УДК 519.85

Л.Н. КОЛЕЧКИНА, Е.А. ДВЕРНАЯ, А.Н. НАГОРНАЯ

МОДИФИКАЦИЯ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ ПРИ УСЛОВИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ

Аннотация. Предложен подход к решению экстремальной задачи оптимизации на комбинаторной конфигурации перестановок при условии многокритериальности на основе теории графов. Описана подпрограмма метода поиска точек конфигурации, которая использует координатный метод решения в предложенном модифицированном подходе.

Ключевые слова: экстремальные задачи, комбинаторные конфигурации, экстремальные задачи на комбинаторных конфигурациях, условие многокритериальности, координатный метод.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс принятия оптимальных решений неизбежен и необходим в разнообразных сферах человеческой деятельности, таких как экономика, производство, проектирование, сельское хозяйство и др. [1–4]. В зависимости от сложности поставленных задач и целей он может интерпретироваться как решение некой экстремальной задачи поиска максимального или минимального значения заданного оптимизируемого параметра. Построение множества возможных решений задачи характеризуется принадлежностью к комбинаторному множеству и влияет на комбинаторные свойства задачи, которая рассматривается на определенной комбинаторной конфигурации [5]. Достижение наилучшего результата для нескольких целей одновременно определяется условием многокритериальности и представляет задачу как векторную, т.е. связанную с поиском оптимальных значений векторной целевой функции путем выбора из множества допустимых решений.

С увеличением количества критериев оптимизации сложность задачи возрастает [6–11] и появляется необходимость в разработке нового подхода к решению векторных комбинаторных задач, поскольку общий алгоритм не всегда можно адаптировать и эффективно применять. Поэтому актуален вопрос о форме ее математической постановки и поиске методов решения.

Данная работа — продолжение исследований в области комбинаторной оптимизации при условии многокритериальности [3, 8–12]. Ее целью является разработка модифицированного подхода к решению многокритериальной задачи на множестве перестановок, построение алгоритма модифицированного подхода, проведение численного эксперимента.

ПОСТАНОВКА ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ УСЛОВИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ

Согласно [7] в общем случае оптимизационную задачу можно представить в виде кортежа $\langle F, X, \Pi, D, extr\rangle$, где $F: X \to R^1$ — заданная целевая функция, R^1 — числовая прямая, X — пространство решений, Π — предикат, который определяет подмножество $D \subseteq X$ допустимых вариантов решения задачи с учетом условий ее ограничений, $extr \in \{\min, \max\}$ — направление оптимизации. Тогда задача формулируется следующим образом: найти такое $x^* \in D \subseteq X$, что

$$x^* = \arg \underset{x \in D \subseteq X}{extr} F(x). \qquad (1)$$

Даная экстремальная задача будет комбинаторной при условии, что пространство решений X определяется как некая комбинаторная конфигурация. В данной работе в качестве примера рассмотрена конфигурация перестановок.

Задача будет многокритериальной, если критерий оптимальности F векторный, т.е. $F(f_1, f_2, .., f_n)$. При выполнении указанных условий задача (1) будет экстремальной комбинаторной задачей при условии многокритериальности. Однако в процессе решения задачу оптимизации нескольких критериев (векторную) можно привести методом их свертывания к однокритериальной. Поэтому постановка задачи состоит в поиске экстремальных значений функции на определенной комбинаторной конфигурации при дополнительных ограничениях. Отметим, что нахождение экстремального значения функции при отсутствии дополнительных ограничений является достаточно легкой задачей, поскольку как максимальное, так и минимальное значение можно найти, упорядочив коэффициенты по возрастанию, и определить значение функции в максимальной или минимальной точке конфигурации [2].

В настоящей работе рассмотрен модифицированный подход к решению следующей задачи: пусть задана векторная функция $F(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i = \langle c_i, x_i \rangle \to extr$, $i \in N_n$, на комбинаторной конфигурации $X = \{x\}$ и заданы дополнительные ограничения $A_{ij} x_j \le b_j$. Необходимо найти элемент (или элементы) конфигурации, для которого функция достигает экстремального (максимального, минимального) значения и при этом выполняются дополнительные условия задачи (ограничения).

