УДК 517:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ АЛГОРИТМОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Аннотация. Рассмотрена задача математического моделирования процессов распространения загрязнений от системы точечных источников в воздушной среде. Для численного решения многомерных уравнений конвективной диффузии предложен подход, использующий идею расщепления и организацию вычислений с помощью явных схем бегущего счета. Исследованы вопросы построения разностных схем расщепления, аппроксимации и устойчивости по начальным данным.

Ключевые слова: уравнение конвекции–диффузии, методы расщепления, численный метод, разностная схема, устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время охрана окружающей среды от загрязнений — одна из наиболее актуальных проблем, что обусловлено интенсивным агротехническим и промышленным развитием, оказывающим на окружающую среду глобальное воздействие. В частности, ухудшение качества атмосферного воздуха происходит вследствие выбросов в атмосферу отходов промышленных предприятий, выхлопных газов автотранспорта, а также мгновенных выбросов, возникающих в чрезвычайных ситуациях [1–7]. Для решения экологических задач, связанных с оценкой ситуационных рисков, изучением динамики природных и техногенных катастроф, прогнозированием их последствий, наиболее перспективно математическое моделирование [4, 6–11].

Основой компьютерной технологии математического моделирования процессов переноса загрязнений в атмосферном слое являются базовые модели и эффективные численные алгоритмы решения дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающие диффузионный перенос исследуемых субстанций и конвективный перенос, обусловленный движением среды [4, 8, 11–13]. Для решения этих задач широко применяются численные методы, которые можно реализовать в компьютерных программах с использованием многопроцессорной вычислительной техники для оперативного получения результатов.

В работе рассматриваются математические модели переноса примеси, а также вопросы построения схем расщепления для исследования процессов распространения загрязнений в атмосфере. Для численного решения нестационарных уравнений конвективной диффузии предложен подход, использующий идею расщепления [13–15] с последующей реализацией полученных разностных схем с помощью явных схем бегущего счета [16]. Исследованы вопросы аппроксимации и устойчивости явных разностных схем расщепления. Отметим, что реализация предложенного подхода решения пространственных нестационарных уравнений конвективной диффузии на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью в значительной степени сокращает временные затраты по сравнению с обычными последовательными алгоритмами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ В АТМОСФЕРЕ

Рассмотрим в декартовой системе координат (x, y, z) на временном интервале $0< t \leq T$ математические модели переноса загрязнений в области G с цилиндрической поверхностью ∂G, состоящей из боковой поверхности Γ, нижнего основания Γ_0 (при $z=0$) и верхнего основания Γ_H (при $z=H$). Для моделирования процесса конвективно-диффузионного распространения вредных веществ в атмосфере, производственных помещениях, на промплощадках и других используется уравнение миграции примеси [4, 8, 13]

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+(w-w_g)\frac{\partial C}{\partial z}+\sigma C=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_1\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_2\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_3\frac{\partial C}{\partial z}\right)+f(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in G,\ t\in(0,T], \quad (1)$$

где $C(x,y,z,t)$ — концентрация примеси, (u,v,w) — компоненты вектора скорости воздушных масс $\mathbf{V}=(u,v,w)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ — коэффициенты турбулентной диффузии, $w_g=\mathrm{const}$ — скорость гравитационного оседания частиц примеси, σ — коэффициент трансформации примеси (биохимического разложения), учитывающий изменение концентрации, $f(x,y,z,t)$ — функция, характеризующая распределение источников загрязнения.

Компоненты вектора скорости воздушного потока $\mathbf{V}=(u,v,w)$ удовлетворяют уравнению неразрывности (условию несжимаемости среды)

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \quad (2)$$

Уравнение (1) с недивергентными конвективными слагаемыми является основным при исследовании краевых задач миграции загрязнений. С прикладной точки зрения заслуживают внимания задачи с конвективными слагаемыми в дивергентной форме

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial(uC)}{\partial x}+\frac{\partial(vC)}{\partial y}+\frac{\partial(w-w_g)C}{\partial z}+\sigma C=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_1\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_2\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_3\frac{\partial C}{\partial z}\right)+f(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in G,\ t\in(0,T]. \quad (3)$$

Используя условие несжимаемости (2), можно переписать уравнение (3) в эквивалентном виде (1) и наоборот. Для таких задач особенно важна запись конвективных членов в симметричной форме, когда уравнение конвекции–диффузии имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+(w-w_g)\frac{\partial C}{\partial z}+\frac{\partial(uC)}{\partial x}+\frac{\partial(vC)}{\partial y}+\frac{\partial(w-w_g)C)}{\partial z}\right)+\sigma C=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_1\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_2\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_3\frac{\partial C}{\partial z}\right)+f(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in G,\ t\in(0,T]. \quad (4)$$

Следуя [12], можно установить важные свойства операторов конвективного переноса в уравнениях (1), (3), (4), которые учитываются при построении дискретных моделей. В частности, можно показать, что в уравнениях (1), (3) при выполнении условия несжимаемости среды (2) операторы конвективного переноса будут кососимметричными в недивергентной и дивергентной формах. Оператор конвективного переноса в уравнении (4) будет кососимметричным, даже если условие (2) не выполняется.

Для постоянно действующих точечных источников загрязнения целесообразно представить правую часть $f(x,y,z)$ в виде

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}Q_i\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\delta(z-z_i),$$

где Q_i — интенсивность выброса вредного вещества от i-го источника; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; (x_i,y_i,z_i), $i=\overline{1,N}$, — координаты точечных источников примеси. При исследовании процесса распространения залповых аэрозольных выбросов в атмосферу в моменты времени t_i, $i=\overline{1,N}$, следует положить

$$f(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{N}Q_i\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\delta(z-z_i)\delta(t-t_i).$$

Для моделирования процесса распространения и удаления вредных веществ в производственных помещениях используется уравнение (4) с правой частью вида

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} Q_i \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\delta(z - z_i) - \sum_{j=1}^{M} q_j C\, \delta(x - x_j^*)\delta(y - y_j^*)\delta(z - z_j^*),$$

где (x_j^*, y_j^*, z_j^*); q_j, $j = \overline{1, M}$, — координаты и объемные расходы точечных стоков.

