4), которые и сформируют линию разрыва заданной разрывной функции $f(x, y)$. Если указанное условие не выполняется, то возвращаемся к шагу 3.

Рассмотрим примеры применения описанного алгоритма нахождения линий разрывов функции двух переменных.

Пример 1. Пусть в области $G=[0,1]\times[0,1]$ задана функция (рис. 3, *а*)

$$f(x, y)=\begin{cases}3, & 0\le x\le 0.4,\\ 0, & 0.4< x\le 1,\end{cases}$$

т.е. функция имеет один разрыв первого рода на линии $x=0.4$.

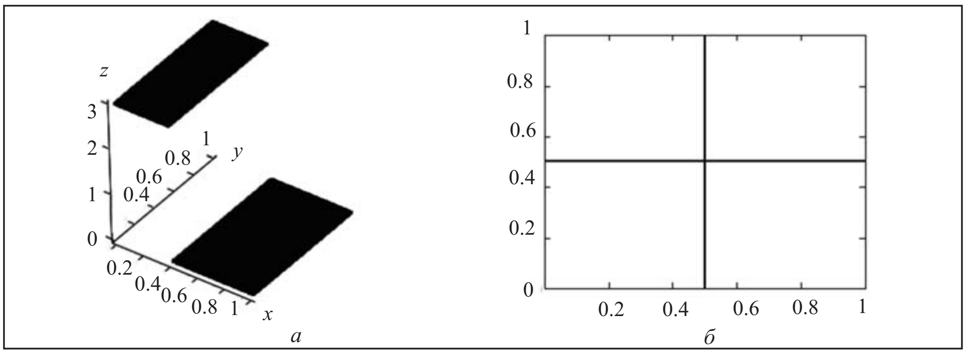


Рис. 3. Графический вид функции $f(x,\ y)$ (*а*); заданная сетка для приближающего сплайна (*б*)

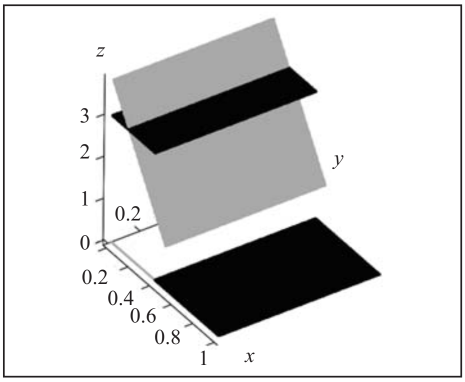


Рис. 4. Графический вид приближаемой функции (черный цвет) и построенного сплайна (серый цвет)

Зададим точность приближения $\varepsilon = 0.01$. Выберем сетку так, чтобы она не совпадала с линией разрыва заданной функции: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 1$ (рис. 3, *б*). Строим разрывный аппроксимационный сплайн по формуле (1) и находим неизвестную матрицу C по формуле (3) (рис. 4).

В результате применения к заданной разрывной функции описанного выше алгоритма (на рис. 5, *а* приведена его промежуточная итерация) получим разрывный билинейный сплайн (рис. 5, *б*).