Предлагаемый подход отличается от описанного в [12] тем, что вначале осуществляется поиск точек комбинаторной конфигурации, соответствующих дополнительным ограничениям, а среди множества этих отобранных точек определяется элемент конфигурации, в котором достигается экстремальное значение функции [5]. А в подходе [12] вначале находились решения, для которых достигался экстремум функции, выполнялись условия дополнительных ограничений, после чего проверялась принадлежность найденного решения рассматриваемой комбинаторной конфигурации.

Координатный метод локализации значения линейной функции, модифицированный для поиска точек, удовлетворяющих дополнительным ограничениям задачи, позволяет уменьшить число рассматриваемых точек [6, 7]. Этот подход базируется на свойствах точек, которые определяют элементы комбинаторных конфигураций, разложенных на подграфы в соответствии с выбранным типом вершин и представленных в виде схемы подграфа [7], когда элементы упорядочены, и значение функции на определенном подграфе находится между значениями в крайних вершинах схемы. Граф является сетью, где исток — верхняя левая, а сток — нижняя правая вершины.

Для использования координатного метода необходимо определить типы вершин, по которым раскладывается граф. Возможность такого разложения обусловлена его иерархическим построением, т.е. подграф меньшей размерности является составляющей частью всех графов большей размерности. Для определения типов вершин используем граф размерности 3. Количество его вершин равно $3!$. Именно по этим шести типам вершин: (123), (132), (213), (231), (312), (321), разложим граф на подграфы. Сетку подграфа построим по следующим правилам (на примере конфигурации перестановок из шести элементов):

— определятся и фиксируется тип вершины;

— фиксируется последняя шестая координата;

— в верхнем ряду сетки предпоследняя пятая координата «пробегает» все возможные значения от максимального до минимального;

— в каждом столбце сетки четвертая координата «пробегает» оставшиеся возможные значения от максимального до минимального;

— первые три координаты выстраиваются в порядке, который определяется выбранным типом вершины.

При решении задачи такие сетки строятся для каждого типа вершины. Целесообразность их использования состоит в том, что значения функции с упорядоченными коэффициентами в узлах сетки меняется от большего к меньшему в направлении слева направо и сверху вниз. Это позволяет отбросить существенное количество точек конфигурации, в которых нельзя достичь искомых значений, удовлетворяющих условиям задачи.

Отметим, что использование теории графов при поиске методов решений экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях — перспективное направление исследований, поскольку связано с возможностью визуализации множества решений, а также, что более важно, с использованием свойств графов комбинаторных конфигураций для структурирования и упорядочивания не только точек, но и значений функций и ограничений.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА МОДИФИЦИРОВАННОГО КООРДИНАТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Данный алгоритм предназначен для решения экстремальных задач на комбинаторных множествах при наличии условия многокритериальности, например для множества перестановок. Как упоминалось выше, основной подход к решению многокритериальных задач состоит в способе приведения векторного критерия к скалярному виду. В предложенном алгоритме он заключается в подборе весовых коэффициентов каждого критерия оптимальности с помощью формулы

$$a_i^k = \frac{\sum_{s=1}^{m} \sigma_{is}}{\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}}, \quad i \in N_n. \tag{2}$$

Таким образом, задача преобразуется в однокритериальную.

Заметим, что преимущество координатного метода заключается в том, что отпадает необходимость непосредственно определять значение функции подстановкой элементов. Это можно сделать с помощью вычисления разности между значениями в предыдущей и последующей вершинах, что сокращает количество необходимых операций. Рассмотрим алгоритм.

Алгоритм модифицированного координатного метода решения экстремальных комбинаторных задач при условии многокритериальности.

1. Ввести коэффициенты целевых функций, дополнительных ограничений задачи, элементы множества, на котором строится комбинаторная конфигурация перестановок.