Рассмотрим некоторые варианты граничних условий, которые следует задать на границе области G [4, 8]. Обозначим Γ^- и Γ^+ участки боковой поверхности Γ, где $V_n = \mathbf{V} \cdot n < 0$ и $V_n \geq 0$ соответственно, а n — единичный вектор внешней нормали к Γ. На боковой границе расчетной области формулируются граничные условия, которые моделируют процессы втекания или вытекания загрязнения. На части границы Γ, где воздушные массы втекают в расчетную область, можно считать, что концентрация загрязнения известна. Как правило, загрязнение, которое втекает в G, не учитывают, поэтому на границе Γ^- (участка границы Γ, где $V_n < 0$) ставят условие $C|_{\Gamma^-} = 0$. При необходимости учета загрязнения, которое втекает, задается условие $C|_{\Gamma^-} = C_S$, если $V_n < 0$.

В случае, когда воздушные массы на границе вытекают из области G, диффузионным переносом пренебрегают по сравнению с конвективным, поэтому полагают, что $\left.\frac{\partial C}{\partial n}\right|_{\Gamma^+} = 0$, где Γ^+ — часть границы, где $V_n > 0$.

На плоскости $z = 0$ в условиях твердой подстилающей поверхности задают условие $\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, если земная поверхность отражает поток примеси полностью. Условие третьего рода $\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=0} = \alpha C$, $\alpha > 0$, означает, что земная поверхность падающий на нее поток примеси отражает лишь частично, часть примеси осаждается на поверхности.

На верхней границе $(z = H)$ вертикальная составляющая вектора скорости воздушного потока равна нулю, т.е. выполняется условие, которое означает отсутствие диффузионного переноса $\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$ или $C|_{z=H} = 0$.

Отметим, что для корректной постановки математических моделей процессов конвективной диффузии граничные условия следует дополнить начальным условием $C|_{t=0} = C_0(x, y, z)$.

Важной практической задачей является исследование пространственного переноса и рассеивания загрязнений в промышленных зонах с учетом влияния рельефа местности. Сложность таких задач состоит в необходимости расчета компонентов вектора скорости перемещения воздушных масс. Простейшей моделью для описания поля скоростей (вследствие влияния рельефа) является модель потенциального течения. В этом случае вектор скорости воздушных масс можно представить в виде $\mathbf{V} = \operatorname{grad} p$, где $p = p(x, y, z)$ — потенциал скорости. Учитывая уравнения неразрывности (2), для p получаем уравнение Лапласа

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{5}$$

Для однозначного решения эллиптического уравнения (5) ставятся следующие граничные условия. На твердых стенках производная потенциала по направлению единичной внешней нормали n равняется нулю, поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial n} = (\operatorname{grad} p, n) = \frac{\partial p}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial p}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial p}{\partial z}\cos(n, z) = 0.$$

На входной границе (границе втекания воздушного потока) значение нормальной компоненты скорости воздушного потока V_n известно, поэтому такой процесс моделируется условием $\partial p / \partial n = V_n$. На выходной границе (границе вытекания воздуха) задают значение потенциала скорости $p = p_з$.

Для исследования процессов дальнего переноса загрязнений в атмосфере целесообразно упростить описанную выше математическую модель с помощью процедуры усреднения. Поэтому в случае, когда для описания процесса распространения аэрозолей от точечных источников загрязнения на большие расстояния используется двумерное уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + \sigma C = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1 \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_2 \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \sum_{i=1}^{N} Q_i(t)\delta(x - x_i)\delta(y - y_i), \quad (6)$$

то, несмотря на его сходство с (1), под концентрацией $C(x, y)$ следует понимать усредненную по высоте распространения концентрацию примеси. Граничные условия для уравнения (6) формулируются аналогично предыдущему.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Для численного решения многомерных прямых задач распространения загрязнений разработано большое количество вычислительных алгоритмов, которые базируются в основном на методах расщепления [14]. При этом значительный интерес представляет построение разностных схем расщепления с заданными свойствами, в частности с явной организацией вычислений.

Двухшаговая схема расщепления для расчета потенциального течения. Используя идею установления [15], в области $\overline{G} = G \cup \Gamma = \{0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2, 0 \le z \le l_3\}$ рассмотрим схему расщепления на дифференциальном и дискретном уровнях для уравнения (5) с граничным условием первого рода. В рамках этого подхода формулируется нестационарная задача, решение которой с течением времени приближается к искомому решению стационарной задачи. Таким образом, вместо уравнения (5) рассмотрим нестационарное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p \quad (7)$$

с произвольным начальным условием.

На дифференциальном уровне одну из возможных схем расщепления можно получить, представляя (7) в операторном виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A_1 p + A_2 p = 0, \quad A_1 p = -0{,}5\Delta p, \; A_2 p = -0{,}5\Delta p.$$

Пусть для некоторого момента времени t решение уравнения (7) известно, тогда для момента $\hat{t} = t + \tau$ значение $p(x, y, z, \hat{t})$ можно представить с помощью ряда Тейлора в виде

$$p(x, y, z, \hat{t}) = p(x, y, z, t) + \tau \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t} + O(\tau^2) =$$
$$= p(x, y, z, t) - \tau[A_1 p(x, y, z, t) + A_2 p(x, y, z, t)] + O(\tau^2) =$$
$$= [E - \tau A_1 - \tau A_2] p(x, y, z, t) + O(\tau^2). \quad (8)$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + A_1 p_1 = 0, \quad p_1(x, y, z, t) = p(x, y, z, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + A_2 p_2 = 0, \quad p_2(x, y, z, t) = p_1(x, y, z, \hat{t}) \quad (10)$$