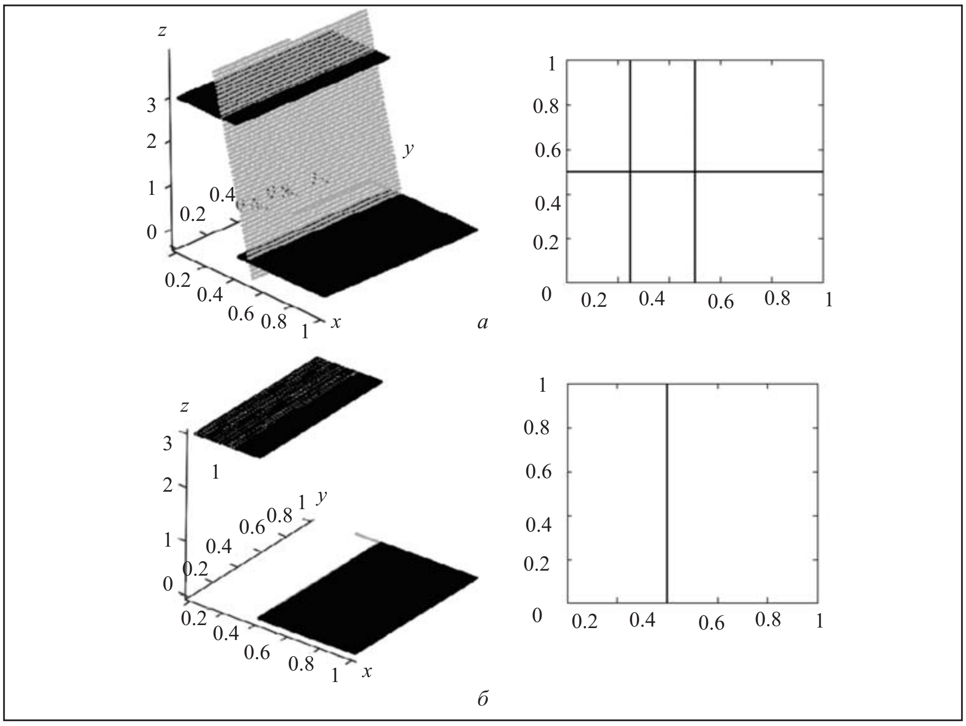


Рис. 5. Графики приближаемой (черный цвет) и приближенной (серый цвет) функций для примера 1 на второй (*а*) и последней итерациях (*б*)

Таким образом, разрывный сплайн $P(x, y)$ приблизил разрывную функцию $f(x, y)$ с точностью ε.

Пример 2. Пусть в той же области, что и в примере 1, задана функция (рис. 6)

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 0.4,\ 0 \le y \le 0.4, \\ 0, & 0.4 < x \le 1,\ 0.4 < y \le 1. \end{cases}$$

Выберем такую же сетку, как и в примере 1.

Данная функция имеет разрывы на отрезках $x = 0.4, 0 < y < 0.4$; $y = 0.4, 0 < x < 0.4$. Построим аппроксимационный сплайн на заданной сетке и определим такую же точность приближения. На рис. 7 приведены некоторые промежуточные результаты приближения разрывной функции (слева) и сетки приближенного сплайна (справа).

Таким образом, получен разрывный сплайн (рис. 7, *в*), который приближает заданную разрывную функцию с точностью 0,01, а также отрезки, на которых данная функция имеет разрыв.