2. Преобразовать векторный критерий в линейную функцию $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i^k f_i \to extr$, где весовые коэффициенты нового критерия оптимальности рассчитываются по формуле (2).

3. Для каждого из k ограничений найти соответствующие ему точки конфигурации перестановок, используя подпрограмму модифицированного координатного метода.

Алгоритм подпрограммы модифицированного координатного метода.

Шаг 1. Задать начальные значения переменным: $t=1$, $k=4$, $i=6$.

Шаг 2. Зафиксировать тип вершины $v_t=(i_1, i_2, i_3)$, где i — номер подграфа, $i_1 \cup i_2 \cup i_3 = \{1, 2, 3\}$.

Шаг 3. Определить значения следующим образом: $x_s = i$; $x_{s-1} = \max\{N_s \setminus x_s\}$; $x_{s-2} = \max\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1})\}$; …; $x_4 = \max\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, \ldots, x_5)\}$. Числа $\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, \ldots, x_4)\}$ упорядочить по возрастанию $j_1 < j_2 < j_3$. Тогда $x_1 = j_{i_1}$, $x_2 = j_{i_2}$, $x_3 = j_{i_3}$ — коды главной вершины, которую обозначим p_1. Отметим, что значение функции-ограничения в ней для заданного типа вершины и зафиксированной координаты будет максимальным для построенной сети.

Шаг 4. Вычислить значение функции в коде главной вершины $f(p_1)$.

Шаг 5. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$: $j_k > j_{k-1} > \ldots > j_1$. Развернуть граф в направлении координаты x_k, выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow j_1$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин $p_2, p_3, \ldots, p_k$, являющихся кодами узлов верхней линии схемы.

Шаг 6. Найти значение функции на перестановках, используя их координаты $f(p_n) = f(p_{n-1}) - \Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ — номер места числа j_λ в коде перестановки p_{n-1}.

Шаг 7. Проверить выполнение следующих условий:

— если $f(p_m) \geq y^*$ (искомые значения существуют в построенном подграфе), то включить m-ю перестановку в дальнейший поиск и перейти к шагу 8;

— если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1 \leq 1$ (искомых значений не существует в построенном подграфе, но не все возможные фиксированные координаты для выбранного типа вершин рассмотрены), то перейти к подграфам со следующей фиксированной координатой $x_s = i$, после чего — к шагу 2;

— если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1=0$ (искомых значений не существует в построенном подграфе и все возможные фиксированные координаты для выбранного типа вершин рассмотрены), то присвоить $i=6$, перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1} и к следующему условию;

— если $t+1 \leq 6$ (не все типы вершин рассмотрены), то перейти к шагу 2, иначе (для всех шести типов вершин уже построены подграфы) завершить роботу алгоритма для данного ограничения.

Шаг 8. Увеличить k на единицу. Если $k < s$, то перейти к шагу 9, иначе перейти к рассмотрению подграфов со следующей фиксированной координатой $x_s = i$, т.е. к шагу 2. (Если $i-1=0$, то присвоить $i=6$ и перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1} при условии, что $t+1 \leq 6$, иначе завершить работу алгоритма для данного ограничения.)

Шаг 9. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$: $j_k > j_{k-1} > \ldots > j_1$. Развернуть граф вдоль координаты x_k, выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow j_1$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин $q_2, q_3, \ldots, q_k$.

Шаг 10. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты $f(q_n) = f(q_{n-1}) - \delta_{n-1}$, $\delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ — номер места числа j_λ в коде перестановки q_{n-1}.

Шаг 11. Если $f(q_n) > y^*$ $\forall n \in N_k$, то перейти к шагу 8. Если $f(q_n) \leq y^*$, то запомнить код вершины q_n.

4. Получить k множеств $D_i \subset X$, где $i \in N_k$.

5. Найти пересечение $D^* = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_k$.

6. Вычислить значение функции в точках $x \in D^*$ и сравнить их, выбрав соответствующее экстремальное значение (максимум или минимум).

7. Найти значение функций, составляющих векторный критерий. Завершить работу алгоритма.