с соответствующими граничными условиями. Легко видеть, что решения рассматриваемых задач (9), (10) в момент времени $\hat{t} = t + \tau$ можно записать в виде

$$p_1(x, y, z, \hat{t}) = [E - \tau A_1] p_1(x, y, z, t) + O(\tau^2),$$

$$p_2(x, y, z, \hat{t}) = [E - \tau A_2] p_2(x, y, z, t) + O(\tau^2).$$

Учитывая, что $p_2(x, y, z, t) = p_1(x, y, z, \hat{t})$, для решения второй вспомогательной задачи имеем

$$p_2(x, y, z, \hat{t}) = [E - \tau A_1 - \tau A_2] p(x, y, z, t) + O(\tau^2). \tag{11}$$

Принимая $p(x, y, z, \hat{t}) = p_2(x, y, z, \hat{t})$ и сравнивая выражения (8) и (11), приходим к утверждению, что, решая последовательно задачи (9), (10), получаем решение уравнения (7) в момент времени $\hat{t} = t + \tau$ с погрешностью $O(\tau^2)$.

Для численного решения нестационарных уравнений (9), (10) в области $\overline{G}$ введем равномерную разностную сетку

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h = \{(x, y, z) : x = x_i = ih_1,\ i = \overline{0, N_1};\ \ y = y_j = jh_2,\ j = \overline{0, N_2};$$

$$z = z_k = kh_3,\quad k = \overline{0, N_3};\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3\},$$

где ω_h — множество внутренних узлов, а γ_h — граничных узлов. Определим конечномерное гильбертово пространство H_h сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$ и равных нулю на ее границе. Скалярное произведение в H_h зададим соотношением $(\varphi, \psi) = \sum\limits_{(x, y, z) \in \omega_h} \varphi(x, y, z)\psi(x, y, z) h_1 h_2 h_3$, тогда норма $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Для самосопряженного и положительного разностного оператора A можно определить энергетическое пространство H_A со скалярным произведением $(\varphi, \psi)_A = (A\varphi, \psi)$ и нормой $\|\varphi\|_A = \sqrt{(A\varphi, \varphi)}$.

Пусть $\omega_\tau = \{t : t = t_n = n\tau,\ n = \overline{0, N},\ N\tau = T\}$ — равномерная временная сетка с шагом τ. В дальнейшем при исследовании нестационарных задач будем рассматривать сеточные функции $\varphi(t_n)$ дискретного аргумента $t_n \in \omega_\tau$ со значениями из конечномерного пространства H_h, т.е. $\varphi(t_n) \in H_h$.

Во внутренних узлах (x_i, y_j, z_k) в момент времени $t = t_n$ уравнению (9) поставим в соответствие неявную разностную схему

$$\varphi_t - 0{,}5(\varphi_{\bar{x}x}^{n+1} + \varphi_{\bar{y}y}^{n+1} + \varphi_{\bar{z}z}^{n+1}) = 0, \tag{12}$$

где φ — сеточная функция, и используются общепринятые обозначения теории разностных схем [12]

$$\varphi = \varphi(x_i, y_j, z_k, t_n) = \varphi_{i,j,k}^n = \varphi^n = \varphi_{i,j,k},\ \varphi_t = (\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n) / \tau,$$

$$\varphi_x = (\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k}) / h_1,\ \varphi_{\bar{x}} = (\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}) / h_1,$$

$$\varphi_{\bar{x}x} = \varphi_{\bar{x}x}^n = (\varphi_x^n - \varphi_{\bar{x}}^n) / h_1.$$

Аналогично определяются разностные операторы $\varphi_y, \varphi_{\bar{y}}, \varphi_{\bar{y}y}$ и $\varphi_z, \varphi_{\bar{z}}, \varphi_{\bar{z}z}$.

Пользуясь разложением в ряд Тейлора, легко убедиться, что уравнение (12) аппроксимирует дифференциальное уравнение (9) с погрешностью $O(|h|^2 + \tau)$, $|h| = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{1/2}$. Явную схему бегущего счета можно получить, заменяя в уравнении (12) операторы φ_x^{n+1}, φ_y^{n+1}, φ_z^{n+1} соответствующими операторами в предыдущий момент времени $t = t_n$. В результате получаем явную схему бегущего счета

$$\varphi_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1}(\varphi_x^n - \varphi_{\bar{x}}^{n+1}) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^n - \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^n - \varphi_{\bar{z}}^{n+1}) \right). \tag{13}$$

Дифференциальную задачу (10) аппроксимируем разностным уравнением

$$\varphi_t - 0{,}5(\varphi_{\bar{x}x}^{n+1} + \varphi_{\bar{y}y}^{n+1} + \varphi_{\bar{z}z}^{n+1}) = 0,$$

из которого путем замены операторов $\varphi_{\bar{x}}^{n+1}$, $\varphi_{\bar{y}}^{n+1}$, $\varphi_{\bar{z}}^{n+1}$ выражениями $\varphi_{\bar{x}}^{n}$, $\varphi_{\bar{y}}^{n}, \varphi_{\bar{z}}^{n}$ получим явную разностную схему

$$\varphi_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^{n}) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^{n}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^{n+1} - \varphi_{\bar{z}}^{n})\right). \tag{14}$$

При этом решение уравнения (13) при $t = t_{n+1}$ является стартовым для разностного уравнения (14).