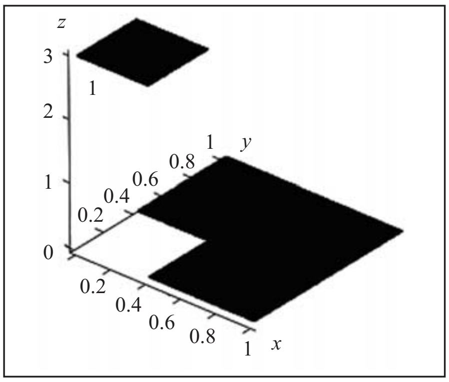


Рис. 6. Графический вид приближаемой функции

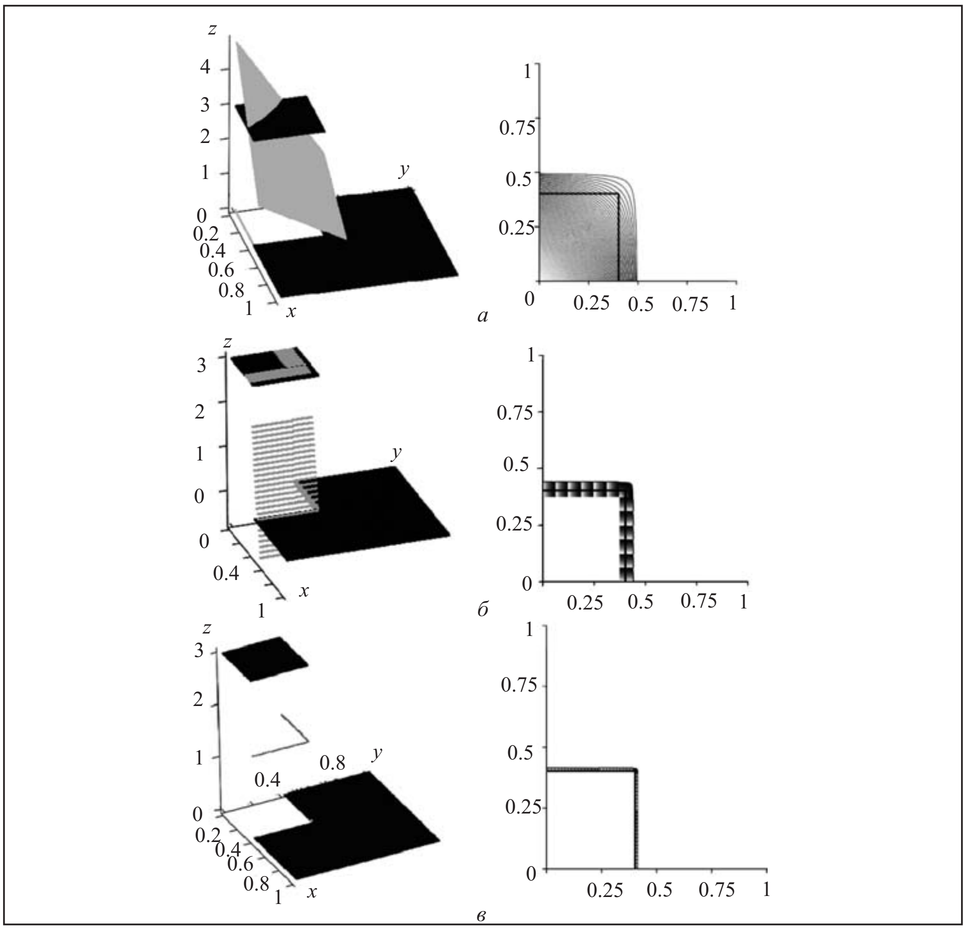


Рис. 7. Графики приближаемой (черный цвет) и приближенной (серый цвет) функций для примера 2 на первой (*а*), третьей (*б*) и последней итерациях (*в*)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача приближения функции двух переменных, имеющей разрывы первого рода, предложено приближать такие функции разрывными сплайнами. Введено понятие ε-непрерывности функции двух переменных. На его основе разработан метод восстановления разрывной функции с помощью разрывного аппроксимационного билинейного сплайна с использованием известных односторонних интерполяционных данных на заданной сетке узлов, не совпадающей с линиями разрыва. Этот метод позволяет также определить линии ε-разрыва экспериментально заданной разрывной функции и выбирать оптимальные узлы сетки приближенного сплайна. Приведены примеры, подтверждающие изложенную теорию.

В дальнейшем авторы планируют разработать алгоритм восстановления разрывной функции, разрывы которой лежат на более сложных линиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 124с.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
4. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983. — 215 с.
5. Сьярле Ф. Метод конечних элементов для эллиптических задач: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. – 512 с.
6. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
7. Wilbraham H. On a certain periodic function // Cambridge and Dublin Math. J. — 1848. — N 3. — P. 198–201.
8. Gottlieb S., Jae-Hun, Kim S. A review of David Gottlieb's work on the resolution of the Gibbs phenomenon // Commun. Comput. Phys. — Beijing. — 2011. — **9**, N 3. — P. 497–519.
9. Advances in the Gibbs phenomenon / Abdul J. Jerri, Ed. — Potsdam; New York: Clarkson Univ. Σ Sampling Publishing, 2011. — 424 p.
10. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid // J. Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. — 2007. — **1**, N 1. — P. 1–13.
11. Литвин О.М., Першина Ю.І. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврический весник информатики и математики. — Симферополь. — 2011. — № 1. — С. 63–72.
12. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) // Компьютерная математика. — 2011. — № 1. — С. 96–105.
13. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. — 2011. — № 5. — С. 34–47.
14. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції // Праці ІПММ НАН України. — Донецьк, 2012. — **24**. — С. 157–165.

Поступила 26.06.2013