Рассмотрим работу данного алгоритма на следующем на примере.

Пример. Пусть необходимо решить задачу: найти такие точки множества перестановок из элементов $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, в которых достигаются максимальные значения функций

$$f_1(x) = x_1 + 4x_2 + 15x_3 + 3x_4 + 15x_5 + 3x_6,$$

$$f_2(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 + 9x_5 + 15x_6,$$

$$f_3(x) = x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 16x_4 + 18x_5 + 27x_6$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 8x_6 \le 113, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 7x_6 \le 91. \end{cases}$$

Решение. Векторный критерий задачи $F(f_1, f_2, f_3)$ преобразуем в скалярный. Для этого определим весовые коэффициенты каждой функции при условии, что они одинаково важны $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$. Тогда целевая функция задачи будет следующей:

$$f^*(x) = 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 14x_5 + 15x_6.$$

Перейдем к рассмотрению первого ограничения. Последовательно выберем типы вершин (123), (132), (213), (231), (312), (321) и зафиксируем для каждого типа последнюю координату.

Для ограничения $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 8x_6 \le 113$ (функция $g_1(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 8x_6$) определим первый тип вершины (123) и зафиксируем последнюю координату $x_6 = 6$. Найдем значение функции в верхней левой вершине, подставив ее координаты в функцию $g_1(1, 2, 3, 4, 5, 6) = 118$. Это означает, что значение функции-ограничения во всех остальных элементах этой схемы будут меньше 118, т.е. она может содержать точки, удовлетворяющие ограничениям. Переход от верхней левой к верхней правой вершине получаем путем последовательных перестановок элементов $a_5 \Leftrightarrow a_4$, $a_5 \Leftrightarrow a_3$, $a_5 \Leftrightarrow a_2$, $a_5 \Leftrightarrow a_1$. Тогда значения разностей вершин согласно координатному методу рассчитываются так: $\Delta_1 = (5-4)*(6-5) = 1$, $\Delta_2 = (4-3)*(6-4) = 2$, $\Delta_3 = (3-2)*(6-3) = 3$, $\Delta_4 = (2-1)*(6-2) = 4$. Значения функции будут соответственно следующими:

$$g_1(p_1) = g_1(1, 2, 3, 4, 5, 6) = 118,$$

$$g_1(p_2) = g_1(1, 2, 3, 5, 4, 6) = 118 - \Delta_1 = 118 - 1 = 117,$$

$$g_1(p_3) = g_1(1, 2, 4, 5, 3, 6) = 117 - \Delta_2 = 117 - 2 = 115,$$

$$g_1(p_4) = g_1(1, 3, 4, 5, 2, 6) = 115 - \Delta_3 = 115 - 3 = 112,$$

$$g_1(p_5) = g_1(2, 3, 4, 5, 1, 6) = 112 - \Delta_4 = 112 - 4 = 108.$$

На рис. 1 изображена схема с найденными значениями функции-ограничения (заштрифованные области) и с точками, которые удовлетворяют первому ограничению (незашрифованные области). Очевидно, столбцы 4 и 5 схемы (рис. 1) содержат точки, удовлетворяющие данному ограничению, поскольку их максимальные значения (112 и 108) меньше заданного числа 113. Столбцы 1, 2 и 3 могут содер-