Численную реализацию алгоритма расщепления (13), (14) можно представить следующим образом. Интервал τ между точками t_n и t_{n+1} расщепляется на две равные части; полученную промежуточную точку обозначим $t_{n+1/2}$. На первой части интервала рассматривается явная разностная схема

$$\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+1/2} - \varphi^{n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n} - \varphi_{\bar{x}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n} - \varphi_{\bar{y}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^{n} - \varphi_{\bar{z}}^{n+1/2})\right). \tag{15}$$

На второй половине временного интервала записывается вторая подсистема

$$\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^{n+1} - \varphi_{\bar{z}}^{n+1/2})\right). \tag{16}$$

В отдельности каждое из разностных уравнений (15), (16) не аппроксимирует исходные дифференциальные уравнения (9), (10). Однако в совокупности (15), (16) составляют разностную схему бегущего счета, аппроксимирующую исходную дифференциальную задачу. Действительно, складывая уравнения (15), (16), получаем

$$\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+1} - \varphi^{n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^{n+1} - \varphi_{\bar{z}}^{n+1/2})\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n} - \varphi_{\bar{x}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n} - \varphi_{\bar{y}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^{n} - \varphi_{\bar{z}}^{n+1/2})\right),$$

или, после преобразований,

$$\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+1} - \varphi^{n}) =$$
$$= \frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1/2} - \varphi_{\bar{x}}^{n+1/2}) + O(\tau^2/|h|^2) + \frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1/2} - \varphi_{\bar{y}}^{n+1/2}) + \frac{1}{h_3}(\varphi_z^{n+1/2} - \varphi_{\bar{z}}^{n+1/2}) =$$
$$= \varphi_{\bar{x}x}^{n+1/2} + \varphi_{\bar{y}y}^{n+1/2} + \varphi_{\bar{z}z}^{n+1/2} + O(\tau^2/|h|^2).$$

Отсюда следует, что разностная схема (15), (16) аппроксимирует дифференциальное уравнение (7) с погрешностью $O(|h|^2 + \tau^2 + \tau^2/|h|^2)$, где слагаемое $\tau^2/|h|^2$ вносит дополнительный вклад в погрешность аппроксимации. Поэтому точность результатов, получаемых при использовании разностной задачи (15), (16), будет зависеть от соотношения шагов сетки. Отметим, что впервые явная схема бегущего счета была предложена для одномерного уравнения теплопроводности [16].

Исследуем важное свойство устойчивости разностной схемы (13),(14) по начальным данным и покажем ее равномерную устойчивость. Рассмотрим сначала уравнение (13). Учитывая, что

$$\frac{1}{h_1}(\varphi_{\bar{x}}^{n+1} - \varphi_x^{n}) = -\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n} - \varphi_{\bar{x}}^{n}) + \frac{1}{h_1}(\varphi_{\bar{x}}^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^{n}) = \frac{\tau}{h_1}\varphi_{t\bar{x}}^{n} - \varphi_{\bar{x}x}^{n}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{h_2}(\varphi_{\bar{y}}^{n+1} - \varphi_y^{n}) = \frac{\tau}{h_2}\varphi_{t\bar{y}}^{n} - \varphi_{\bar{y}y}^{n},\quad \frac{1}{h_3}(\varphi_{\bar{z}}^{n+1} - \varphi_z^{n}) = \frac{\tau}{h_3}\varphi_{t\bar{z}}^{n} - \varphi_{\bar{z}z}^{n}, \tag{18}$$

уравнение (13) можно переписать в операторном виде

$$B\varphi_t + A\varphi = 0, \tag{19}$$

где линейные операторы B, A действуют в сеточном пространстве H_h, $B = E + B_0$, E — тождественный оператор, а операторы A, B_0 определяются так:

$$B_0\varphi = \frac{\tau}{2h_1}\varphi^n_{\bar{x}} + \frac{\tau}{2h_2}\varphi^n_{\bar{y}} + \frac{\tau}{2h_3}\varphi^n_{\bar{z}},\ A\varphi = -\frac{1}{2}(\varphi^n_{\bar{x}x} + \varphi^n_{\bar{y}y} + \varphi^n_{\bar{z}z}).$$

Как известно [13], необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным двухслойной разностной схемы (19) с самосопряженными положительно-определенными операторами A, B означает выполнение операторного неравенства

$$B \geq 0{,}5\tau A, \tag{20}$$

причем для решения уравнения (19) справедлива оценка $||\varphi^{n+1}||_A \leq ||\varphi^n||_A$, $n = \overline{0, N}$.

Можно показать, что в схеме (19) разностный оператор A, действующий в пространстве H_h, является самосопряженным и положительно-определенным, т.е. $A = A^*$, $A > \gamma E$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$. Для проверки свойств самосопряженности и положительной определенности оператора B преобразуем выражение для оператора B_0, замечая, что

$$\varphi_{\bar{x}} = \varphi_{\overset{\circ}{x}} - 0{,}5h_1\varphi_{\bar{x}x},\ \varphi_{\bar{y}} = \varphi_{\overset{\circ}{y}} - 0{,}5h_2\varphi_{\bar{y}y},\ \varphi_{\bar{z}} = \varphi_{\overset{\circ}{z}} - 0{,}5h_3\varphi_{\bar{z}z},$$

$$\varphi_{\overset{\circ}{x}} = 0{,}5(\varphi_x + \varphi_{\bar{x}}),\ \varphi_{\overset{\circ}{y}} = 0{,}5(\varphi_y + \varphi_{\bar{y}}),\ \varphi_{\overset{\circ}{z}} = 0{,}5(\varphi_z + \varphi_{\bar{z}}). \tag{21}$$

Тогда имеем

$$B = E + B_0 = E + \frac{\tau}{2h_1}\left(\varphi_{\overset{\circ}{x}} - \frac{h_1}{2}\varphi_{\bar{x}x}\right) + \frac{\tau}{2h_2}\left(\varphi_{\overset{\circ}{y}} - \frac{h_2}{2}\varphi_{\bar{y}y}\right) + \frac{\tau}{2h_3}\left(\varphi_{\overset{\circ}{z}} - \frac{h_3}{2}\varphi_{\bar{z}z}\right) =$$

$$= E + B_1 + \frac{\tau}{2}A,\ B_1 = \frac{\tau}{2h_1}\varphi_{\overset{\circ}{x}} + \frac{\tau}{2h_2}\varphi_{\overset{\circ}{y}} + \frac{\tau}{2h_3}\varphi_{\overset{\circ}{z}}.$$

В силу кососимметричности оператора B_1 для скалярного произведения $(B\varphi, \varphi)$ получаем

$$(B\varphi, \varphi) = ((E + B_0)\varphi, \varphi) = (\varphi, \varphi) + 0{,}5\tau(A\varphi, \varphi).$$

Таким образом, операторы A, B являются положительно-определенными операторами, поэтому условие устойчивости (20), принимающее вид

$$(B\varphi, \varphi) = ||\varphi||^2 + 0{,}5\tau(A\varphi, \varphi) \geq 0{,}5\tau(A\varphi, \varphi),$$

всегда выполняется. Следовательно, явная разностная схема (13) безусловно устойчива. Аналогично можно показать устойчивость уравнения (14).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Явная двухслойная разностная схема бегущего счета (15), (16) равномерно устойчива по начальным данным в энергетической норме $||\cdot||_A$.

Четырехшаговая схема расщепления для уравнения конвекции–диффузии. Данную схему рассмотрим в области $\overline{G} = G \cup \Gamma = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ на примере двумерного уравнения конвективной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + \sigma C = \mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) + F(x, y, t) \tag{22}$$

с начальным условием и однородным граничным условием первого рода. При этом компоненты вектора скорости $u = u(x, y), v = v(x, y)$ удовлетворяют условию несжимаемости (2). Представим u, v в виде суммы $u = u^+ + u^-$, $v = v^+ + v^-$, где $u^+ = 0{,}5(u + |u|) \geq 0$, $u^- = 0{,}5(u - |u|) \leq 0$, $v^+ = 0{,}5(v + |v|) \geq 0$, $v^- = 0{,}5(v - |v|) \leq 0$.

Пусть τ — временной интервал между точками t_n и t_{n+1}. Получим четырехшаговую схему расщепления на дифференциальном уровне, представив уравнение (22) в операторном виде

$$\frac{\partial C}{\partial t}+(A_1+A_2+A_3+A_4)C=F, \tag{23}$$

где

$$A_1C=\frac{1}{2}\left(u^+\frac{\partial C}{\partial x}+v^+\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\sigma}{4}C-\frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right),$$

$$A_2C=\frac{1}{2}\left(u^-\frac{\partial C}{\partial x}+v^-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\sigma}{4}C-\frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right),$$

$$A_3C=\frac{1}{2}\left(u^+\frac{\partial C}{\partial x}+v^-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\sigma}{4}C-\frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right),$$

$$A_4C=\frac{1}{2}\left(u^-\frac{\partial C}{\partial x}+v^+\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\sigma}{4}C-\frac{1}{4}\mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right).$$

Аналогично предыдущему имеем схему расщепления на дифференциальном уровне

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}+A_1C_1-\frac{1}{4}F=0,\ C_1^n=C^n=C(x,y,t_n), \tag{24}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t}+A_1C_2-\frac{1}{4}F=0,\ C_2^n=C_1^{n+1}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial t}+A_1C_3-\frac{1}{4}F=0,\ C_3^n=C_2^{n+1}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial t}+A_1C_4-\frac{1}{4}F=0,\ C_4^n=C_3^{n+1},\ C^{n+1}=C_4^{n+1}. \tag{27}$$

Дифференциальные операторы A_i, $i=\overline{1-4}$, будем аппроксимировать разностными операторами, используя для аппроксимации конвективных слагаемых схемы с направленными разностями [12]. В этом случае аппроксимация выражений $u^+\dfrac{\partial C}{\partial x}, u^-\dfrac{\partial C}{\partial x}$ определяется разностными операторами $\Lambda^+\varphi=u^+\varphi_{\bar{x}}$, $\Lambda^-\varphi=u^-\varphi_x$ соответственно. Тогда, например, оператору A_1 в узлах (x_i, y_j) двумерной сетки можно поставить в соответствие разностное выражение

$$\Lambda\varphi=\frac{1}{2}(u^+\varphi_{\bar{x}}^{n+1}+v^+\varphi_{\bar{y}}^{n+1})+\frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1}-\frac{\mu}{4}(\varphi_{\bar{x}x}^{n+1}-\varphi_{\bar{y}y}^{n+1}). \tag{28}$$

Поскольку на решении дифференциальной задачи справедливо соотношение

$$\Lambda C_1=A_1C_1-h_1\frac{u^+}{4}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}-h_2\frac{v^+}{4}\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2}+O(|h|^2),$$

легко убедиться, что разностная схема с возмущенным коэффициентом диффузии

$$\varphi_t+\frac{1}{2}(u^+\varphi_{\bar{x}}^{n+1}+v^+\varphi_{\bar{y}}^{n+1})+\frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1}-\frac{\mu}{4}\left((1-R_1^+)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1}-\varphi_{\bar{x}}^{n+1})\right)-$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1-R_2^+)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1}-\varphi_{\bar{y}}^{n+1})\right)=\frac{1}{4}f^n,\ R_1^+=h_1\frac{u^+}{\mu},\ R_2^+=h_2\frac{v^+}{\mu} \tag{29}$$

аппроксимирует уравнение (24) со вторым порядком точности по пространству. Здесь f — сеточная функция, аппроксимирующая функцию $F(x,y,t)$.