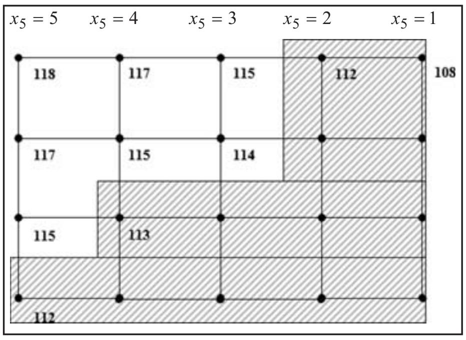

Рис. 1. Схема для первого ограничения при типе вершины (123) и $x_6 = 6$

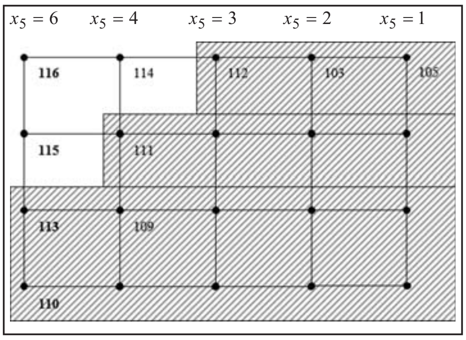

Рис. 2. Схема для первого ограничения при типе вершины (123) и $x_6 = 5$

жать такие точки. Соответственно значения функции от верхней левой к нижней левой вершине получаем путем последовательных перестановок элементов $a_4 \Leftrightarrow a_3 \Leftrightarrow a_2 \Leftrightarrow a_1$. Значения функции в этих точках изменятся следующим образом: $118 \to 117 \to 115 \to 112$. Следовательно, точки последней строки схемы полностью удовлетворяют первому ограничению. Строки 2 и 3 необходимо дополнительно рассмотреть, найдя значения функции в ближайших точках. Причем при нахождении значения, равного или меньшего 113, исследование можно остановить, так как результат будет однозначным.

Далее рассмотрим схемы для установленного типа вершины (123), последовательно фиксируя последнюю координату $x_6 = 5$, $x_6 = 4$, $x_6 = 3$, $x_6 = 2$, $x_6 = 1$. Результаты вычислений для $x_6 = 5$ представлены схемой на рис. 2. Для остальных координат получим значения в левой верхней точке данной схемы.

Из табл. 1 следует, что максимальное значение функции схем не превысит заданного числа 113, т.е. все точки схемы удовлетворяют первому ограничению.

Аналогичные исследования проводим для остальных типов вершин и представим общий результат в табл. 2.

Таблица 1. Значение первого ограничения для типа вершин (123)

Последняя координата	Координаты точки	Значение функции
4	(123564)	113
3	(124563)	109
2	(134562)	104
1	(234561)	98

Таблица 2. Значение первого ограничения в левых верхних точках схем

Тип вершины	Последняя координата	Координаты точки	Значение функции	Тип вершины	Последняя координата	Координаты точки	Значение функции
(132)	4	(132564)	112	(213)	2	(314562)	102
(132)	3	(142563)	107	(213)	1	(324561)	97
(132)	2	(143562)	103	(312)	4	(312564)	110
(132)	1	(243561)	97	(312)	3	(412563)	104
(231)	4	(231564)	110	(312)	2	(413562)	100
(231)	3	(241563)	105	(312)	1	(423561)	95
(231)	2	(341562)	99	(321)	4	(321564)	109
(231)	1	(342561)	95	(321)	3	(421563)	103
(213)	4	(213564)	112	(321)	2	(431562)	98
(213)	3	(214563)	108	(321)	1	(432561)	94

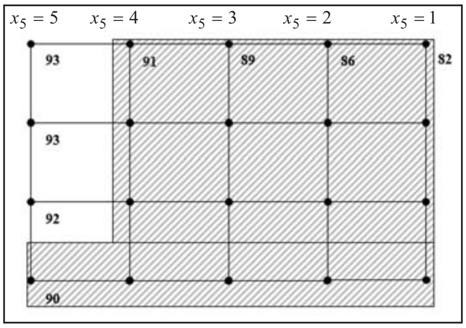

Рис. 3. Схема для второго ограничения при типе вершины (123) при $x_6 = 6$

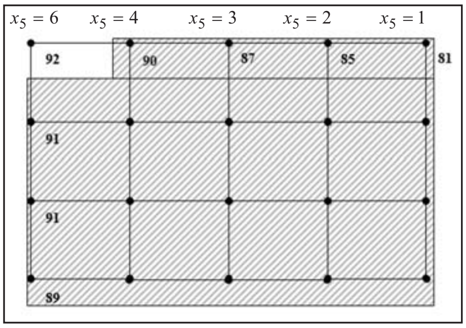

Рис. 4. Схема для второго ограничения при типе вершины (132) при $x_6 = 6$

Перейдем к рассмотрению второго ограничения $3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + {}$ $+ 7x_6 \leq 91$. Найдем функцию с упорядоченными по возрастанию координатами $g_2(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 7x_6$. Определим тип вершины (123) и зафиксируем координату $x_6 = 6$. Результаты исследований представим в виде схемы на рис. 3 и в табл. 3.