Если в уравнении (29) операторы $\varphi_x^{n+1}, \varphi_y^{n+1}$ заменить соответствующими операторами при $t = t_n$, получим на первом шаге схемы расщепления явную разностную схему бегущего счета

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(u^+ \varphi_{\bar{x}}^{n+1} + v^+ \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 - R_1^+)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^n - \varphi_{\bar{x}}^{n+1}) + (1 - R_2^+)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^n - \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) \right) = \frac{1}{4} f^n. \qquad (30)$$

Аналогично предыдущему можно получить явные разностные схемы бегущего счета для численного решения уравнений (25)–(27)

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(u^- \varphi_x^{n+1} + v^- \varphi_y^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 + R_1^-)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n) + (1 + R_2^-)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^n) \right) = \frac{1}{4} f^n, \qquad (31)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(u^+ \varphi_{\bar{x}}^{n+1} + v^- \varphi_y^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 - R_1^+)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^n - \varphi_{\bar{x}}^{n+1}) + (1 + R_2^-)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^n) \right) = \frac{1}{4} f^n, \qquad (32)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(u^- \varphi_x^{n+1} + v^+ \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 + R_1^-)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n) + (1 - R_2^+)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^n - \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) \right) = \frac{1}{4} f^n, \qquad (33)$$

где $R_1^- = h_1 \dfrac{u^-}{\mu}$, $R_2^- = h_2 \dfrac{v^-}{\mu}$.

При этом отметим, что решение уравнений (30)–(32) в момент времени $t = t_{n+1}$ является стартовым для уравнений (31)–(33) соответственно.

Обозначим

$$L_1\varphi^{n+1} = \frac{1}{2}(u^+ \varphi_{\bar{x}}^{n+1} + v^+ \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 - R_1^+)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^n - \varphi_{\bar{x}}^{n+1}) + (1 - R_2^+)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^n - \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) \right),$$

$$L_2\varphi^{n+1} = \frac{1}{2}(u^- \varphi_x^{n+1} + v^- \varphi_y^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 + R_1^-)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n) + (1 + R_2^-)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^n) \right),$$

$$L_3\varphi^{n+1} = \frac{1}{2}(u^+ \varphi_{\bar{x}}^{n+1} + v^- \varphi_y^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 - R_1^+)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^n - \varphi_{\bar{x}}^{n+1}) + (1 + R_2^-)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^n) \right),$$

$$L_4\varphi^{n+1} = \frac{1}{2}(u^- \varphi_x^{n+1} + v^+ \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} -$$

$$-\frac{\mu}{4}\left((1 + R_1^-)\frac{1}{h_1}(\varphi_x^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n) + (1 - R_2^+)\frac{1}{h_2}(\varphi_y^n - \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) \right)$$

модифицированные разностные аппроксимации дифференциальных операторов A_i, $i=1-4$, соответственно. Тогда для реализации явной четырехшаговой схемы расщепления (30)–(33) можно воспользоваться следующим алгоритмом:

$$\overset{1}{\varphi}{}_t^n + L_1 \overset{1}{\varphi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f^n = 0, \ \overset{1}{\varphi}{}^n = \varphi^n = \varphi(x, y, t_n), \tag{34}$$

$$\overset{2}{\varphi}{}_t^n + L_2 \overset{2}{\varphi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f^n = 0, \ \overset{2}{\varphi}{}^n = \overset{1}{\varphi}{}^{n+1}, \tag{35}$$

$$\overset{3}{\varphi}{}_t^n + L_3 \overset{3}{\varphi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f^n = 0, \ \overset{3}{\varphi}{}^n = \overset{2}{\varphi}{}^{n+1}, \tag{36}$$

$$\overset{4}{\varphi}{}_t^n + L_4 \overset{4}{\varphi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f^n = 0, \ \overset{4}{\varphi}{}^n = \overset{3}{\varphi}{}^{n+1}, \ \varphi^{n+1} = \overset{4}{\varphi}{}^{n+1}. \tag{37}$$

Устойчивость схемы расщепления по начальным данным рассмотрим на примере разностного уравнения (34) или, что то же самое, уравнения (30). Для этого воспользуемся принципом замороженных коэффициентов и преобразуем уравнение (30) при $f^n = 0$ к каноническому виду (19). Принимая во внимание тождества (17), (18), получаем следующее уравнение:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(u^+ \varphi_{\bar{x}}^{n+1} + v^+ \varphi_{\bar{y}}^{n+1}) + \frac{\sigma}{4}\varphi^{n+1} +$$

$$+\frac{\mu}{4}(1-R_1^+)\left(\frac{\tau}{h_1}\varphi_{t\bar{x}}^n + \Lambda_1 \varphi^n\right) + \frac{\mu}{4}(1-R_2^+)\left(\frac{\tau}{h_2}\varphi_{t\bar{y}}^n + \Lambda_2 \varphi^n\right) = 0, \tag{38}$$

где $\Lambda_1 \varphi = -\varphi_{\bar{x}x}$, $\Lambda_2 \varphi = -\varphi_{\bar{y}y}$.

Далее учтем, что

$$\varphi_{\bar{x}}^{n+1} = (\varphi_{\bar{x}}^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n + \varphi_{\bar{x}}^n) = \tau \varphi_{t\bar{x}}^n + \varphi_{\bar{x}}^n,$$

$$\varphi_{\bar{y}}^{n+1} = (\varphi_{\bar{y}}^{n+1} - \varphi_{\bar{y}}^n + \varphi_{\bar{y}}^n) = \tau \varphi_{t\bar{y}}^n + \varphi_{\bar{y}}^n, \ \varphi^{n+1} = (\varphi^{n+1} - \varphi^n + \varphi^n) = \tau \varphi_t^n + \varphi^n.$$

Теперь разностное уравнение (38) можно записать в операторном виде (19), где линейные операторы A, B действуют в сеточном пространстве H_h и определяются следующими формулами:

$$A\varphi = \frac{u^+}{2}\varphi_{\bar{x}} + \frac{v^+}{2}\varphi_{\bar{y}} + \frac{\sigma}{4}\varphi + \frac{\mu}{4}(1-R_1^+)\Lambda_1 \varphi + \frac{\mu}{4}(1-R_2^+)\Lambda_2 \varphi,$$

$$B\varphi = \left(1 + \frac{\tau\sigma}{4}\right)\varphi + \frac{\tau}{2}u^+ \varphi_{\bar{x}} + \frac{\tau}{2}v^+ \varphi_{\bar{y}} + \frac{\tau\mu}{4h_1}(1-R_1^+)\varphi_{\bar{x}} + \frac{\tau\mu}{4h_2}(1-R_2^+)\varphi_{\bar{y}}.$$

На основании (21) окончательно получаем выражения для операторов A, B:

$$A\varphi = \frac{u^+}{2}\left(\varphi_{\overset{\circ}{x}} + 0{,}5 h_1 \Lambda_1 \varphi\right) + \frac{v^+}{2}\left(\varphi_{\overset{\circ}{y}} + 0{,}5 h_2 \Lambda_2 \varphi\right) +$$

$$+\frac{\sigma}{4}\varphi + \frac{\mu}{4}(1-R_1^+)\Lambda_1 \varphi + \frac{\mu}{4}(1-R_2^+)\Lambda_2 \varphi =$$

$$= \left(\frac{h_1 u^+}{4} + \frac{\mu}{4}(1-R_1^+)\right)\Lambda_1 \varphi + \left(\frac{h_2 v^+}{4} + \frac{\mu}{4}(1-R_2^+)\right)\Lambda_2 \varphi + \frac{\sigma}{4}\varphi + \frac{u^+}{2}\varphi_{\overset{\circ}{x}} + \frac{v^+}{2}\varphi_{\overset{\circ}{y}},$$

$$B\varphi = \left(1 + \frac{\tau\sigma}{4}\right)\varphi + \left(\frac{\tau h_1}{4}u^+ + \frac{\tau\mu}{8}(1-R_1^+)\right)\Lambda_1 \varphi + \left(\frac{\tau h_2}{4}v^+ + \frac{\tau\mu}{8}(1-R_2^+)\right)\Lambda_2 \varphi +$$

$$+\left(\frac{\tau}{2}u^+ + \frac{\tau\mu}{4h_1}(1-R_1^+)\right)\varphi_{\overset{\circ}{x}} + \left(\frac{\tau}{2}v^+ + \frac{\tau\mu}{4h_2}(1-R_2^+)\right)\varphi_{\overset{\circ}{y}}.$$

Представим операторы A, B в виде $A = A_0 + A_1$, $B = B_0 + B_1$, где

$$A_0\varphi = \left(\frac{h_1 u^+}{4} + \frac{\mu}{4}(1 - R_1^+)\right)\Lambda_1\varphi + \left(\frac{h_2 v^+}{4} + \frac{\mu}{4}(1 - R_2^+)\right)\Lambda_2\varphi + \frac{\sigma}{4}\varphi =$$

$$= \frac{\mu}{4}\Lambda_1\varphi + \frac{\mu}{4}\Lambda_2\varphi + \frac{\sigma}{4}\varphi, \quad A_1\varphi = \frac{u^+}{2}\varphi_{\overset{\circ}{x}} + \frac{v^+}{2}\varphi_{\overset{\circ}{y}},$$

$$B_0\varphi = \left(1 + \frac{\tau\sigma}{4}\right)\varphi + \left(\frac{\tau h_1}{4}u^+ + \frac{\tau\mu}{8}(1 - R_1^+)\right)\Lambda_1\varphi + \left(\frac{\tau h_2}{4}v^+ + \frac{\tau\mu}{8}(1 - R_2^+)\right)\Lambda_2\varphi =$$

$$= \left(1 + \frac{\tau\sigma}{4}\right)\varphi + \frac{\tau}{8}(\mu + h_1 u^+)\Lambda_1\varphi + \frac{\tau}{8}(\mu + h_2 v^+)\Lambda_2\varphi,$$

$$B_1\varphi = \left(\frac{\tau}{2}u^+ + \frac{\tau\mu}{4h_1}(1 - R_1^+)\right)\varphi_{\overset{\circ}{x}} + \left(\frac{\tau}{2}v^+ + \frac{\tau\mu}{4h_2}(1 - R_2^+)\right)\varphi_{\overset{\circ}{y}} =$$

$$= \frac{\tau}{4}\left(u^+ + \frac{\mu}{h_1}\right)\varphi_{\overset{\circ}{x}} + \frac{\tau}{4}\left(v^+ + \frac{\mu}{h_2}\right)\varphi_{\overset{\circ}{y}}.$$

Следуя [13], можно показать самосопряженность и положительную определенность операторов A_0, B_0 в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$. Поскольку A_1, B_1 — кососимметричные операторы, $(A_1\varphi, \varphi) = 0$, $(B_1\varphi, \varphi) = 0$. Поэтому условие устойчивости (20) эквивалентно операторному неравенству $B_0 \geq 0{,}5\tau A_0$. Замечая, что

$$B_0 = \left(1 + \frac{\tau\sigma}{8}\right)E + \frac{\tau h_1}{8}u^+\Lambda_1 + \frac{\tau h_2}{8}v^+\Lambda_2 + \frac{\tau}{2}A_0,$$

запишем условие устойчивости схемы (38) в виде

$$\left(1 + \frac{\tau\sigma}{8}\right)E + \frac{\tau h_1}{8}u^+\Lambda_1 + \frac{\tau h_2}{8}v^+\Lambda_2 + \frac{\tau}{2}A_0 \geq \frac{\tau}{2}A_0.$$

Данное условие всегда выполняется, поэтому на первом шаге расщепления разностная схема (30) равномерно устойчива по начальным данным в энергетической норме $||\cdot||_{A_0}$.