Определим тип вершины (132) и зафиксируем координату $x_6 = 6$. Результаты исследований представим в виде схемы на рис. 4 и в табл. 3. Из последней видно, что остальные схемы удовлетворяют второму ограничению во всех точках.

Проанализировав результаты вычислений для второго ограничения, приходим к выводу, что только четыре точки не удовлетворяют этому ограничению задачи: (241536), (245136), (215436), (214536). Таким образом, для пересечения множеств допустимых значений согласно первому и второму ограничениям достаточно «выколоть» эти точки на схемах для первого ограничения.

Найдем максимальные точки каждой схемы и вычислим значение целевой функции в них, из которых определим оптимальное решение. Итак, максимальное значение целевой функции достигается в точке (135246) и равно 234 (табл. 4).

Таблица 3. Значение второго ограничения в левых верхних точках схем

Тип вершины	Последняя координата	Координаты точки	Значение функции	Тип вершины	Последняя координата	Координаты точки	Значение функции
(123)	5	(123465)	91	(213)	5	(213465)	90
(123)	4	(123564)	87	(213)	4	(213564)	86
(123)	3	(124563)	83	(213)	3	(214563)	82
(123)	2	(134562)	78	(213)	2	(314562)	76
(123)	1	(234561)	72	(213)	1	(324561)	71
(132)	5	(132465)	90	(312)	6	(312456)	90
(132)	4	(132564)	86	(312)	5	(312465)	88
(132)	3	(142563)	81	(312)	4	(312564)	84
(132)	2	(143562)	77	(312)	3	(412563)	78
(132)	1	(243561)	71	(312)	2	(413562)	74
(231)	6	(231456)	90	(312)	1	(423561)	69
(231)	5	(231465)	88	(321)	6	(321456)	89
(231)	4	(231564)	84	(321)	5	(321465)	87
(231)	3	(241563)	79	(321)	4	(321564)	83
(231)	2	(341562)	73	(321)	3	(421563)	77
(231)	1	(342561)	69	(321)	2	(431562)	72
(213)	6	(213456)	92	(321)	1	(432561)	68

Т а б л и ц а 4. Значения целевых функций

Координаты точки	Значение функции	Координаты точки	Значение функции	Координаты точки	Значение функции
(134526)	217	(134265)	228	(132465)	232
(135246)	234	(123564)	230	(132564)	227
(234156)	221	(142536)	220	(142563)	217
(124635)	221	(152346)	219	(231536)	209
(126345)	221	(243156)	218	(241356)	222

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы сложные векторные задачи на комбинаторной конфигурации перестановок. Предложен модифицированный подход к решению задач на основе координатного метода, сформулирован алгоритм решения для векторной функции на комбинаторной конфигурации перестановок, проведены численные эксперименты. Модифицированный подход имеет практическое значение и представляет интерес для построения и развития структурированного метода для решения задач на различных комбинаторных конфигурациях при наличии дополнительных сложных ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. — М.: Физматлит., 2004. — 238 с.
2. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 1985. — 308 с.
3. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 158–172.
4. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
5. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977. — 320 с.
6. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 50–61.
7. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 362 с.
8. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 2. — С. 31–41.
9. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 2. — С. 88–99.
10. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв’язання багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на множині поліперестановок // Доп. НАНУ. — 2010. — № 6 — С. 41–48.
11. Колечкина Л.Н. Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок // Динамические системы. — 2009. — № 27. — С. 67–80.
12. Колечкина Л.Н., Родионова Е.А. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений // Кибернетика и системный анализ — 2008. — № 2. — С. 152–160.

Поступила 09.10.2013