Устойчивость разностных уравнений (31)–(33) исследуется аналогично. Например, на третьем шаге расщепления разностную схему (32) с нулевой правой частью можно записать в виде двухслойной схемы (19), операторы которой A, B определяются формулами $A = A_0 + A_1$, $B = B_0 + B_1$, где

$$A_0\varphi = \left(\frac{h_1 u^+}{4} + \frac{\mu}{4}(1 - R_1^+)\right)\Lambda_1\varphi + \left(\frac{h_2 |v^-|}{4} + \frac{\mu}{4}(1 + R_2^-)\right)\Lambda_2\varphi + \frac{\sigma}{4}\varphi =$$

$$= \frac{\mu}{4}\Lambda_1\varphi + \frac{\mu}{4}\Lambda_2\varphi + \frac{\delta}{4}\varphi, \quad A_1\varphi = \frac{u^+}{2}\varphi_{\overset{\circ}{x}} - \frac{|v^-|}{2}\varphi_{\overset{\circ}{y}}, \tag{39}$$

$$B_0\varphi = \left(1 + \frac{\tau\sigma}{4}\right)\varphi + \left(\frac{\tau h_1}{4}u^+ + \frac{\tau\mu}{8}(1 - R_1^+)\right)\Lambda_1\varphi + \left(\frac{\tau h_2 |v^-|}{4} + \frac{\tau\mu}{8}(1 + R_2^-)\right)\Lambda_2\varphi =$$

$$= \left(1 + \frac{\tau\sigma}{4}\right)\varphi + \left(\frac{\tau h_1}{8}u^+ + \frac{\tau\mu}{8}\right)\Lambda_1\varphi + \left(\frac{\tau h_2 |v^-|}{8} + \frac{\tau\mu}{8}\right)\Lambda_2\varphi,$$

$$B_1\varphi = \left(\frac{\tau}{2}u^+ + \frac{\tau\mu}{4h_1}(1 - R_1^+)\right)\varphi_{\overset{\circ}{x}} - \left(\frac{\tau}{2}|v^-| + \frac{\tau\mu}{4h_2}(1 + R_2^-)\right)\varphi_{\overset{\circ}{y}}. \tag{40}$$

Самосопряженность и положительная определенность операторов A_0, B_0 в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ следует из анализа выражений (39), (40). Кроме того, операторы A_1, B_1 кососимметричны, поэтому выполняются условия $(A_1\varphi, \varphi) = 0$, $(B_1\varphi, \varphi) = 0$, а условие устойчивости (20) эквивалентно операторному неравенству $B_0 \geq 0{,}5\tau A_0$.

Легко видеть, что

$$B_0 = E + \frac{\tau\sigma}{8} E + \frac{\tau h_1}{8} u^+ \Lambda_1 + \frac{\tau h_2}{8} | v^- | \Lambda_2 + \frac{\tau}{2} A_0.$$

Тем самым условие устойчивости схемы (32) принимает вид неравенства

$$E + \frac{\tau\sigma}{8} E + \frac{\tau h_1}{8} u^+ \Lambda_1 + \frac{\tau h_2}{8} | v^- | \Lambda_2 + \frac{\tau}{2} A_0 \geq \frac{\tau}{2} A_0,$$

которое всегда выполняется. Аналогично исследуется устойчивость уравнений (31) и (33).

Таким образом, для всех допустимых значений компонентов вектора скорости воздушного потока справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Явные двухслойные разностные схемы бегущего счета (30)–(33) равномерно устойчивы по начальным данным.

Отсюда в соответствии с принципом замороженных коэффициентов вытекает абсолютная устойчивость четырехшаговой схемы расщепления бегущего счета (34)–(37) по начальным данным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье приведены математические модели переноса, позволяющие исследовать процессы распространения загрязнений от системы стационарных точечных источников и при залповом выбросе, процессы рассеивания загрязнений в производственных помещениях, загрязнения воздушной среды с использованием модели потенциального течения и др. Для численного решения многомерных нестационарных уравнений конвективной диффузии предложен подход, использующий идею расщепления и реализацию полученных разностных схем с помощью явных схем бегущего счета. Рассмотрены и исследованы вопросы построения схем расщепления, аппроксимации и устойчивости явных разностных схем по начальным данным. Реализация предложенного подхода к решению пространственных нестационарных уравнений конвективной диффузии на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью позволит в значительной степени сократить временные затраты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. Общесоюзный нормативный документ (ОНД-86). — Л.: Гидрометеоиздат, 1987. — 93 с.
2. Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной среды. — Л.: Гидрометеоиздат, 1984. — 560 с.
3. Тищенко Н.Ф. Охрана атмосферного воздуха. Расчет содержания вредных веществ и их распределение в воздухе. — М.: Химия, 1991. — 236 с.
4. Згуровский М.З., Скопецкий В.В., Хрущ В.К., Беляев Н.Н. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде. — Киев: Наук. думка, 1997. — 368 с.
5. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / Под ред. Ф.Т.М. Ньистадта, Х. Ван Допа. — Л.: Гидрометеоиздат, 1985. — 352 с.
6. Алоян А.Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. — М.: Наука, 2008. — 415 с.
7. Аргучинцев В.К., Аргучинцева А.В. Модели и методы для решения задач охраны атмосферы, гидросферы и подстилающей поверхности. — Иркутск: ИГУ, 2001. — 114 с.

8. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982. — 320 с.

9. Гринин А.С., Орехов Н.А., Новиков В.Н. Математическое моделирование в экологии. — М.: ЮНИТИ, 2003. — 270 с.

10. Алоян А.Е., Пененко В.В., Козодеров В.В. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. — М.: Наука, 2005. — **2**. — С. 279–351.

11. Гладкий А.В., Сергієнко І.В., Скопецький В.В., Гладка Ю.А. Основи математичного моделювання в екології: — К.: НТУУ «КПІ», 2009. — 240 с.

12. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 248 с.

13. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.

14. Марчук Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 264 с.

15. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1987. — 588 с.

16. Саульев В.К. Об одном способе численного интегрирования уравнений диффузии // ДАН. — 1957. — **115**, № 6. — С. 1077–1080.

Поступила 29.10.2013